





دانشگاه یاسوج
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان نامه:
برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض
گرایش هندسه و توپولوژی

عنوان: حدهای آکروئال و قضیه‌ی شکافندگی

استاد راهنما: دکتر مهدی شریف زاده

استاد مشاور: دکتر علیرضا الفتی

پژوهشگر:
الهام فرزانی

۲۷ بهمن ۹۵

نام خانوادگی دانشجو: فرزامی		نام: الهام	
عنوان: حدهای آکروئال و قضیه‌ی شکافندگی			
استاد راهنما: دکتر مهدی شریف زاده			
استاد مشاور: دکتر علیرضا الفتی			
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد		رشته تحصیلی: ریاضی محض	
		گرایش: هندسه	
دانشگاه: یاسوج		دانشکده: علوم پایه	
تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۵		تعداد صفحات: ۱۱۳	
واژه‌های کلیدی: فضا‌زمان، سطوح کشی، سختی، تحدّب.			
چکیده:			
در این پایان نامه، تعبیر شبه کره از دیدگاه آکروئال در هندسه لورنتسی و بررسی این مفهوم در قضیه شکافندگی و ارتباط آن با قضیه تکینگی هاوکینگ - پن رز (در قالب قضیه شکافندگی در هندسه لورنتسی) بیان شده است. در این راستا، ابتدا به معرفی و بررسی مفاهیم حدهای آکروئال، کره‌ها و شبه کره‌ها و تعمیم آن در هندسه لورنتسی، نامساوی انحنای متوسط ضعیف، نتایج مربوط به شکافندگی برای شبه کره‌های تعمیم یافته پرداخته می‌شود و در پایان خواص سختی و تحدّب شبه کره‌های تعمیم یافته بررسی شده‌اند.			

تقدیم بہ

مقدس ترین واثرہ مادر لغت نامہ دلم
مرحوم پدرم کہ مہربان، مشفق، بردبار و حامی ام در
سالیان عمرش بود
مادر مہربانم کہ زندگیم را دیون مہر و عطوفت آن
می دانم

پروردگارا. به من یقینی عطا فرما که با آن از رنج طلب بیایم. به یقینی بس عمیق که با آن بر تو تکیه نمایم و اطمینانی خالص که با آن دشواری کارها را از اندیشه ام دور نمایم. مرا آسودگی بخش تا دل به این جهان سپارم و سلامتی عنایت کن تا بندگی ات نمایم. یاریم فرما و با بخشش، راه اعدال را به من بنمای. چون تنها تو را سهای بی قید و شرطی.

خدایا. من آن می‌تسم که همه می‌پندارند. تنها تو آگاهی و من، که به راستی درون من چیست. خدایا تو مرا نزد بهنگان خوب و شایسته جلوه دادی و من بهتر از هر کس می‌دانم که شایسته آن نام‌های نیکو بودم. اما با دریای لطف تو چه می‌توان کرد؟ هر که تو مرا اینگونه می‌خواهی ناچیزترین سپاسم در برابر تو سکوت من است. شکر.

پروردگارا. تو را می‌خوانم آن زمان که دیرپاسخی نمی‌شنوم. و با تومی مانم آن زمانی که دیگر می‌ماند. یاریم کن تا آن زمان که پاسخ هم می‌شنوم باز تنها تو را بخوانم و در آن زمان که دیگران با من می‌مانند من با تو بانم. زیرا تو مرا کفایت می‌کنی. پروردگارا. من آن بنده رویایی هستم که بهترین شب‌هایت را نیز به غفلت گذراندم. تنها تو صدایم را می‌شنوی آن زمان که می‌خوانمت. خدایا خوبم! مرا به عقوبت غلظتم دچار کن و سرنو شتم را به لطف و برکت خویش آن گونه ناکه با آن به تو نزدیکتر شوم. قبول آنچه خیر و صلاح من در آن است را بر ایم آسان فرما و قدرت فهم معرفت و حکمت آن را به من عطا کن. آمین ای مهربانترین مهربانان.

خدایا. لگم کن تا در خواستن این خواسته‌ها همواره امیدوار باشم و در لحظه لحظه آن به تو توکل کنم. لگم کن که به یاری تو در این مسیر، ایمان قلبی داشته باشم و بایستین به آن بیاندیشم. و لگم کن که در ابتدای خواستنم و در میان آن و در انتهای آن بر محمود خاندان پاکش دود فرستم و آنان را زیباترین واسطه‌های روان شدن حاجتم قرار دهم.

تشکر و قدردانی

حمد و ستایش خداوند سبحان را، که مرا توفیق عنایت فرمود تا در راه کسب علم و دانش گام بردارم، به پاس احترام به حرمت دانش بر خود لازم می دانم که از زحمات و راهنمایی های استاد گرامی و ارجمندم

جناب آقای دکتر مهدی شریف زاده

تشکر کنم که نظارت این تحقیق را بر عهده داشته اند و در تمام مراحل از یاری و مساعدت ایشان برخوردار بوده ام و بزرگترین افتخارم در طول تحصیل، شاگردی این استاد بی نظیر و بزرگوار می باشد. همچنین از استاد با کمالات و بزرگوارم

جناب آقای دکتر علیرضا الفتی

که استاد مشاور این جانب بوده اند و از نظرات و راهنمایی های ایشان در طول دوره بهره مند گردیده ام، تشکر و قدردانی نمایم و آرزوی موفقیت و سربلندی ایشان را از خدای متعال خواهم. از اساتید بزرگوار

جناب آقای دکتر بهزاد نجفی و جناب آقای دکتر علی طاهری فر
که زحمات مطالعه و داوری پایان نامه را تقبل فرمودند صمیمانه سپاسگزارم.

از صمیم قلب از خانواده‌ی عزیزم، فرشتگان ساکن در کره‌ی خاکی، پدر و مادرم و خواهر و برادر مهربانم سپاس‌گزاری نموده و بر
دستان پر مهرشان بوسه می‌زنم و از خداوند عاجزان می‌خواهم تایاری ام کند جوایب کوی رحمت تک تکشان باشم.
از تمام اساتید محترم و دوستان عزیز که در طول تحصیل لطف و محبتشان نصیبم شده، تشکر می‌نمایم.

الهام فرزانی
بهمن ۹۵

پیش‌گفتار

در اوایل ۱۹۸۰ یائو^۱ مسأله شکافندگی لورنتسی را در [۳۰] مطرح کرد. مسأله‌ای که به گونه‌ای نسخه لورنتسی قضیه چیرگر گرومول^۲ در هندسه ریمانی می‌باشد. راه حل‌های این مسأله تابع بوسمان لورنتسی و مطالعه هندسی مجموعه سطوح آن - همان شبه کره‌های لورنتسی استاندارد (شبه کره‌های کشی) - را تحت شعاع قرار داد (رجوع شود به [۶]، [۱۰] و [۳۳]). با وجود اینکه این راه حل‌ها کاربرد زیادی دارند اما تابع بوسمان در حالت لورنتسی دارای روابط تحلیلی و ریاضیاتی پیچیده‌ای است و نظریه تکینگی در حالت لورنتسی پیچیده تر و ناقص تر از نظریه در حالت ریمانی است (رجوع شود به [۱۸]). سختی (صلبیت) در قضیه‌های تکینگی هاوکینگ - پن رز^۳، موجب پیدایش مسأله شکافندگی لورنتسی شد. قضیه شکافندگی چیرگر گرومول با مسأله شکافندگی لورنتسی سازگاری ندارد و این به این دلیل است که، یک مشکل مختصاً لورنتسی وجود دارد یعنی، در حالی که می‌توان یک خط علی را تشکیل داد این خط قائم باقی نمی‌ماند، به عبارت دیگر، همانند بردارهای زمان‌گونه از حالت نرمال خارج شده به صورت تهی در می‌آیند.

در سال ۱۹۸۸، بارتنیک^۴ مسأله سختی را مانند حدس ۲ در [۴] متوجه شد که به این صورت است. (حدس شکافندگی بارتنیک): فرض کنید (M, g) یک فضازمان باشد و

(۱) M ، دارای یک سطح کشی فشرده S باشد.

(۲) M ، در شرط همگرایی زمان‌گونه صدق کند یعنی برای تمام بردارهای زمان‌گونه $X \in TM$ ،
 $Ric(X, X) \geq 0$ برقرار باشد.

^۱ Yau

^۲ Cheeger-Gromoll

^۳ Hawking-Penrose

^۴ Bartnik

۳) M ، کامل ژئودزیکي زمان گونه باشد.

پس M ، شکافته می شود به عبارت دیگر، برای یک خمینه شبه ریمانی (N, h) ،

$$(M, g) \approx (\mathbb{R} \times N, -dt^2 \oplus h)$$

در این پایان نامه تعمیم گسترده ای از مفهوم شبه کره در هندسه لورنتسی را خواهیم داشت. پایان نامه حاضر شامل پنج فصل است. در فصل اول، ابتدا پیشنیازها با بهره بردن از مراجع [۵]، [۲۹]، [۲۴] و [۲۲] داده می شود. در فصل دوم، شبه کره های تعمیم یافته در قالب حدهای آکروئال تعریف شده اند و نظم بهبود یافته ای که از آن بدست می آوریم بر مبنای ویژگی های کران های آکروئال توسعه یافته پن رز است. در فصل سوم، شبه کره های کشی و شعاعی را معرفی خواهیم کرد که شبه کره های کشی، شبه کره های استاندارد را در قالب فضازمان با سطوح کشی فشرده تعمیم می دهند. در فصل چهارم ابتدا، مشخصه های سختی و تحدب شبه کره های تعمیم یافته مورد مطالعه قرار گرفته اند سپس این نتایج برای بدست آوردن نتایج شکافتگی فضازمان هذلولوی سراسری به کار گرفته شده اند. در قضیه ۳.۲.۴ نتایج شکافتگی را برای شبه کره های تعمیم یافته به اثبات رسانده ایم. وقتی به طور تخصصی وارد شبه کره های کشی می شویم ما را به اثباتی از حدس بارتینک سوق می دهد که در ادامه و در قالب تعریف ۲.۳.۴ به شرط حداقل - حداکثری مرتبط با سطوح کشی منجر می شود. در بخش ۳.۴ مشاهده کردیم که شکافتگی در امتداد شبه کره های $S_\infty^-(S)$ صورت می گیرد. در این بخش به واسطه ای فضازمان های کامل ژئودزیکي زمان گونه همراه با سطوح کشی فشرده، نشان می دهیم که شرط حداقل - حداکثری به واسطه ای شرط S - شعاع بیان شده است مانند آنچه که در [۱۲] آمده است. در واقع شرط S - شعاع یک شرط بسیار قوی در شبه کره های کشی است و می توان آن را در فضای دسیتر (فضایی که در آن شرط S - شعاع به خطا می رود و شرط حداقل - حداکثری پا برجاست) یافت. در پایان، یک روش جایگزین برای قضیه ۳.۲.۴ در مورد شبه کره های کشی با به کارگیری قضیه شکافتگی لورنتسی مورد بررسی قرار داده ایم. این پایان نامه با استفاده از مفاهیم و روش هایی از هندسه شبه ریمانی نوشته

شده است. برای آن دسته از خواننده‌هایی که آشنایی کمتری با این مفاهیم دارند، فصل پنجم را در قالب
ضمیمه آورده‌ایم. مرجع اصلی پایان نامه [۳۷] است.

فهرست

آ	پیش‌گفتار
۱	۱ پیشنهادها
۱	۱.۱ فضاها
۵	۲.۱ خم‌های علی، گذشته‌ها و آینده‌ها
۱۱	۳.۱ منحنی‌های حدی
۱۲	۴.۱ علیت قوی و هذلولوی سراسری
۱۵	۵.۱ مجموعه‌ی آکروئال و نقاط مرزی
۱۹	۶.۱ بسط کشی، سطوح کشی، کامل بودن و تکینی‌ها
۲۹	۲ حدهای آکروئال
۳۰	۱.۲ حدهای آکروئال
۳۷	۳ کره‌ها و شبه‌کره‌ها
۳۸	۱.۳ طول و مسافت لورنتسی
۴۰	۱.۱.۳ کامل علی و کران‌داری

۴۴	۲.۱.۳	واقعیت‌های بیشتر
۴۶	۲.۳	کره‌های تعمیم یافته
۴۹	۳.۳	شبه کره‌های تعمیم یافته
۵۳	۴.۳	شبه کره‌های شعاعی و کشی
۵۳	۱.۴.۳	شبه کره‌های شعاعی
۵۶	۲.۴.۳	شبه کره‌های کشی

۵۹	۴	سختی و تحدب
۶۰	۱.۴	نابرابری انحنای متوسط ضعیف
۶۲	۲.۴	یک نتیجه شکافندگی برای شبه کره‌های تعمیم یافته
۶۵	۳.۴	کاربرد شبه کره‌های کشی
۷۰	۴.۴	خط‌ها و قضیه شکافندگی
۷۲	۵.۴	نگاهی به آینده

۷۵	۵	ضمیمه
۷۵	۱.۵	خمینه
۸۶	۲.۵	خمینه‌های شبه ریمانی
۹۳	۳.۵	التصاق
۹۴	۴.۵	ژئودزیک‌ها
۹۶	۵.۵	تانسور

۹۹	کتاب نامه
----	-----------

۱۰۴

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

۱۰۸

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

فهرست تصاویر

۱.۱	زیر فضای W از فضای $T_p M$	۳
۲.۱	فضازمان M با جهت زمانی T	۴
۳.۱	فضازمان دسیتر n - بعدی با انحنای مقطعی ثابت $-r^2$ - مجموعه $-x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = r^2$	۵
۴.۱	آینده زمان گونه (یا، علی) شامل همه نقاطی است که می توان از آن نقطه به منحنی زمان گونه (یا، غیر فضاگونه) در جهت آینده رسید. در این مثال آینده علی $J^+(r)$ در نقطه r بستر آینده زمان گونه $I^+(r)$ در نقطه r است. با این حال، مجموعه $J^+(q)$ بستر $I^+(q)$ نیست. در حالت خاص، نقطه w در بستر $I^+(q)$ قرار دارد اما در $J^+(q)$ نیست.	۹
۵.۱	مجموعه هایی به شکل $I^+(p) \cap I^-(q)$ با p و q دلخواه از فضازمان M تشکیل یک پایه ای از توپولوژی الکساندرو می دهند. این توپولوژی مانند توپولوژی عمومی روی فضازمان M دقیق نیست. توپولوژی الکساندرو با توپولوژی عمومی مطابقت دارد اگر و تنها اگر (M, g) به طور قوی علی باشد. (در مورد فضازمان به طور قوی علی به بخش چهارم رجوع شود).	۱۰

۶.۱	این منحنی در فضای مینکوفسکی به طور موضعی فضاگونه است اما، مجموعه آکروئال نیست. چون شامل زوج‌هایی از نقاط است که با منحنی زمان‌گونه به هم متصل می‌شوند.	۱۶
۷.۱	یک ابر سطح فضاگونه هموار در فضای مینکوفسکی نیازی نیست آکروئال باشد اما باید دارای لبه (در ادامه خواهیم گفت) باشد.	۱۶
۸.۱	لبه مجموعه آکروئال S	۱۷
۹.۱	لبه مجموعه آکروئال S در فضای مینکوفسکی ۲ - بعدی (در اینجا، S بسته نیست).	۱۷
	(	۱۷
۱۰.۱	مجموعه آکروئال A	۱۷
۱۱.۱	بسط کشی مجموعه آکروئال S	۲۰
۱۲.۱	حذف یک نقطه از خمینه M و تأثیر آن روی $D^+(S)$	۲۱
۱۳.۱	حذف یک نقطه از مجموعه آکروئال S و تأثیر آن روی $D^+(S)$	۲۱
۱۴.۱	اگر S یک ابر سطح فضاگونه کامل ژئودزیکی $(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$ در فضای مینکوفسکی باشد آنگاه، $D^+(S)$ به صورت $(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \leq -t \leq (x^2 + y^2 + z^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$ است.	۲۱
۱۵.۱	مجموعه بسته آکروئال S و سطح افق کشی $H^+(S)$ آن.	۲۲
۱.۲	تجزیه آکروئال	۳۱
۲.۲	حد آکروئال آینده	۳۲
۱.۵	کارت‌هایی برای $\mathbb{S}^n$	۷۸
۲.۵	جلوبری	۸۲
۳.۵	زیر خمینه نشاننده	۸۲

۴.۵ میدان برداری ۸۳

فصل اول

پیشنیازها

در فصل اول، تعاریف مقدماتی مورد نیاز در سراسر پایان نامه یادآوری می‌شود. این فصل شامل ۶ بخش است که بخش اول به مفهوم فضازمان، بخش دوم به مفهوم خم‌های علی، گذشته‌ها و آینده‌ها، بخش سوم به مفهوم منحنی‌های حدی، بخش چهارم به مفهوم علیت قوی و هذلولوی سراسری، بخش پنجم به مفهوم مجموعه‌های آکروئال، نقاط لبه و بخش ششم به مفهوم بسط کشی، سطوح کشی، فضازمان کامل و فضازمان تکین اختصاص یافته است.

۱.۱ فضازمان

در این بخش، ابتدا به تعاریف مقدماتی از فضای مینکوفسکی، خمینه‌ی لورنتسی هموار، بردار علی، جهت پذیر زمانی، فضازمان و فضازمان دسیتر از مراجع [۲۹] و [۲۲] می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱.۱. ساده ترین و مهم ترین فضازمان، فضای مینکوفسکی^۱ $\mathbb{M}^{n+1}$ است. این فضا به

صورت $\{ (tx^0, x^1, \dots, x^n) \} \approx \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^{n+1}$ همراه با ضرب داخلی

^۱ Minkowski space

$$\langle x, y \rangle = -x^0 y^0 + \sum_{i=1}^n x^i y^i$$

تعریف می شود.

مختص اولیه ی $t = x^0$ ، لحظه ای در زمان و مختصات باقی مانده $(x^1, \dots, x^n)$ ، مکانی را در فضا معین می کند.

هندسه ی لورنتسی بر پایه فضای مینکوفسکی بیان می شود همان طور که هندسه ریمانی بر پایه فضای اقلیدسی بنا می شود. در حالت خاص، تعریف زیر را داریم.

تعریف ۲.۱.۱. خمینه ی لورنتسی هموار $M = (\mathbb{M}^{n+1}, g)$ یک خمینه ی $n + 1$ - بعدی هموار با $n \geq 1$ و متریک لورنتسی هموار g است. یعنی، یک تانسور از نوع $(2, 0)$ ، متقارن، ناتبهگون و هموار با اندیس $\nu = 1$ است.

البته به طور کلی، برای یک خمینه شبه ریمانی می توانیم هر بعد و هر اندیس ثابت $0 \leq \nu \leq \dim M$ را در نظر بگیریم.

نکته ۳.۱.۱. در هر نقطه $p \in M$ از یک خمینه لورنتسی، $[e_0, e_1, \dots, e_n]$ یک پایه متعامد یکه برای فضای مماس $T_p M$ می باشد، با توجه به متریک g_p در p داریم

$$g_p(X, Y) = -X^0 Y^0 + \sum_{i=1}^n X^i Y^i \quad X, Y \in T_p M \quad \text{برای همه ی}$$

از اینرو، هر فضای مماس از خمینه لورنتسی M با یک فضای مینکوفسکی ایزومتریک است یعنی، $(T_p M, g) \approx \mathbb{M}^{n+1}$.

تعریف ۴.۱.۱. ویژگی های علی^۱ بردار $X \in TM$ به صورت زیر تعریف شده است،

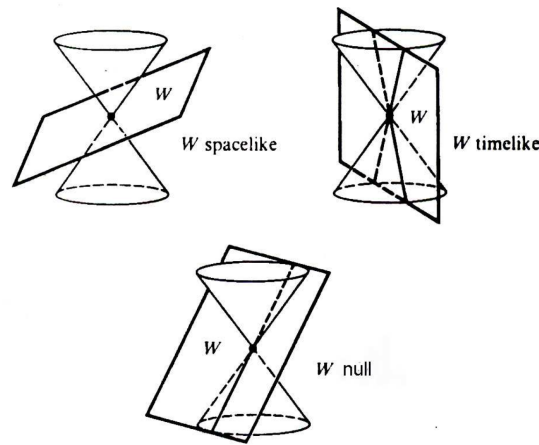
$$\bullet \quad g(X, X) < 0 \quad \text{اگر زمان گونه است}$$

$$\bullet \quad g(X, X) = 0 \quad \text{اگر پوچ است}$$

$$\bullet \quad g(X, X) > 0 \quad \text{اگر فضاگونه است}$$

• X فضاگونه است اگر $g(X, X) > 0$ گوئیم X علی است اگر زمان گونه یا پوچ باشد.

^۱ Causall



شکل ۱.۱: زیر فضای W از فضای $T_p M$.

تعریف ۵.۱.۱. ویژگی‌های علی زیر فضای W از فضای $T_p M$:

(۱) W فضاگونه است اگر $g(W, W)$ دارای اندیس ۰ باشد.

(۲) W زمان گونه است اگر $g(W, W)$ دارای اندیس ۱ باشد.

(۳) W پوچ (نور گونه) است اگر $g(W, W)$ تبهگون باشد.

(به شکل ۱.۱ توجه کنید.)

تعریف ۶.۱.۱. یک خمینه لورنتسی جهت پذیر زمانی است اگر یک میدان برداری زمان گونه سرتاسری

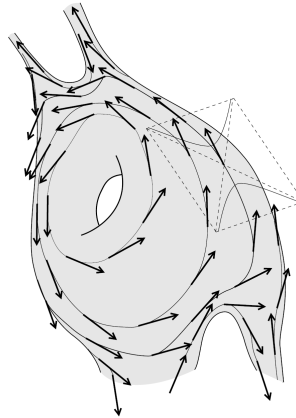
مانند T روی M وجود داشته باشد در این صورت T ، یک جهت زمانی برای خمینه لورنتسی نامیده می‌شود.

مثال ۷.۱.۱. جهت زمانی طبیعی روی $\mathbb{M}^{n+1}$ ، $\frac{\partial}{\partial t}$ است.

نکته ۸.۱.۱. در حالت کلی، یک خمینه لورنتسی دارای جهت زمانی است.

تعریف ۹.۱.۱. فضا زمان، یک خمینه لورنتسی جهت پذیر زمانی، همبند و هموار $M = (M^{n+1}, g, T)$

است. (به شکل ۲.۱، توجه کنید.)



شکل ۲.۱: فضا زمان M با جهت زمانی T

نتیجه ۱.۱۰.۱.۱. خمینه لورنتسی n - بعدی، همبند، ساده، کامل با انحنای ثابت C ایزومتريک است

به

$$S^n(r) \text{ کره لورنتسی} \quad C = 1/r^2, n \geq 3 \text{ اگر}$$

$$\tilde{S}^2(r) \quad C = 1/r^2, n = 2 \text{ اگر}$$

$$\mathbb{R}_1^n \text{ فضای مینکوفسکی} \quad C = 0 \text{ اگر}$$

$$\tilde{H}_1^n(r) \quad C = -1/r^2 \text{ اگر}$$

در نظریه نسبیت $S_1^n(r)$ فضا زمان دسیت^۱ نامیده می شود. و $\tilde{H}_1^n(r)$ فضا زمان ضد دسیت^۲ نامیده می شود.

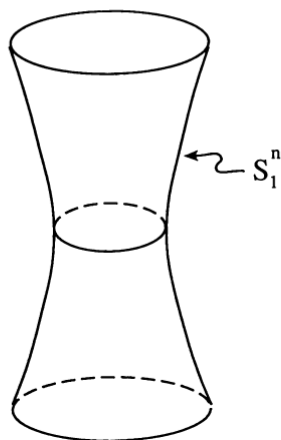
تعریف ۱.۱.۱.۱. فرض کنید S_1^n و H_1^n به صورت زیر تعریف شده باشند.

$$S_1^n = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} : -x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = r^2\},$$

$$H_1^n = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} : -x_1^2 - x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = -r^2\}.$$

^۱ De Sitter spacetime

^۲ Anti- de Sitter spacetime



شکل ۳.۱: فضا زمان دسیتر n - بعدی با انحنای مقطعی ثابت $-r^2$ مجموعه $-x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = r^2$ در فضا زمان مینکوفسکی $\mathbb{R}^{n+1}$ است.

آنگاه S^n فضا زمان دسیتر نامیده می‌شود (شکل ۳.۱)، و پوشش عام $\tilde{H}^n$ از H^n فضا زمان ضد دسیتر (عام) نامیده می‌شود.

۲.۱ خم‌های علی، گذشته‌ها و آینده‌ها

در این بخش، به یادآوری مفاهیم جهت زمانی بردار علی (در جهت آینده و گذشته)، خم هموار زمان گونه، خم زمان گونه (پوچ، علی، فضا گونه) در جهت آینده (گذشته)، خم هموار علی گسترش ناپذیر در جهت گذشته و آینده، همسایگی‌های محدب فضا زمان، تریپ^۱، تریپ علی^۲، آینده و گذشته زمان گونه (گاه‌شمار)، آینده و گذشته علی از مراجع [۲۴] [۲۹] می‌پردازیم.

تعریف ۱.۲.۱. جهت زمانی T روی فضا زمان M به صورت در جهت آینده تفسیر شده است و تعیین جهت زمانی بردار علی X به صورت زیر است

^۱ Trip

^۲ Causal trip

در جهت آینده است اگر $g(T, X) < 0$,

در جهت گذشته است اگر $g(T, X) > 0$,

تعریف ۲.۲.۱. گوییم خم هموار α زمان گونه است، (به ترتیب پوچ، علی، فضاگونه) هرگاه میدان برداری مماس α' آن در همه جا زمان گونه (به ترتیب پوچ، علی، فضاگونه) باشد.

تعریف ۳.۲.۱. خم تکه‌ای هموار $\alpha : I \rightarrow M$ را که، مماس‌های آن شامل مماس‌های یک طرفه در هر نقطه شکسته یا نقطه پایانی است یک خم زمان گونه (به ترتیب پوچ، علی، فضاگونه) در جهت آینده (گذشته) می‌باشد.

ملاحظه ۴.۲.۱. به وضوح، α در جهت آینده است اگر و تنها اگر $-\alpha$ در جهت گذشته باشد. برای مثال، خم علی α را اغلب بدون در نظر گرفتن جهت زمانی آن در نظر می‌گیریم.

تعریف ۵.۲.۱. خم (علی) در جهت آینده $\alpha : (c, d) \rightarrow M$ ، که $-\infty \leq c < d \leq \infty$ ، گسترش ناپذیر آینده است اگر $\lim_{t \rightarrow d^-} \alpha(t)$ وجود نداشته باشد. و گسترش ناپذیر گذشته است اگر $\lim_{t \rightarrow c^+} \alpha(t)$ وجود نداشته باشد.

نکته ۶.۲.۱. یک خم علی، گسترش ناپذیر است اگر گسترش ناپذیر گذشته و آینده باشد.

نکته ۷.۲.۱. هر خمینه شبه ریمانی، و از این رو هر فضازمان M دارای یک التصاق سازگار با متریک، بدون تاب منحصر به فرد، ∇ ، است که التصاق لوی چیهویتا نامیده می‌شود (به بخش سوم فصل پنجم رجوع شود).

نکته ۸.۲.۱. یک شبه ژئودزیک روی یک خمینه، خمی است که دارای یک ژئودزیک تغییر پارامتر یافته است. ژئودزیک‌ها در فضای مینکوفسکی، $\mathbb{M}^{n+1}$ ، پاره‌خط‌های راست هستند و اینکه هر ژئودزیک در یک فضازمان زمان گونه (پوچ یا فضاگونه)، از تعریف و سازگاری با متریک نتیجه می‌شود (به بخش چهارم فصل پنجم رجوع شود).

تذکر ۹.۲.۱. زیر مجموعه U از یک فضای برداری محدب است هر گاه، برای هر دو نقطه $v, w \in U$ ،

پاره‌خط (منحصر به فرد) $\overline{vw}$ کاملاً در U قرار بگیرد. به طور مشابه با فرض هر خمینه شبه ریمانی M ، گوییم زیر مجموعه $U \subset M$ محدب است هر گاه هر دو نقطه $p, q \in U$ به وسیله‌ی یک قطعه ژئودزیک منحصر به فرد به هم متصل شده باشد و کاملاً در U قرار بگیرد، در این حالت این قطعه را به صورت $\overline{pq}$ می‌نویسیم. هر خمینه شبه‌ریمانی و از این رو هر فضا‌زمان دارای همسایگی‌های محدب به دلخواه کوچک اطراف هر نقطه خود هستند. توجه کنید $\mathbb{M}^{n+1}$ به عنوان حالتی از خمینه شبه‌ریمانی، محدب است. طول یک قطعه خم علی، $\alpha: [a, b] \rightarrow M$ ، که α هموار تکه‌ای با تکه‌های $L(\alpha) = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\alpha'| dt$ بیان می‌شود و $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ می‌باشد که در آن g یک تانسور متریک ریمانی است و اگر خم زمان‌گونه باشد علامت در ریشه مربع منفی و اگر فضاگونه باشد علامت در ریشه مربع مثبت است. نتیجه زیر اساسی برای نظریه علی است و در حالت خاص، گوییم ژئودزیک‌های علی به طور موضعی حداکثر طول را دارند.

گزاره ۱۰.۲.۱. فرض کنید $U \subset M$ یک همسایگی محدب باشد.

(۱) اگر یک خم زمان‌گونه (یا، علی) از p تا q در U وجود داشته باشد، آنگاه $\overline{pq}$ زمان‌گونه (یا، علی) است.

(۲) اگر $\overline{pq}$ زمان‌گونه باشد، آنگاه برای هر قطعه منحنی علی متصل از p تا q در U ، $L(\overline{pq}) \geq L(\alpha)$ و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر α یک تغییر پارامتر یافته از $\overline{pq}$ باشد.

تعریف ۱۱.۲.۱. (trip) ژئودزیک زمان‌گونه در جهت آینده تکه‌ای است.

تعریف ۱۲.۲.۱. یک ژئودزیک زمان‌گونه در جهت آینده تکه‌ای از p به q ، خمی با نقطه پایان گذشته p و نقطه پایان آینده q است.

تعریف ۱۳.۲.۱. (trip causal) ژئودزیک علی تبهگون در جهت آینده تکه‌ای است.

تعریف ۱۴.۲.۱. یک ژئودزیک علی تبهگون در جهت آینده تکه‌ای از p به q ، خمی با نقطه پایان گذشته

p و نقطه پایان آینده q است.

تذکر ۱۵.۲.۱. خم‌های تعریف شده در ۱۲.۲.۱ و ۱۴.۲.۱ لازم است که شامل نقاط پایان خود باشند.

تعریف ۱۶.۲.۱. دو اصل اساسی روی فضازمان M ، به صورت زیر تعریف می‌شود.

برای $p, q \in M$ ، داریم:

• اگر قطعه منحنی زمان‌گونه در جهت آینده از p تا q وجود داشته باشد را با نماد $p \ll q$ نمایش

می‌دهیم.

• اگر قطعه منحنی علی در جهت آینده از p تا q وجود داشته باشد را با نماد $p \leq q$ نمایش می‌دهیم.

تبصره ۱۷.۲.۱. برای همه p های متعلق به فضازمان M ، $p \leq p$ ، است چون ژئودزیک‌های علی

تبهگون خوش تعریف هستند. از طرفی دیگر، $p \ll p$ دلالت بر وجود یک خم زمان‌گونه بسته در M

دارد، که نقاط پایان آینده و گذشته این خم یکسان است. (برای مثال، فضای مینکوفسکی خم زمان‌گونه

بسته ندارد) یک خم زمان‌گونه علی ناتبهگون بسته دلالت بر وجود نقاط مجزای p و q دارد به طوری

که $p \leq q$ و $q \leq p$ باشد.

تعریف ۱۸.۲.۱. آینده و گذشته زمان‌گونه (گاه‌شمار)^۱ نقطه $p \in M$ را به ترتیب، به صورت زیر

تعریف می‌کنیم

$$I^+(p) = \{q \in M : p \ll q\}$$

$$I^-(p) = \{q \in M : q \ll p\}$$

و نیز آینده و گذشته علی نقطه $p \in M$ ، به ترتیب، به صورت

$$J^+(p) = \{q \in M : p \leq q\}$$

$$J^-(p) = \{q \in M : q \leq p\}$$

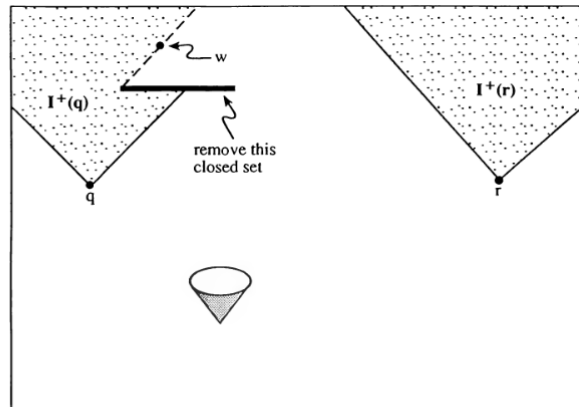
و برای زیر مجموعه کلی $S \subset M$ ، تعریف می‌کنیم

^۱ Chronological

$$I^{\pm}(S) = \bigcup_{p \in S} I^{\pm}(p),$$

$$J^{\pm}(S) = \bigcup_{p \in S} J^{\pm}(p)$$

به شکل ۴.۱، توجه کنید.



شکل ۴.۱: آینده زمان‌گونه (یا، علی) شامل همه نقاطی است که می‌توان از آن نقطه به منحنی زمان‌گونه (یا، غیر فضاگونه) در جهت آینده رسید. در این مثال آینده علی $J^+(r)$ در نقطه r بستار آینده زمان‌گونه $I^+(r)$ در نقطه r است. با این حال، مجموعه $J^+(q)$ بستار $I^+(q)$ نیست. در حالت خاص، نقطه w در بستار $I^+(q)$ قرار دارد اما در $J^+(q)$ نیست.

گزاره ۱۹.۲.۱. اگر $q \in J^+(p) \setminus I^+(p)$ ، آنگاه هر منحنی علی از p تا q یک پیش ژئودریک^۱ تهی است.

نتیجه ۲۰.۲.۱. رابطه $\ll$ و $\leq$ متعدی هستند. به علاوه، اگر $p \ll q \leq r$ یا $p \leq q \ll r$ ، آنگاه $p \ll r$ است.

نکته ۲۱.۲.۱. فرض مجموعه $U \subset M$ یک مجموعه باز باشد و $p \in U$ ، $I^+(p, U)$ را مجموعه‌ای از نقاط $q \in U$ تعریف می‌کنیم به طوری که منحنی زمان‌گونه در جهت آینده α از p تا q در داخل U

^۱ Pregeodesic

وجود داشته باشد. به عبارت دیگر، $I^+(p, U)$ آینده زمان گونه p در زیر خمینه لورنتسی باز $U \subset M$ است. $I^-(p, U)$ و $J^\pm(p, U)$ نیز به صورت مشابه تعریف می شوند.

گزاره ۲۲.۲.۱. برای هر همسایگی محدب U از p ، داریم:

(۱) $I^\pm(p, U)$ در U باز است و از این رو در M نیز باز است.

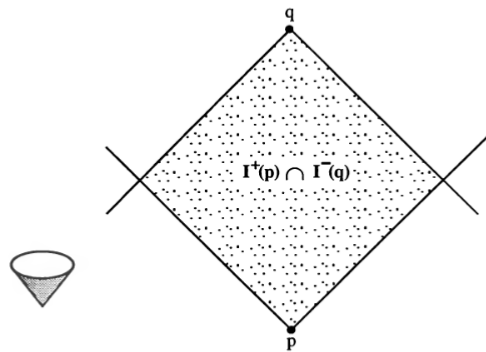
(۲) $J^\pm(p, U)$ بستار $I^\pm(p, U)$ در U است.

همچنین برای هر زیر مجموعه $S \subset M$ داریم:

(۳) $\text{int} J^\pm(S) = I^\pm(S)$ در حالت خاص، $I^\pm(S)$ باز است.

(۴) $\partial J^\pm(S) = \partial I^\pm(S)$ از این رو، $J^\pm(S) \subset \overline{I^\pm(S)}$ است با برابری اینکه اگر و تنها اگر $J^\pm(S)$

بسته باشد.



شکل ۵.۱: مجموعه‌هایی به شکل $I^+(p) \cap I^-(q)$ با p و q دلخواه از فضازمان M تشکیل یک پایه‌ای از توپولوژی الکساندرو می‌دهند. این توپولوژی مانند توپولوژی عمومی روی فضازمان M دقیق نیست. توپولوژی الکساندرو با توپولوژی عمومی مطابقت دارد اگر و تنها اگر (M, g) به طور قوی علی باشد. (در مورد فضازمان به طور قوی علی به بخش چهارم رجوع شود.)

نکته ۲۳.۲.۱. برای هر $p, q \in M$ ، $I^+(p) \cap I^-(q)$ را به عنوان لوزی زمان گونه^۱ می‌شناسیم، و

^۱ Timelike diamond

$J^+(p) \cap J^-(q)$ را به عنوان **لوزی علی** در نظر می‌گیریم. توجه کنید که لوزی‌های زمان‌گونه همیشه باز هستند. به شکل ۵.۱ توجه کنید.

نکته ۲۴.۲.۱. در یک خمینه لورنتسی خم‌های علی بردارهای سرعتی هستند که فضاگونه نیستند.

۳.۱ منحنی‌های حدی

در این بخش، تعاریف حد بسته هاسدورف، خم هموار علی در جهت آینده، لم منحنی حدی و چند گزاره را از مراجع [۵]، [۲۹] بیان می‌کنیم.

مفهوم منحنی حدی مربوط به حد بسته هاسدورف می‌شود. فرض کنید $\{A_n\}$ یک دنباله دلخواه از زیر مجموعه‌های (نه لزوماً منحنی‌ها) M باشد. حدهای بالا و پایین هاسدورف $\{A_n\}$ به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\limsup \{A_n\} = \{p \in M : p \text{ از تعداد نامتناهی از مجموعه‌های } A_n \text{ را قطع می‌کند} : p \in M\}$$

$$\liminf \{A_n\} = \{p \in M : p \text{ تعداد متناهی از مجموعه‌های } A_n \text{ را قطع می‌کند} : p \in M\}$$

حدهای بالا و پایین هاسدورف اگرچه ممکن است تهی باشند اما همیشه وجود دارند. بعلاوه، این حدها زیر مجموعه‌های بسته‌ای از M هستند و شمول $\liminf \{A_n\} \subseteq \limsup \{A_n\}$ وجود دارد. اگر دو حد برابر باشند، آنگاه **حد بسته هاسدورف** $\{A_n\}$ ، که به وسیله $\lim \{A_n\}$ نمایش داده می‌شود، به صورت $\lim \{A_n\} = \liminf \{A_n\} = \limsup \{A_n\}$ تعریف می‌شود.

تعریف ۱.۳.۱. خم هموار $\alpha : I \rightarrow M$ **علی در جهت آینده** گفته می‌شود هر گاه برای همه $t_0 \in I$ ، بازه همسایگی باز $I_0 \subset I$ و همسایگی نرمال محدب نقطه $\alpha(t_0)$ ، که $\alpha(I_0) \subset U_0$ است وجود داشته باشد به طوری که، برای همه $[t_1, t_2] \in I_0$ ، $\alpha(t_2) \in I^+(\alpha(t_1), U_0)$.

لم منحنی حدی ابزاری پایه‌ای در نظریه علی است. در زیر لم منحنی حدی را بیان می‌کنیم. توجه کنید که هر خمینه هموار دارای یک متریک ریمانی کامل است.

لم ۲.۳.۱. (لم منحنی حدی). متریک ریمانی کامل h روی M را ثابت در نظر بگیرید. فرض

کنید $M \rightarrow (\circ, \infty) : \alpha_k$ دنباله‌ای از منحنی‌های علی گسترش ناپذیر آینده باشد که با توجه به طول قوس محاسبه شده توسط h پارامتر بندی شده است. اگر p یک نقطه حدی برای دنباله نقاط ابتدایی $\{\alpha_k(\circ)\}$ باشد آنگاه، منحنی علی هموار گسترش ناپذیر در جهت آینده $M \rightarrow (\circ, \infty) : \alpha$ با شروع از $\alpha(\circ) = p$ ، وزیر دنباله $\{\alpha_{k_j}\}$ موضعاً به طور یکنواخت همگرا به α وجود دارد، یعنی، روی هر بازه پارامتری فشرده $[\circ, T] : M \rightarrow [\circ, T] : \alpha_{k_j}$ به طور یکنواخت همگرا به $M \rightarrow [\circ, T] : \alpha$ است. (توجه کنید، در حالت کلی α با توجه به طول قوس h پارامتری نیست.)

همچنین در حالت زیر، به این واقعیت که تابع طول قوس (لورنتسی)، (که به منحنی علی هموار گسترش می‌یابد) نیم پیوسته بالایی است احتیاج داریم.

گزاره ۳.۳.۱. اگر دنباله منحنی‌های علی $M \rightarrow [a, b] : \alpha_k$ به طور یکنواخت همگرا

به $M \rightarrow [a, b] : \alpha$ باشند، آنگاه $L(\alpha) \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} L(\alpha_k)$ خواهد بود.

لم منحنی حدی ممکن است برای اثبات نتیجه زیر از گزاره ۱۹.۲.۱ به کار آید.

گزاره ۴.۳.۱. فرض کنید $S \subset M$ بسته باشد، آنگاه هر $x \in \partial I^+(S) \setminus S$ روی یک ژئودزیک پوچ مشمول در $\partial I^+(S)$ قرار دارد که دارای نقطه پایانی گذشته S است یا گسترش ناپذیر گذشته روی M می‌باشد.

۴.۱ علیت قوی و هذلولوی سراسری

در این بخش، تعاریف فضا زمان علی (یا، زمان گونه)، فضا زمان به طور قوی علی، تحدب علی، علیت قوی، منحنی علی ماکسیمال، فضا زمان هذلولوی سراسری و چند لم و گزاره را از مراجع [۵]، [۲۹] ذکر می‌کنیم.

تعریف ۱.۴.۱. فضا زمان M علی (یا، زمان گونه) گفته می‌شود هرگاه دارای منحنی‌های علی (یا، زمان گونه) بسته غیر بدیهی نباشد. در نتیجه، M علی است اگر و تنها اگر $(M, \leq)$ مجموعه جزئاً مرتب

باشد. (در رابطه ترتیب جزئی^۱ از علامت $\leq$ استفاده می‌شود. این رابطه دارای خواص انعکاسی، پاد تقارنی و تعدی است.)

تعریف ۲.۴.۱. فضازمان M به طور قوی علی گفته می‌شود هرگاه دارای منحنی‌های علی تقریباً بسته نباشد. این تعریف با استفاده از مفهوم دقیق تحدب علی^۲ بدست آمده است. گوییم زیر مجموعه (دلخواه) $V \subset M$ علی محدب است هرگاه هر منحنی علی با نقاط پایان در V ، کاملاً در V قرار بگیرد. به طور معادل، $V \subset M$ علی محدب است هرگاه هر منحنی علی V را در مجموعه‌های غیر همبند قطع نکند.

این مطلب به راحتی برای اصلاح انواع لوزی‌ها نیز قابل بیان است:

لم ۳.۴.۱. زیر مجموعه (دلخواه) $V \in M$ علی محدب است اگر و تنها اگر شامل همه لوزی‌هایش باشد، به عبارت دیگر، اگر و تنها اگر $J^+(p) \cap J^-(q) \subset V$ هرگاه $p, q \in V$ باشد.

نکته ۴.۴.۱. تحدب علی اغلب تنها برای همسایگی‌های باز تعریف شده است. توجه کنید که هر لوزی (زمان‌گونه یا علی) محدود است.

گوییم **علیت قوی**^۳ در نقطه $p \in M$ برقرار است هرگاه p دارای همسایگی‌های باز علی محدب به دلخواه کوچک باشد. اگر برای هر نقطه $P \in M$ علیت قوی برقرار باشد، فضازمان M را به طور قوی علی گوییم. زیر مجموعه $H \subset M$ به طور قوی علی است هرگاه علیت قوی در هر نقطه $p \in H$ برقرار باشد. به لم زیر توجه کنید:

لم ۵.۴.۱. (لم/اسکاپ^۴). اگر $K \subset M$ فشرده و به طور قوی علی باشد، آنگاه هر منحنی گسترش

^۱ Partially order

^۲ Causal convexity

^۳ Strong causality

^۴ Escape Lemma

ناپذیر آینده (یا، گسترش ناپذیر گذشته) باید خارج از مجموعه K قرار گرفته و هرگز مشمول این مجموعه نشود.

تعریف ۶.۴.۱. گوییم منحنی علی α از p تا q ماکسیمال است اگر برای همه منحنی های علی β متصل از p تا q $L(\alpha) \geq L(\beta)$ باشد.

نکته ۷.۴.۱. علیت قوی مربوط به قطعه های ژئودزیک ماکسیمال است.

لم ۸.۴.۱. فرض کنید $p \leq q$ و $J^+(p) \cap J^-(q)$ به طور قوی علی و فشرده باشد. آنگاه ژئودزیک علی ماکسیمال متصل از p تا q وجود دارد.

انگیزه استفاده از لم ۸.۴.۱ ما را به شناخت دسته مهمی از فضازمان ها سوق می دهد.

تعریف ۹.۴.۱. فضازمان M هذلولوی سراسری^۱ گفته می شود هرگاه به طور قوی علی و دارای لوزی های علی فشرده $J^+(p) \cap J^-(q)$ باشد.

از این رو، با استفاده از لم ۸.۴.۱، هر دو نقطه مرتبط علی در فضازمان هذلولوی سراسری به وسیله ی قطعه ژئودزیک علی ماکسیمال به هم متصل شده اند.

گوییم زیر مجموعه $H \subset M$ هذلولوی سراسری است هرگاه به طور قوی علی باشد و برای همه $p, q \in H$ ، لوزی علی $J^+(p) \cap J^-(q)$ فشرده و مشمول در H باشد. از این رو، از آنجایی که هر زیر مجموعه دلخواهی، هذلولوی سراسری نیست داریم:

لم ۱۰.۴.۱. اگر $H \subset M$ هذلولوی سراسری و $V \subset H$ علی محدب باشد آنگاه V هذلولوی سراسری است.

هذلولوی سراسری دارای نتایج بسیار مهمی است. به گزاره زیر توجه کنید:

گزاره ۱۱.۴.۱. فرض کنید M هذلولوی سراسری و $A, B \subset M$ فشرده باشند.

^۱ Globally hyperbolic

(۱) $J^+(A)$ بسته است. در حالت خاص، $J^\pm(A) = \overline{I^\pm(A)}$.

(۲) $J^+(A) \cap J^-(B)$ فشرده است.

لم ۱۲.۴.۱. اگر M هذلولوی سراسری باشد، رابطه $p \leq q$ روی M بسته است. یعنی، اگر $p_k \rightarrow p$

و $q_k \rightarrow q$ همگرا باشد و برای همه k ها، $p_k \leq q_k$ ، آنگاه $p \leq q$.

نکته ۱۳.۴.۱. فضازمان هذلولوی سراسری می‌تواند با استفاده از سطوح کشی مشخص شود. سطح کشی S زیر مجموعه‌ای از M است که هر منحنی غیر فضاگونه گسترش ناپذیر دقیقاً یک بار آن را قطع می‌کند. این نشان می‌دهد که فضازمان M هذلولوی سراسری است اگر و تنها اگر یک سطح کشی داشته باشد.

نکته ۱۴.۴.۱. زیر مجموعه H از M هذلولوی سراسری است در صورتی که

(۱) شرط علیت قوی روی H برقرار باشد، و

(۲) اگر $p, q \in H$ در ازای $p < q$ ، آنگاه $J(p, q)$ فشرده و مشمول در H است.

۵.۱ مجموعه‌ی آکروئال و نقاط مرزی

در این بخش به تعاریف مفهوم مجموعه‌ی آکروئال، مجموعه‌ی غیر علی، لبه مجموعه‌ی آکروئال

و بیان گزاره و نتیجه‌ای از آن از مرجع [۲۹] و [۲۴] می‌پردازیم.

آکروئال بودن نقش اساسی در نظریه‌ای که در ادامه خواهیم گفت دارد.

تعریف ۱.۵.۱. گوئیم مجموعه $A \subset M$ آکروئال (غیر علی) است هرگاه هیچ دو نقطه‌ای از A را

نتوان به وسیله‌ی یک منحنی زمان‌گونه (علی) به هم متصل کرد. (به عبارت دیگر، زیر مجموعه A از

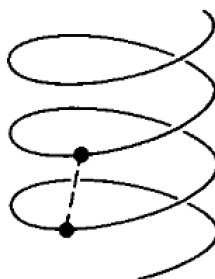
M آکروئال (غیر علی) گوئیم هر گاه برای $p, q \in A$ رابطه $p \ll q$ هرگز برقرار نباشد؛ و این به شرطی

است که، منحنی زمان‌گونه (علی) A را در بیشتر از یک نقطه قطع نکند. (

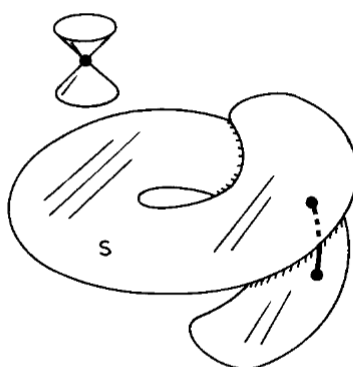
مثال ۲.۵.۱. خط ژئودزیک تهی در فضای مینکوفسکی آکروئال است اما غیر علی نیست.

مثال ۳.۵.۱. هر زیر مجموعه از یک مجموعه آکروئال یک مجموعه آکروئال است. در $\mathbb{R}^n$ ابر صفحه

ثابت t آکروئال است.



شکل ۶.۱: این منحنی در فضای مینکوفسکی به طور موضعی فضاگونه است اما، مجموعه آکروئال نیست. چون شامل زوج‌هایی از نقاط است که با منحنی زمان‌گونه به هم متصل می‌شوند.

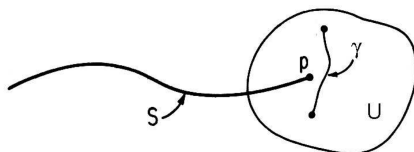
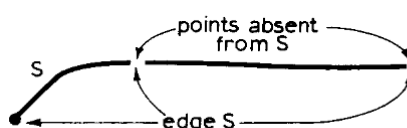


شکل ۷.۱: یک ابر سطح فضاگونه هموار در فضای مینکوفسکی نیازی نیست آکروئال باشد اما باید دارای لبه (در ادامه خواهیم گفت) باشد.

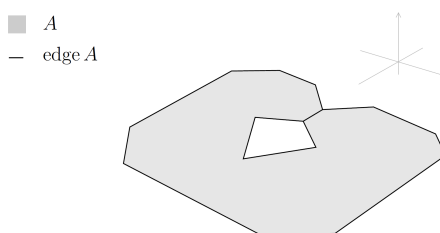
تعریف ۴.۵.۱. فرض کنید $A \subset M$ یک مجموعه آکروئال باشد. نقطه $p \in \bar{A}$ در لبه A ^۱ است، هرگاه هر همسایگی U از p شامل یک منحنی زمان‌گونه از $I^-(p, U)$ به $I^+(p, U)$ باشد که A را قطع نکند.

تذکر ۵.۵.۱. توجه کنید یک مجموعه آکروئال شامل تمام نقاط مرزی توپولوژیکی (در توپولوژی

^۱ Edge

شکل ۸.۱: لبه مجموعه آکروئال S شکل ۹.۱: لبه مجموعه آکروئال S در فضای مینکوفسکی ۲ - بعدی (در اینجا، S بسته نیست.)

خمینه) است. با این حال، لبه یک مجموعه آکروئال نوعی مرز است.

شکل ۱۰.۱: مجموعه آکروئال A

لم ۶.۵.۱. اگر A یک مجموعه آکروئال باشد (شکل ۱۰.۱)، آنگاه $\bar{A} = A \cup \text{edge } A$.

نتیجه زیر در مورد آکروئال بودن بسیار مهم خواهد بود:

گزاره ۷.۵.۱. اگر $\emptyset \neq A \subset M$ آکروئال باشد، آنگاه A یک ابر سطح C° است اگر و تنها اگر

$A \cap \text{edge } A = \emptyset$. در حالت خاص، هر مجموعه آکروئال بدون لبه یک ابر سطح C° بسته است.

به علاوه، با استفاده از گزاره ۴.۳.۱ خاصیت زیر را داریم:

نتیجه ۸.۵.۱. فرض کنید $S \subset M$ بسته و آکروئال باشد. آنگاه هر $x \in \partial I^+(S) \setminus S$ روی یک ژئودزیک شامل در $\partial I^+(S)$ که یا دارای نقطه پایانی گذشته روی لبه S می باشد و یا اینکه گسترش ناپذیر گذشته در M باشد قرار دارد.

اثبات. $x \in \partial I^+(S)$ را ثابت در نظر بگیرید، با استفاده از گزاره ۴.۳.۱، می توان فرض کرد که x نقطه پایانی آینده ژئودزیک پوچ $\eta : [0, 1] \rightarrow \partial I^+(S)$ ، با $\eta(1) = x$ و $\eta(0) = s \in S$ است. به علاوه، می توان فرض کرد η بلافاصله از S خارج می شود، به عبارت دیگر یعنی، $\eta \cap S = \{\eta(0)\} = \{s\}$. نشان می دهیم $s \in \text{edge} S$. به برهان خلف فرض کنید که، وجود دارد یک همسایگی U از s به طوری که هر منحنی زمان گونه در U از $I^-(s, U)$ به $I^+(s, U)$ را قطع کند. فرض کنید $p \in I^-(s, U)$ و $q \in I^+(s, U)$. آنگاه $I^+(p, U) \cap I^-(q, U)$ یک همسایگی باز از s است و از این رو برای $\varepsilon > 0$ ، $\eta(\varepsilon)$ را قطع می کند. بنابراین، منحنی زمان گونه α^- در U از p به $\eta(\varepsilon)$ و منحنی زمان گونه α^+ در U از $\eta(\varepsilon)$ به q وجود دارد. با الحاق α^- و α^+ ، $\alpha = \alpha^- + \alpha^+$ منحنی زمان گونه از $p \in I^-(s, U)$ به $q \in I^+(s, U)$ در U است، و از این رو باید S را قطع کند، به عبارت دیگر، α^+ یا α^- باید S را قطع کند. فرض کنید α^+ ، S را قطع کند. آنگاه از آنجایی که $\eta(\varepsilon) \notin S$ ، داریم $\eta(\varepsilon) \in \alpha^+ \setminus \{\eta(\varepsilon)\}$ در نقطه $s', s' \in S$ را قطع می کند. اما سپس، داریم $s' < \eta(\varepsilon) \leq s$ ، و از این رو با استفاده از نتیجه ۲۰.۲.۱، که ناقض آکروئال بودن S است داریم $s' < s$. از این رو α ، S را قطع می کند، در حالت خاص، $\alpha^- \setminus \{\eta(\varepsilon)\}$ ، S را قطع می کند. اما این نتیجه می دهد که $\eta(\varepsilon) \in I^+(S)$ است، و از این رو $x \in I^+(S)$ ، و این در تناقض با $x \in \partial I^+(S)$ است. از این رو $s \in \text{edge} S$. $\square$

نکته ۹.۵.۱. یک ابر سطح هموار با بردار نرمال زمان گونه یک ابر سطح فضاگونه در مفهوم ذکر شده در تعریف ۲.۱.۴ است.

۶.۱ بسط کشی، سطوح کشی، کامل بودن و تکینی‌ها

در این بخش، ابتدا به تعاریف بسط کشی و سطوح کشی برای مجموعه $S \subset M$ و بیان چند گزاره و نتیجه می‌پردازیم سپس، قضیه‌ای اساسی مربوط به بسط کشی و شرط هذلولوی سراسری را بیان می‌کنیم و در نهایت، تعاریفی از فضا زمان به طور ژئودزیکی کامل، شعاع (خط شعاعی)، $S -$ شعاع، هم-شعاع، تابع بوسمان، تابع پیش بوسمان و مجموعه سطوح تابع بوسمان را بیان کرده و به طور مختصر در مورد فضا زمان کامل و فضا زمان تکین بحث خواهیم کرد. مطالب این بخش با بهره گیری از مراجع [۵]، [۱۲]، [۲۹] گردآوری شده است.

تعریف ۱.۶.۱. آینده و گذشته علی مجموعه $S \subset M$ را، به صورت $J^+(S)$ و $J^-(S)$ می‌نویسیم که، دامنه‌های نفوذ آینده و گذشته S نامیده می‌شوند و به ترتیب، به صورت زیر است:

$$J^+(S) = \left\{ q \in M : \text{هر منحنی علی در جهت گذشته گذرنده از } S, q \text{ را قطع می‌کند} \right\}$$

$$J^-(S) = \left\{ p \in M : \text{هر منحنی علی در جهت آینده گذرنده از } S, p \text{ را قطع می‌کند} \right\}$$

دامنه نفوذ (کلی) S را به صورت $J(S) = J^+(S) \cup J^-(S)$ تعریف می‌کنیم. (به طور مشابه، فرض می‌کنیم $I(S) = I^+(S) \cup I^-(S)$)

تعریف ۲.۶.۱. برای مجموعه $S \subset M$ که آکروئال است، دامنه‌های وابستگی آینده و گذشته S را، به ترتیب، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$D^+(S) = \left\{ q \in M : \text{هر منحنی علی گسترش ناپذیر گذشته گذرنده از } S, q \text{ را قطع می‌کند} \right\}$$

$$D^-(S) = \left\{ p \in M : \text{هر منحنی علی گسترش ناپذیر آینده گذرنده از } S, p \text{ را قطع می‌کند} \right\}$$

دامنه وابستگی (کلی) S به صورت $D(S) = D^+(S) \cup D^-(S)$ است.

تعریف ۳.۶.۱. سطح افق کشی آینده و گذشته S به ترتیب، به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$H^+(S) = \overline{D^+(S)} \setminus I^-(D^+(S))$$

$$H^-(S) = \overline{D^-(S)} \setminus I^+(D^-(S))$$

سطح افق کشی (کلی) S به صورت $H(S) = H^+(S) \cup H^-(S)$ تعریف می‌شود.

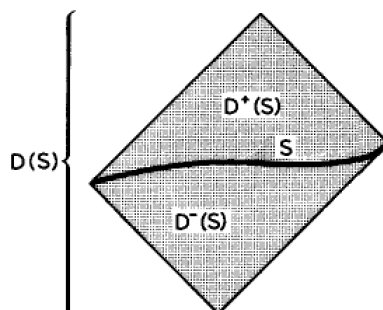
تعریف ۴.۶.۱. سطح کشی S زیر مجموعه‌ای از فضا زمان M است که هر منحنی غیر فضاگونه گسترش ناپذیر دقیقاً یک بار آن را قطع می‌کند.

نکته ۵.۶.۱. کلمه بسط کشی اغلب به جای دامنه‌ی وابستگی به کار برده می‌شود. از این رو، برای

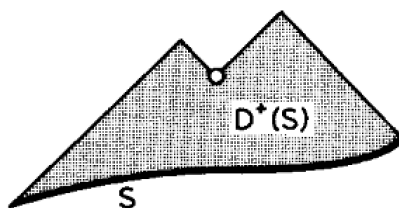
مثال، $D^+(S)$ نیز بسط کشی آینده S نامیده می‌شود. و، $D(S)$ بسط کشی (کلی) S است.

بسط کشی آینده $D^+(S)$ از S شامل همه نقاط $p \in M$ است به طوری که هر منحنی غیرفضاگونه گسترش ناپذیر گذشته گذرنده از p ، زیر مجموعه بسته S از M را از وسط قطع کند.

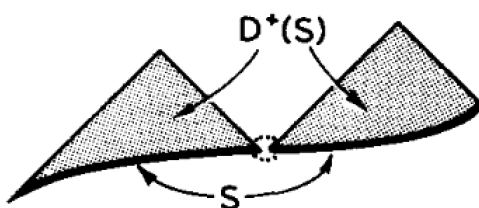
برای درک بهتر از مفاهیم سطح کشی و بسط کشی مجموعه آکروئال S ، به شکل‌های ۱۱.۱، ۱۲.۱، ۱۳.۱، ۱۴.۱ و ۱۵.۱ توجه کنید.



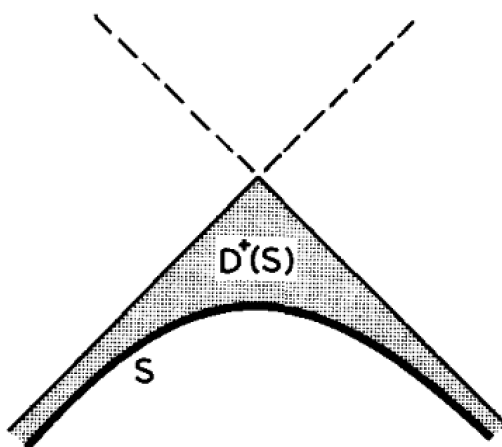
شکل ۱۱.۱: بسط کشی مجموعه آکروئال S



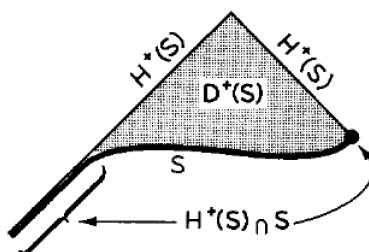
شکل ۱۲.۱: حذف یک نقطه از خمینه M و تأثیر آن روی $D^+(S)$



شکل ۱۳.۱: حذف یک نقطه از مجموعه آکروئال S و تأثیر آن روی $D^+(S)$



شکل ۱۴.۱: اگر S یک ابرسطح فضاگونه کامل ژئودزیکی $t = -(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$ در فضای مینکوفسکی باشد آنگاه، $D^+(S)$ به صورت $(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \leq -t \leq (x^2 + y^2 + z^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$ است.



شکل ۱۵.۱: مجموعه بسته آکروئال S و سطح افق کشی $H^+(S)$ آن.

گزاره ۶.۶.۱. فرض کنید $S \subset M$ آکروئال باشد،

$$(۱) \quad S \subset D^\pm(S) \subset S \cup I^+(S) \subset J^\pm(S).$$

(۲) $H^\pm(S)$ آکروئال است.

(۳) $\text{edge} H^\pm(S) \subset \text{edge} S$ ، با برابری اینکه اگر و تنها اگر S بسته باشد.

$$(۴) \quad H^\pm(S) \setminus \text{edge} S \subset J^\pm(S).$$

$$(۵) \quad \partial D^\pm(S) = S \cup H^\pm(S) \text{ و } \partial D(S) = H(S).$$

به عنوان یک نتیجه از گزاره‌های ۷.۵.۱ و ۶.۶.۱، داریم:

نتیجه ۷.۶.۱. اگر $S \subset M$ آکروئال باشد، آنگاه $H^\pm(S) \setminus \text{edge} S$ ، اگر ناتهی باشد، ابر سطح C° آکروئال بدون لبه است.

گزاره زیر مانند نتیجه ۴.۲.۴ مربوط به سطح افق کشی است:

گزاره ۸.۶.۱. فرض کنید $S \subset M$ آکروئال باشد. آنگاه هر نقطه $p \in H^\pm(S) \setminus \text{edge} S$ نقطه پایانی

یک ژئودزیک تهی به طور کامل مشمول در $H^\pm(S)$ است که یا دارای یک نقطه پایانی گذشته روی

$\text{edge} S$ بوده و یا گسترش ناپذیر گذشته می‌باشد.

با توجه به ساختار بسط کشی، داریم:

گزاره ۹.۶.۱. فرض کنید $S \subset M$ آکروئال باشد. آنگاه اگر $\text{int} D(S)$ ، ناتهی باشد آنگاه، هندلولوی

سراسری است. به علاوه، اگر S یک ابر سطح غیر علی باشد، آنگاه $D(S)$ باز است.

به علاوه، داریم:

گزاره ۱۰.۶.۱. فرض کنید $\emptyset \neq S \subset M$ آکروئال باشد.

$$(۱) \quad D^-(S) = J^-(S) \Leftrightarrow H^-(S) = \emptyset, \text{ در این حالت } S = \partial I^-(S).$$

$$(۲) \quad \partial I^-(S) = S = \partial I^+(S), \text{ در این حالت } M = D(S) = J(S) \Leftrightarrow H(S) = \emptyset$$

تعریف ۱۱.۶.۱. فرض کنید $\emptyset \neq S \subset M$ آکروئال باشد. گوئیم S سطح کشی گذشته است اگر

$H^-(S) = \emptyset$ باشد. سطح کشی آینده به صورت دوگان زمانی تعریف می‌شود. گوئیم S یک سطح

کشی (کلی) است اگر $H(S) = \emptyset$ ، یا به طور معادل، اگر $D(S) = M$ باشد.

بنابراین، یک مجموعه آکروئال ناتهی یک سطح کشی است اگر و تنها اگر هم زمان سطح کشی

آینده و گذشته باشد. از گزاره ۱۰.۶.۱ نتیجه می‌گیریم که سطوح کشی (گذشته، آینده) بدون لبه هستند.

از این رو، با استفاده از گزاره ۷.۵.۱، داریم:

نتیجه ۱۲.۶.۱. هر سطح کشی (گذشته، آینده) یک ابر سطح C° آکروئال بدون لبه است.

در متون مختلف، تعریف سطح کشی تفاوت‌های بسیاری دارد. اغلب، به صورت (نسخه) زیر

بیان شده‌اند:

گزاره ۱۳.۶.۱. فرض کنید $S \subset M$ آکروئال باشد. آنگاه S یک سطح کشی برای M است اگر و

تنها اگر هر منحنی علی گسترش ناپذیر در M ، S را قطع کند. در این حالت، هر منحنی علی گسترش

ناپذیر نیز $I^-(S)$ و $I^+(S)$ را قطع می‌کند.

همچنین به خاصیت زیر (مربوط به فضای کامل علی) توجه کنید:

گزاره ۱۴.۶.۱. فرض کنید S یک سطح کشی گذشته باشد. آنگاه، برای هر $p \in J^-(S)$ ، مجموعه

$$J^+(p) \cap J^-(S) \text{ فشرده است.}$$

با استفاده از گزاره‌های ۲.۲.۴ و ۳.۴.۴ و لم ۵.۴.۱، داریم:

گزاره ۱۵.۶.۱. هر مجموعه آکروئال بدون لبه، فشرده $S \subset M$ یک سطح کشی برای M است.

در زیر حقایق توپولوژیکی مربوط به سطوح کشی را آورده‌ایم:

قضیه ۱۶.۶.۱. فرض کنید S یک سطح کشی برای M و X هر میدان برداری زمان‌گونه کامل هموار روی M باشد. آنگاه M به طور توپولوژیکی به صورت $M \approx \mathbb{R} \times S$ ، شکافته می‌شود. به علاوه، هر دو سطح کشی برای یک فضازمان همئومورف هستند.

حال، نتیجه اساسی زیر مربوط به بسط کشی و هذلولوی سراسری را می‌آوریم:

قضیه ۱۷.۶.۱. (*Geroch*). یک فضازمان M هذلولوی سراسری است اگر و تنها اگر دارای یک سطح کشی باشد.

تعریف ۱۸.۶.۱. ژئودزیک $\gamma : I \rightarrow M$ کامل است اگر $I = \mathbb{R}$ باشد. گوئیم M به طور ژئودزیک کامل است اگر هر ژئودزیک در M به یک ژئودزیک کامل گسترش یابد. به طور واضح تر، گوئیم M کامل ژئودزیک زمان‌گونه (تهی) آینده است هر گاه هر ژئودزیک زمان‌گونه (تهی) در جهت آینده γ قابل توسعه به $\gamma : I \rightarrow M$ با $I \subset [a, \infty)$ ، برای هر $a \in \mathbb{R}$ باشد. کامل ژئودزیک زمان‌گونه (تهی) گذشته به صورت دوگان زمانی تعریف شده است. گوئیم M کامل ژئودزیک زمان‌گونه (تهی) است اگر هم زمان کامل ژئودزیک زمان‌گونه (تهی) آینده و گذشته باشد. بنابراین، یک فضازمان (M, g) را کامل ژئودزیک زمان‌گونه گوئیم اگر تمام ژئودزیک‌های گسترش ناپذیر زمان‌گونه آن کامل باشد.

تعریف ۱۹.۶.۱. با استفاده از تکنیکی^۱ در M ، معمولاً وجود یک ژئودزیک زمان‌گونه یا تهی ناکامل (گذشته یا آینده) را در می‌یابیم، در این حالت M را تکین گوئیم هرگاه شامل یک ژئودزیک زمان‌گونه و یا تهی ناکامل (گذشته یا آینده) باشد.

تعریف ۲۰.۶.۱. ژئودزیک $M \rightarrow [0, \infty)$ ، شعاع (خط شعاعی) گفته می‌شود اگر γ فاصله

^۱ Singularity

ریمانی بین هر زوج از نقاطش را مشخص کند. یک شعاع (خط شعاعی) در فضازمان M ، ژئودزیک علی گسترش ناپذیر آینده ماکسیمال $M \rightarrow [\circ, \infty) : \gamma$ است. شعاع‌ها (خطوط شعاعی) اغلب از ساختارهای حدی به وجود می‌آیند.

تعریف ۲۱.۶.۱. منحنی علی گسترش ناپذیر آینده $M \rightarrow [\circ, \infty) : \gamma$ ، با پارامتر طول قوس h ، S - شعاع (خط شعاعی) گفته می‌شود اگر γ و $\gamma(\circ) \in S$ فاصله تا S را بیشینه کند، به عبارت دیگر،

$$L(\gamma|_{[\circ, a]}) = d(S, \gamma(a)) \quad \text{برای همه } a \geq \circ$$

تعریف ۲۲.۶.۱. فرض کنید $M \rightarrow [\circ, \infty) : \gamma$ ، S - شعاع (خط شعاعی) گسترش ناپذیر آینده باشد و $z \in I^-(\gamma) \cap J^+(S)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید در $J^+(S)$ ، $z_n \rightarrow z$ و برای برخی دنباله $r_n \rightarrow \infty$ قرار دهید $p_n = \gamma(r_n)$ آنگاه برای n های به اندازه کافی بزرگ داریم $z_n \in I^-(p_n)$ و $d(z_n, p_n) < \infty$ فرض کنید

$$p_n \rightarrow \infty \text{ یا } (a)$$

$$d(z_n, p_n) \rightarrow \infty \text{ (b)}$$

اگر γ دارای طول نامتناهی باشد b برقرار است. دنباله حد افزایشی μ_n از منحنی‌های علی را در نظر بگیرید که از z_n تا p_n است. با استفاده از لم زیر، هر منحنی حدی $M \rightarrow [\circ, \infty) : \mu$ از μ_n شعاعی است که از z آغاز می‌شود. چنین شعاعی را هم-شعاع γ گوئیم. توجه کنید که μ در بستار $I^-(\gamma)$ قرار دارد. (در واقع اگر $\mu(t) \in \partial I^-(\gamma)$ ، آنگاه $\mu|_{[t, \infty)}$ مولد ژئودزیک تهی گسترش ناپذیر آینده $\partial I^-(\gamma)$ است.)

لم ۲۳.۶.۱. فرض کنید دنباله‌ای در فضازمان M باشد که $z_n \rightarrow z$ با $p_n \in I^+(z_n)$ با $d(z_n, p_n)$ متناهی در نظر بگیرید. فرض کنید $\gamma_n : [\circ, a_n] \rightarrow M$ دنباله حد افزایشی منحنی‌های علی با $\gamma_n(\circ) = z_n$ و $\gamma_n(a_n) = p_n$ باشد. فرض کنید $M \rightarrow [\circ, \infty) : \bar{\gamma}_n$ هر بسط گسترش ناپذیر آینده‌ای از γ_n باشد. فرض کنید

(a) $p_n \rightarrow \infty$ ، به عبارت دیگر هیچ زیر دنباله‌ای همگرا نیست. یا،

$$d(z_n, p_n) \rightarrow \infty \quad (b)$$

آنگاه هر منحنی حدی $M \rightarrow [\circ, \infty)$ از دنباله $\tilde{\gamma}_n$ شعاعی است که از z آغاز می‌شود.

تعریف ۲۴.۶.۱. فرض کنید $\gamma : [\circ, \infty) \rightarrow M$ یک S - شعاع زمان گونه کامل آینده باشد. تابع

بوسمان $b : M \rightarrow [-\infty, \infty]$ مربوط به γ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$b(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} b_r(x),$$

که

$$b_r(x) = d(\gamma(\circ), \gamma(r)) - d(x, \gamma(r)).$$

توجه کنید که در اعداد حقیقی توسعه یافته حد فوق همیشه وجود دارد. در این تعریف، $b_r(x)$ را توابع

پیش بوسمان می‌نامیم.

تعریف ۲۵.۶.۱. فرض کنید M یک فضا زمان و $\gamma : [\circ, \infty) \rightarrow M$ یک S - شعاع زمان گونه کامل

آینده باشد، که S زیر مجموعه‌ای از M است. تابع بوسمان مربوط به γ ، را به صورت

$b : M \rightarrow [-\infty, \infty]$ در نظر بگیرید. قرار دهید $\sum_c = \{x \in M \mid b(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}\}$. آنگاه

$\sum_c$ مجموعه سطوح تابع بوسمان b نامیده می‌شود و داریم $\sum_c \subset I^-(\gamma)$.

نکته ۲۶.۶.۱. فرض کنید $\gamma : [\circ, \infty) \rightarrow M$ یک S - شعاع زمان گونه کامل آینده باشد. اگر

$x \in M \setminus I^-(\gamma)$ ، آنگاه $b_r(x) = d(\gamma(\circ), \gamma(r)) \rightarrow \infty$ وقتی $r \rightarrow \infty$ میل کند، و از این رو

$$b(x) = \infty, \quad x \in M \setminus I^-(\gamma) \text{ برای همه}$$

و اگر $x \in I^-(\gamma)$ ، آنگاه $b_r(x)$ به طور یکنواخت کاهش می‌یابد همان گونه که r افزایش می‌یابد، چون

برای $s > r$ با استفاده از "RTI" داریم

$$d(x, \gamma(s)) \geq d(x, \gamma(r)) + d(\gamma(r), \gamma(s)),$$

$$d(\gamma(\circ), \gamma(s)) = d(\gamma(\circ), \gamma(r)) + d(\gamma(r), \gamma(s)),$$

در زیر $b_r(x)$ به وسیله $d(\gamma(\circ), x)$ ، محدود شده است؛ بنابراین در این حالت حد وجود دارد. به

علاوه، داریم

$$b(x) \geq d(S, x) \geq 0, \quad x \in I^-(\gamma) \cap J^+(S) \text{ برای همه}$$

زیرا بنا به رابطه $d(S, p) + d(p, \gamma(r)) \leq d(\gamma(0), \gamma(r)) \leq \infty$ ، در تعریف ابرسطح‌های فضاگونه، برای هر $r \geq 0$ ، $b_r(x) \geq d(S, x)$ ، بنابراین b و d هر دو مقادیر متناهی روی $I^-(\gamma) \cap J^+(S)$ دارند. با توجه به اینکه d نیم پیوسته پایینی است، از این رو b_r نیم پیوسته بالایی است و چون b حد کاهشی b_r است، این نیز نیم پیوسته بالایی است. اگر M یک هذلولی سراسری، کامل ژئودزیکی زمان‌گونه آینده و S ابرسطح فضاگونه فشرده باشد آنگاه b روی M پیوسته است. کاربردهای ساده دیگر از RTI نشان می‌دهد که

$$b(q) \geq b(p) + d(p, q), \quad \text{برای هر } p \leq q \text{ در } I^-(\gamma) \cap J^+(S)$$

و از این رو b در امتداد منحنی علی غیر کاهشی است.

فصل دوم

حدهای آکروئال

این فصل شامل یک بخش است و بیشتر مطالب آن با بهره بردن از مرجع‌های [۲۲]، [۵]، [۲۴] و [۲۰] بیان می‌شود. در این فصل برخی قوانین مقدماتی مربوط به کران‌های آکروئال را یادآوری می‌کنیم. در ابتدا به معرفی مجموعه‌های گذشته و آینده در فضا-زمان می‌پردازیم و سپس شبه کره‌های تعمیم یافته را در قالب حدهای آکروئال معرفی می‌کنیم. نتیجه بسیار مهم این فصل، گزاره ۶.۱.۲ (تجزیه آکروئال)^۱ است. در این گزاره آمده است که اگر A یک کران آکروئال باشد (۱) مجموعه‌های منحصر به فرد P و F چنان وجود دارند که P یک مجموعه گذشته و F یک مجموعه آینده است و $\partial F = \partial P = A$. همچنین داریم $I^+(A) \subset F$ و $I^-(A) \subset P$. (۲) مجموعه‌های P و F و A دوبه دو مجزا هستند و $M = P \cup A \cup F$. به علاوه از این گزاره نتیجه می‌شود که اگر A زمان‌گونه باشد هر منحنی از P به F در یک نقطه منحصر به فرد A را قطع می‌کند.

^۱ Achronal Decomposition

۱.۲ حدهای آکروئال

فرض می‌کنیم (M^{n+1}, g) یک فضا زمان است. به عبارت دیگر، یک خمینه لورنتسی جهت دار زمانی با $n \geq 1$ باشد.

تعریف ۱.۱.۲. مجموعه $F \subset M$ را یک **مجموعه آینده** گوئیم اگر برای یک زیر مجموعه S از M ، $F = I^+(S)$ وجود داشته باشد. در واقع F مجموعه آینده است اگر و تنها اگر $I^+(F) = F$ باشد.

تعریف ۲.۱.۲. مجموعه $P \subset M$ را یک **مجموعه گذشته** گوئیم اگر برای یک زیر مجموعه S از M ، $P = I^-(S)$ وجود داشته باشد. در واقع P مجموعه گذشته است اگر و تنها اگر $I^-(P) = P$ باشد.

تعریف ۳.۱.۲. (کران آکروئال). مرز یک مجموعه آینده یا گذشته (فرض بر این که ناتهی باشد) را یک کران آکروئال می‌نامیم به این معنی که، یک مجموعه ناتهی مانند A کران آکروئال برای P یا F است اگر برای یک زیرمجموعه S از M ، $A = \partial I^\pm(S)$ وجود داشته باشد.

نکته ۴.۱.۲. مجموعه‌های آینده و گذشته الزاماً باز هستند.

نکته ۵.۱.۲. یک کران آکروئال $A \subset M$ در حالت کلی، یک ابرسطح C° آکروئال بدون لبه است.

گزاره ۶.۱.۲. (تجزیه آکروئال) فرض کنید $A \neq \emptyset$ یک کران آکروئال باشد. آنگاه

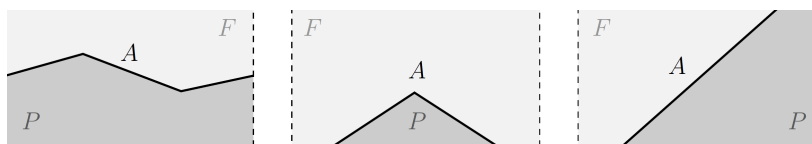
(۱) مجموعه‌های منحصر به فرد P و F چنان وجود دارند که P یک مجموعه گذشته و F یک مجموعه آینده است و $\partial F = \partial P = A$. هم چنین داریم، $I^+(A) \subset F$ و $I^-(A) \subset P$.

(۲) مجموعه‌های P و F و A دوه دو مجزا هستند و

$$M = P \cup A \cup F \quad (\text{شکل ۱.۲})$$

به علاوه، هر خمی از P به F باید A را قطع کند (در صورتی که خم زمان گونه باشد، تقاطع خم و A در یک نقطه منحصر به فرد است).

نکته ۷.۱.۲. هر سطح کشی S یک کران آکروئال با $P = I^-(S)$ و $F = I^+(S)$ است.



شکل ۱.۲: تجزیه آکروئال

تبصره‌ای در مورد اثبات. گزاره ۶.۱.۲ شکل تقلیل یافته گزاره ۳.۱۵ در [۲۴] است. برای مثال، فرض کنید $A = \partial F$ ، که F مجموعه آینده است. پس، $P = I^-(M \setminus F)$ یک مجموعه گذشته و داریم: $A = \partial P$ و گزاره برقرار است. اگر $A = \partial F'$ ، برای مجموعه آینده دیگری مانند F' ، آنگاه به روشی مشابه تجزیه $M = P' \cup A \cup F'$ را خواهیم داشت. اما بنا به گزاره ۳.۱۵ در [۲۴] چون مجموعه‌های گذشته و آینده منحصر به فرد هستند پس نتیجه می‌شود که $F = F'$. از طرفی شمول $I^+(A) \subset F$ و $I^-(A) \subset P$ ممکن است اکید باشند.

تعریف ۸.۱.۲. یک کران آکروئال A ، گذشته سره است اگر $I^-(A) = P$. از یکتایی P نتیجه می‌شود که A گذشته سره است اگر و تنها اگر $\partial I^-(A) = A$ باشد. به صورت دوگان زمانی، کران آکروئال A آینده سره است اگر $I^+(A) = F$ (یا به طور برابر، $\partial I^+(A) = A$) باشد.

لم ۹.۱.۲. فرض کنید A و B کران‌های آکروئال به ترتیب، با مجموعه‌های منحصر به فرد گذشته و آینده $\{P_A, F_A\}$ و $\{P_B, F_B\}$ باشند. آنگاه موارد زیر برقرار است:

(۱) اگر $P_A \subset P_B$ و تنها اگر $F_B \subset F_A$ باشد.

(۲) اگر A و B گذشته سره باشند، آنگاه

الف) اگر $P_A \subset P_B$ و تنها اگر $J^-(A) \subset J^-(B)$ باشد. و

ب) $J^-(A) \subset J^-(B)$ و تنها اگر $A \subset B$ باشد.

اثبات. (۱) با استفاده از گزاره ۶.۱.۲، $P_A \subset P_B \Leftrightarrow B \cup F_B \subset A \cup F_A$. اما از آنجایی که F_B

باز است اگر $F_B \cap A \neq \emptyset$ باشد، آنگاه $F_B \cap P_A \neq \emptyset$. که نتیجه می‌دهد $F_B \cap P_B \neq \emptyset$ و این

یک تناقض است بنابراین $F_B \subset F_A$. حالت برعکس به صورت دوگان زمانی این حالت است. (۲) با

استفاده از این نکته که (اگر A گذشته سره باشد، آنگاه $\overline{A} = \overline{I^-(A)} = \overline{J^-(A)}$) و با گرفتن بستار و درون نتیجه می شود که

$$I^-(A) \subset I^-(B) \Leftrightarrow J^-(A) \subset J^-(B)$$

□

در نهایت، به این نتیجه می رسیم که دنباله کران های آکرونال $\{A_k\}$ در شرایطی که $\{P_k\}$ یا $\{F_k\}$ افزایشی باشد یکنوا است. به این معنی که، برای تمام k ، $P_k \subset P_{k+1}$ یا $F_k \subset F_{k+1}$ خواهد بود.

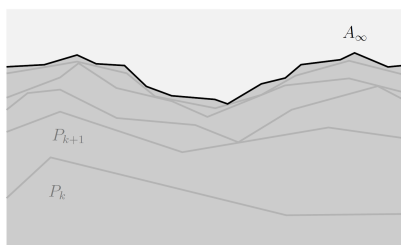
تعریف ۱۰.۱.۲. (حدهای آکرونال). فرض کنید $\{A_k\}$ دنباله کران های آکرونال باشد، و نیز به ازای هر k ، P_k و F_k را مجموعه های منحصر به فرد گذشته و آینده در نظر می گیریم که مرتبط با $A_k = \partial P_k = \partial F_k$ باشد.

(۱) اگر دنباله P_k افزایشی باشد، آنگاه حد آکرونال آینده A_∞ از $\{A_k\}$ به صورت زیر تعریف می شود

$$A_\infty = \partial \left(\bigcup_k P_k \right) \quad (\text{شکل ۲.۲})$$

(۲) اگر دنباله F_k افزایشی باشد، آنگاه حد آکرونال گذشته A_∞ از $\{A_k\}$ به صورت زیر تعریف می شود

$$A_\infty = \partial \left(\bigcup_k F_k \right)$$



شکل ۲.۲: حد آکرونال آینده

نکته ۱۱.۱.۲. از آنجایی که اجتماع دلخواهی از مجموعه‌های گذشته (یا آینده) یک مجموعه گذشته (یا آینده) می‌شود، یک حد آکروئال (اگر ناتهی باشد) یک کران آکروئال است و از این رو یک ابر سطح C° آکروئال بدون لبه در M است.

تذکر ۱۲.۱.۲. وقتی P_k یک دنباله افزایشی باشد، یعنی F_k یک دنباله کاهشی خواهد بود و در این حالت حد آکروئال آینده و گذشته با استفاده از روابط ۱۰.۱.۲ بدست می‌آید. به علاوه، وقتی P_k یک دنباله افزایشی باشد، با توجه به این که اجتماع هر تعداد دلخواه از مجموعه‌های گذشته (آینده) مجموعه گذشته (آینده) است، $P_\infty := \bigcup_k P_k$ یک مجموعه گذشته (باز) است و از این رو، $A_\infty = \partial P_\infty$ و اگر ناتهی باشد یک کران آکروئال است. به طور مشابه، وقتی P_k یک دنباله کاهشی باشد $A_\infty = \partial F_\infty$ که در آن $F_\infty := \bigcap_k F_k$ یک مجموعه آینده (باز) است بنابراین A_∞ یک کران آکروئال است.

تبصره ۱۳.۱.۲. فرض کنید $\{A_k\}$ دنباله‌ای از کران‌های آکروئال گذشته سره باشد به عبارت دیگر، برای هر k ، $I^-(A_k) = P_k$ باشد. آنگاه، با توجه به لم ۹.۱.۲، $\{P_k\}$ افزایشی است اگر و تنها اگر $\{J^-(A_k)\}$ افزایشی باشد و این معادل این است که برای هر k ، $A_k \subset J^-(A_{k+1})$ باشد. به طور مشابه، $\{F_k\}$ افزایشی است یا متقابلاً، $\{P_k\}$ کاهشی است اگر و تنها اگر $\{J^-(A_k)\}$ کاهشی باشد و این معادل این است که $A_{k+1} \subset J^-(A_k)$ برای هر k برقرار باشد.

حال نشان می‌دهیم که حد آکروئال A_∞ ، به نوعی توسط حد زیر دنباله‌ای A_k به وجود می‌آید.

تعریف ۱۴.۱.۲. اگر برای هر k ، $x_k \leq x_{k+1}$ برقرار باشد آنگاه دنباله‌ی نقاط $\{x_k\}$ آینده افزایشی است. اگر چنانچه دنباله همگرا به $x \in M$ باشد، x را حد علی آینده $\{x_k\}$ گوئیم. دنباله‌ی نقاط گذشته افزایشی و حد علی گذشته آنها، در قالب دوگان زمانی قابل درک هستند.

گزاره ۱۵.۱.۲. (مشخص کردن دنباله‌ای حدهای آکروئال). فرض کنید A_∞ حد آکروئال آینده (گذشته) دنباله‌ای از کران‌های آکروئال $\{A_k\}$ باشد. آنگاه هر نقطه حدی دنباله، $a_k \in A_k$ ، در A_∞ قرار خواهد گرفت. به علاوه، با ثابت در نظر گرفتن هر نقطه $a \in A_\infty$ و هر منحنی زمان گونه α

گذرنده از a ، حد علی آینده (گذشته) دنباله $a_k = \alpha \cap A_k$ محسوب می‌شود. (k به اندازه کافی بزرگ است.)

اثبات. فرض کنید A_∞ حد آکروئال آینده باشد. بنا به تعریف ۴.۵.۵، $\{P_k\}$ افزایشی است و $A_\infty = \bigcup_k P_k$ ، ∂P_∞ .

فرض کنید $a \in M$ نقطه حدی دنباله $a_k \in A_k$ باشد و یک زیر دنباله از a_k مانند a_{k_j} چنان باشد که $a_{k_j} \rightarrow a$. U را همسایگی دلخواه a فرض کنید. برای j های بزرگ، داریم $a_{k_j} \in U$. پس برای j های بزرگ، از آنجایی که U دنباله $A_{k_j} = \partial P_{k_j}$ را در بر داشته و این نیز P_{k_j} را در بر دارد از این رو خواهیم داشت $P_\infty = \bigcup_k P_k$. همچنین U در نقطه‌ای مانند y ، $I^+(a)$ را قطع خواهد کرد و از آنجایی که $I^-(y)$ باز بوده و شامل a می‌باشد، به ازای همه j های به اندازه کافی بزرگ شامل a_{k_j} خواهد بود. بنابراین برای همه j های بزرگ $I^+(A_{k_j}) \subset F_{k_j}$ و در نتیجه $y \in \bigcup_k P_k = P_\infty$ و $y \notin \bigcup_k P_k$. این نتیجه می‌دهد که $a \in \partial P_\infty$. از این رو، A_∞ شامل همه نقاط حدی دنباله $a_k \in A_k$ خواهد بود. حال فرض کنید $a \in A_\infty$ و نیز $\alpha : I \rightarrow M$ یک منحنی زمان‌گونه در جهت آینده با $\alpha(\circ) = a$ و $\circ \in I$ باشد.

$-T \in I$ را که $T > \circ$ است ثابت در نظر بگیرید. داریم $\alpha|_{[-T, \circ)} \subset I^-(A_\infty) \subset P_\infty = \bigcup_k P_k$. بنابراین برای همه k های به اندازه کافی بزرگ، $\alpha(-T) \in P_k$ تا $a \notin P_k$. پس از گزاره ۶.۱.۲ نتیجه می‌شود که به ازای k های به اندازه کافی بزرگ، $\alpha|_{[-T, \circ)} \subset I^-(A_\infty) \subset P_\infty = \bigcup_k P_k$ منحصر به فرد وجود دارد به طوری که $a_k := \alpha(t_k) \in A_k$.

این واقعیت که $\{P_k\}$ افزایشی است نتیجه می‌دهد که $\{t_k\}$ باید در k افزایش یابد و از این رو است که $\{a_k\}$ آینده افزایشی است. فرض بر این که $t_k \not\rightarrow \circ$ به عبارتی، $t_k \leq 2\delta < \circ$ باشد، پس $\alpha(\delta) \in I^-(A_\infty) \subset P_\infty$ و از این رو برای k های بزرگ خواهیم داشت $\alpha(\delta) \in P_k$. از طرفی،

برای k های بزرگ داریم $I^+(A_k) \subset F_k$ ، $\alpha(\delta) \in I^+(A_k)$ که تا زمانی که $P_k \cap F_k = \phi$ است امکان پذیر نیست. در نتیجه باید $t_k \rightarrow \circ$ و بنابراین $a_k = \alpha(t_k) \rightarrow \alpha(\circ) = a$. $\square$

تبصره ۱۶.۱.۲. گزاره ۱۵.۱.۲ به وضوح در ارتباط با مفهوم حدهای بسته هاسدورف است؛ به عنوان مثال به، بخش ۴.۳ مرجع [۲۳] رجوع کنید. در واقع، از گزاره ۱۵.۱.۲ نتیجه می شود که حد بسته هاسدورف از دنباله کران های آکروئال $\{A_k\}$ وجود دارد و در تناظر با حد آکروئالش است، و از این

$$A_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k$$

رو می توانیم بنویسم

فصل سوم

کره ها و شبه کره ها

در این فصل نمونه‌های مهم شبه کره‌های تعمیم یافته بررسی می‌شود. از جمله شبه کره‌های کشی که، شبه کره‌های استاندارد را در قالب فضازمان با سطوح کشی فشرده تعمیم می‌دهند. پس از آن شبه کره‌های شعاعی بررسی می‌شود که به شبه کره استاندارد معروف است. این فصل شامل چهار بخش است و بیشتر مطالب آن با بهره بردن از مرجع‌های [۲۲]، [۵]، [۲۴] و [۲۰] بیان می‌شود. بخش اول به مبحث طول و مسافت لورنتسی اختصاص دارد. بخش دوم به تشریح کره‌های تعمیم یافته و بخش سوم، شبه کره‌های تعمیم یافته بحث و بررسی می‌شوند. بخش چهارم به شبه کره‌های شعاعی و کشی اختصاص یافته است. نتیجه اصلی فصل، لم ۳.۲۴ است که در بخش چهارم بیان و ثابت شده است. (در این لم برخی شاخصه‌های پایه‌ای شبه کره‌های $S_{\infty}^{-}(S)$ مورد بررسی قرار گرفته است).

در سرتاسر این فصل، فرض ما بر این است که فضازمان M هذلولوی سراسری است. این به این معنی است که، M به طور قوی علی است و دارای همه‌ی مجموعه‌های فشرده به شکل $J^{+}(P) \cap J^{-}(q)$ می‌باشد. با در نظر گرفتن سطح کشی S به عنوان یک مجموعه‌ی آکروئال از M ، هر منحنی علی

گسترش ناپذیر در M را قطع می‌کند. به طور خاص، سطح کشی برای M یک کران آکروئال (گذشته و آینده سره) و از این رو یک ابر سطح C° آکروئال بدون لبه در M است. واقعیت‌های زیر کاملاً شناخته شده هستند (به مرجع‌های [۲۰]، [۲۲] و [۲۴] رجوع کنید).

(۱) S یک سطح کشی برای M است اگر و تنها اگر S آکروئال و $D(S) = M$ (یا به طور معادل، $H(S) = \emptyset$ باشد).

(۲) M هذلولوی سراسری است اگر و تنها اگر سطح کشی S را بپذیرد.

۱.۳ طول و مسافت لورنتسی

در این بخش، تعاریف کامل علی آینده و گذشته، کراندار و برخی شاخصه‌های پایه‌ای در مورد کامل بودن علی و کراندار علی را ذکر می‌کنیم. تابع مسافت لورنتسی را با d نشان می‌دهیم؛ فرض کنید $\Omega_{p,q}^c$ مجموعه‌ای از منحنی‌های علی در جهت آینده از p تا q باشد در این صورت تعریف می‌کنیم

$$d(p, q) = \begin{cases} \sup \{L(\gamma) : \gamma \in \Omega_{p,q}^c\}, & q \in J^+(p) \\ 0, & q \notin J^+(p) \end{cases}$$

تعریف ۱.۱.۳. قطعه منحنی علی آینده α از p تا $q \in J^+(p)$ **ماکسیمال** خواهد بود اگر

$d(p, q) = L(\alpha)$ باشد، به عبارت دیگر، منحنی علی دیگری از p تا q وجود نداشته باشد. در واقع دلالت بر این دارد که α مسافت بین هر دو نقطه خود را مشخص می‌کند.

نکته ۲.۱.۳. با توجه به اینکه فاصله دو نقطه در هندسه‌ی لورنتسی به صورت ۱.۳ بیان می‌شود در

حالی که معمولاً به صورت $\inf$ تعریف می‌شود، برخی خواص مربوط به متر هم در حالت لورنتسی به صورت برعکس بیان می‌شود مانند رابطه نابرابری مثلث معکوس. (در فضای متریک M با متریک d ، نابرابری مثلث معکوس برای $x, y, z \in M$ به صورت $d(y, x) + d(x, z) \leq d(y, z)$ تعریف می‌شود.)

تعریف ۳.۱.۳. شعاع آینده، یک منحنی گسترش ناپذیر آینده $M \rightarrow [a, b) : \gamma$ است که در آن $b \in (a, \infty]$ و هر قطعه از آن ماکسیمال می‌باشد.

قضیه ۴.۱.۳. از آنجایی که M به عنوان هذلولوی سراسری در نظر گرفته شده است، روی $M \times M$ متناهی و پیوسته است. به علاوه، هر دو نقطه ارتباط یافته علی با یک قطعه ژئودزیک علی ماکسیمال اتصال یافته‌اند. برای هر زیر مجموعه $S \subset M$ ، مسافت بین S تا $q \in M$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d(S, q) = \begin{cases} \sup \{d(x, q) : x \in S\}, & q \in J^+(S) \\ \circ, & q \notin J^+(S) \end{cases}$$

(به [۱۷]، رجوع شود.)

تعریف ۵.۱.۳. یک قطعه منحنی علی آینده α از S تا $q \in J^+(S)$ به شرطی که $d(S, q) = L(\alpha)$ برقرار باشد، S - قطعه ماکسیمال آینده نامیده می‌شود. باز هم این موضوع دلالت بر این دارد که α مسافت بین S تا هر نقطه‌اش را مشخص می‌کند.

تعریف ۶.۱.۳. S - شعاع آینده، یک منحنی گسترش ناپذیر آینده، $M \rightarrow [a, b) : \gamma$ است که از $\gamma(a) \in S$ شروع می‌شود و هر قطعه‌ی اولیه $\gamma|_{[a, c]}$ ، $c \in (a, b)$ ، یک S - قطعه ماکسیمال است.

تذکر ۷.۱.۳. مسافت بین q تا S ، $d(q, S)$ ، به همین صورت تعریف شده است و از استراتژی‌های مشابه استفاده شده است.

۱.۱.۳ کامل علی و کرانداری

در این بخش، از مفهوم کامل علی که در [۴] معرفی شده است و هم چنین از مرجع های [۲۷] و [۲۸] استفاده کرده ایم.

تعریف ۸.۱.۳. زیر مجموعه $S \subset M$ ، کامل علی آینده است اگر برای هر $p \in J^-(S)$ بستار $J^+(p) \cap S$ در S فشرده باشد. کامل علی گذشته نیز، به صورت دوگان زمانی تعریف می شود.

مثال ۹.۱.۳. مجموعه های فشرده و سطوح کشی، کامل علی گذشته و آینده هستند.

اکنون نشان می دهیم در حالت کلی، اگر S کامل علی آینده یا گذشته باشد آنگاه S الزاماً بسته خواهد بود.

لم ۱۰.۱.۳. اگر S کامل علی آینده باشد، آنگاه S بسته خواهد بود.

اثبات. دنباله ای $\{S_k\} \subset S$ را با $S_k \rightarrow x$ در نظر بگیرید. فرض کنید $y \in I^+(x)$ باشد آنگاه برای همه ی k های بزرگ، $S_k \in J^-(y) \cap S$ ، و در حالت خاص، $y \in J^+(S)$ است. از آنجایی که بستار $J^-(y) \cap S$ در S فشرده است، دنباله ای $\{S_k\}$ دارای یک زیردنباله همگرا در S خواهد بود که در واقع باید به x همگرا باشد. از این رو، $x \in S$ است. $\square$

در زیر برخی شاخصه های پایه ای دیگر در مورد کامل علی را بیان می کنیم (رجوع شود به [۲۷] و [۲۹]).

لم ۱۱.۱.۳. فرض کنید S زیرمجموعه ای از فضا زمان هذلولوی سراسری M باشد.

(۱) اگر S کامل علی آینده باشد آنگاه $J^+(S)$ بسته خواهد بود.

(۲) موارد زیر برای S بسته، معادل هستند.

(a) S کامل علی آینده است.

(b) $J^-(p) \cap S$ برای هر $p \in J^+(S)$ فشرده می باشد.

(c) $J^-(p) \cap J^+(S)$ برای هر $p \in J^+(S)$ فشرده می‌باشد.

(۳) اگر C کامل علی آینده و $S \subset J^+(C)$ بسته باشد آنگاه S کامل علی آینده است.

تبصره‌ای در مورد اثبات. قسمت ۱ به روشی مشابه با لم ۱۰.۱.۳ اثبات می‌شود. در مورد ۲، برابری $(b) \Leftrightarrow (a)$ به آسانی از این واقعیت که S بسته است پیروی می‌کند. برابری $(c) \Leftrightarrow (b)$ نیز، از روابط مجموعه‌ای $J^-(p) \cap S \subset J^-(p) \cap J^+(p) = J^-(p) \cap J^+(J^-(p) \cap S)$ پیروی می‌کند. در مورد ۳، توجه کنید که اگر $x \in J^+(S)$ ، آنگاه $J^-(x) \cap S$ یک زیر مجموعه بسته از مجموعه فشرده $J^-(x) \cap J^+(C)$ است.

لم زیر در برخورد ما با کره‌های تعمیم یافته بسیار حائز اهمیت است.

لم ۱۲.۱.۳. فرض کنید M فضا زمان هذلولوی سراسری باشد. اگر S کامل علی آینده باشد، آنگاه $x \rightarrow d(S, x)$ یک مقدار متناهی و پیوسته روی M است، و با فرض این که هر $q \in J^+(S)$ است، یک S - قطعه آینده ماکسیمال α از S تا q وجود خواهد داشت، به عبارتی، $L(\alpha) = d(S, q)$.

اثبات. فرض کنید $q \in J^+(S)$ ، و به یاد داشته باشید که $J^-(q) \cap S$ فشرده است. فرض کنید $x_k \in J^-(q) \cap S$ به طوری که $d(x_k, q) \rightarrow d(S, q)$ آنگاه $\{x_k\}$ دارای نقطه حدی $p_0 \in S$ است، و با استفاده از پیوستگی d روی $M \times M$ ، خواهیم داشت $d(p_0, q) = \lim_{j \rightarrow \infty} d(x_{k_j}, q) = d(S, q)$. در حالت خاص، $d(S, q) < \infty$ است. به علاوه، با استفاده از هذلولوی سراسری $J^+(p_0)$ را خواهیم داشت. از این رو، p_0 با قطعه ژئودزیک علی ماکسیمال α به q متصل شده است که باید در عین حال S - قطعه ماکسیمال نیز باشد، $L(\alpha) = d(p_0, q) = d(S, q)$. برای پیوستگی، از آنجایی که $J^+(S)$ بسته است، $d(S, \cdot)$ روی مجموعه باز $M \setminus J^+(S)$ پیوسته است، جایی که در آن عیناً به صفر می‌رسد. از این رو، برای نشان دادن پیوستگی در $J^+(S)$ باقی می‌ماند. در این مورد کافیت نشان دهیم برای هر دنباله $q_k \rightarrow q$ ، داریم، $\lim_{j \rightarrow \infty} d(S, q_{k_j}) = d(S, q)$ ، برای برخی از زیر دنباله‌های

$\{q_{k_j}\}$. $J^+(S) \subset I^+(q) \subset J^+(q_+) \cap S$ را ثابت در نظر بگیرید. آنگاه، $J^-(q_+) \cap S$ فشرده خواهد بود. برای تمام k های بزرگ، داریم $q_k \in J^-(q_+) \cap S$ و از این رو $J^-(q_k) \cap S \subset J^-(q_+) \cap S$. فرض کنید $p_k \in J^-(q_+) \cap S$ با $d(p_k, q_k) = d(S, q_k)$ باشد که در آن p_k به طور دلخواه به ازای هر $q_k \notin J^+(S)$ انتخاب شده است. با استفاده از کامل بودن $J^-(q_+) \cap S$ ، $\{p_k\}$ دارای یک زیر دنباله $\{p_{k_j}\}$ همگرا به $p_\infty \in J^-(q_+) \cap S$ است. با استفاده از پیوستگی روی $M \times M$ ، داریم

$$\lim_{j \rightarrow \infty} d(S, q_{k_j}) = \lim_{j \rightarrow \infty} d(p_{k_j}, q_{k_j}) = d(p_\infty, q) \leq d(S, q) = d(p_\infty, q)$$

از طرفی دیگر، داریم $d(p_\infty, q_{k_j}) \leq d(S, q_{k_j})$ و این نتیجه می دهد که $d(p_\infty, q) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} d(S, q_{k_j})$. از این رو، $\lim_{j \rightarrow \infty} d(S, q_{k_j}) = d(p_\infty, q) = d(S, q)$. $\square$

با توجه به لم ۱۲.۱.۳، کامل علی چیزی است که ما به طور معمول در مفروضات مسافت یک مجموعه انتظار داریم. این مفهوم در [۲۷] و [۲۸] برای اهداف مشابه استفاده شده است. کامل علی گذشته یا آینده مجموعه S ، که آکروئال و بدون لبه است دارای برخی خواص، مانند دو لم آمده در زیر است.

لم ۱۳.۱.۳. فرض کنید M هذلولوی سراسری باشد و $\emptyset \neq S \subset M$ را آکروئال و بدون لبه فرض کنید. اگر S کامل علی گذشته باشد، آنگاه $S = \partial I^-(S)$ ، به عبارتی، S یک کران آکروئال گذشته سره است.

اثبات. با استفاده از آکروئال بودن، $S \cap I^-(S) = \emptyset$ است. این نتیجه می دهد که $S \subset \partial I^-(S)$ است. نشان می دهیم که $\partial I^-(S) \subset S$ می باشد. در حالتی دیگر فرض می کنیم $x \in \partial I^-(S) \setminus S$ باشد. با استفاده از قضیه ۳.۲۰ در [۲۴]، نقطه پایانی گذشته ژئودزیک تهی $\eta \subset \partial I^-(S)$ است که یا در M گسترش ناپذیر آینده است یا دارای یک نقطه پایان آینده روی S است. از آنجایی که $J^-(S)$ بسته است، داریم $\eta \subset J^+(x) \cap \partial I^-(S) \subset J^+(x) \cap J^-(S)$. اگر گسترش ناپذیر آینده بود، در

مجموعه فشرده $J^+(x) \cap J^-(S)$ قرار می‌گرفت و نقض علیت قوی^۱ را موجب می‌شد. از این رو، اگر η نقطه پایان آینده $y \in S$ را داشته باشد؛ می‌توانیم این گونه فرض کنیم $\eta \cap S = \{y\}$. آنگاه از آنجایی که S یک ابر سطح C° آکروئال بدون لبه و y تنها نقطه تلاقی η و S است، روی η و در نزدیکی y در گذشته زمان گونه S نقطه‌ای وجود خواهد داشت. این دلالت بر این دارد که $x \in I^-(S)$ است، که یک تناقض به حساب می‌آید. $\square$

لم ۱۴.۱.۳. فرض کنید M هندلولوی سراسری باشد و $\emptyset \neq S \subset M$ را آکروئال و بدون لبه فرض کنید. آنگاه S کامل علی گذشته است اگر و تنها اگر S ، سطح کشی گذشته $H^-(S) = \emptyset$ باشد.

اثبات. فرض کنید $H^-(S) = \emptyset$ باشد. آنگاه $D^-(S) = J^-(S)$ ، از این رو به ازای همه p ها در $J^+(p) \cap S$ ، $J^-(S)$ فشرده است. از این رو، S کامل علی گذشته است. حال فرض کنید که S کامل علی گذشته است، و اینکه نقطه $p \in H^-(S)$ وجود دارد. با استفاده از قضیه ۵.۱۲ در [۲۴]، p نقطه پایان گذشته ژئودزیک تهی $\eta \subset H^-(S)$ است که گسترش ناپذیر آینده در M می‌باشد. اما باز هم، از آنجایی که $\eta \subset J^+(p) \cap H^-(S) \subset J^+(p) \cap J^-(S)$ است به نقض علیت قوی تمایل می‌یابد. از این رو، $H^-(S) = \emptyset$ است. $\square$

تعریف ۱۵.۱.۳. زیر مجموعه $A \subset M$ را کراندار آینده گوئیم اگر سطح کشی S در M موجود باشد به طوری که $A \subset J^-(S)$ باشد. کراندار گذشته نیز، به صورت دوگان زمانی تعریف می‌شود.

لم ۱۶.۱.۳. فرض کنید M هندلولوی سراسری باشد و $\emptyset \neq S \subset M$ بسته باشد. آنگاه S کامل علی گذشته خواهد بود اگر و تنها اگر S کراندار آینده باشد.

اثبات. ابتدا فرض کنید S کراندار آینده با استفاده از سطح کشی Σ باشد، به عبارت دیگر، $S \subset J^-(\Sigma)$ باشد. از آنجایی که Σ کامل علی گذشته است، آنگاه با استفاده از لم ۱۱.۱.۳، S کامل علی گذشته

^۱ Strong causality violation

است.

حال با فرض اینکه S کامل علی گذشته باشد. فرض کنید $A = \partial I^-(S)$. ابتدا به یاد داشته باشید که A ناتهی است. در غیر این صورت، $M = I^-(S) = J^-(S)$. اما در این صورت بنا به لم ۱۱.۱.۳، آینده علی هر نقطه فشرده خواهد بود، که بیانگر نقض علیت قوی است. از این رو، A یک مجموعه آکروئال بدون لبه ناتهی است. با استفاده از قضیه ۳.۲۰ در [۲۴] همان گونه که در اثبات لم ۱۳.۱.۳ آمده است، داریم، $A \subset J^-(S)$. از این رو، با توجه به لم ۱۱.۱.۳، A کامل علی گذشته نیز می باشد. پس با توجه به لم ۱۴.۱.۳، A سطح کشی گذشته محسوب می شود، به عبارتی، $H^-(A) = \emptyset$ و $D^-(A) = J^-(A)$.

فرض کنید $\tilde{M} = M - J^-(A)$. از آنجایی که، در حالت خاص $J^-(A)$ بسته است، به سادگی می توان درستی اینکه $\tilde{M}$ به نوبه خود یک فضازمان هذلولوی سراسری (همبند) است را تحقق بخشید. به طوری که این سطح کشی Σ را می پذیرد. ادعا می کنیم که Σ سطح کشی برای M است. فرض کنید $\beta = (-\infty, \infty) \rightarrow M$ منحنی علی گسترش ناپذیر در جهت آینده، در M باشد. اگر $\beta \subset \tilde{M}$ ، آنگاه باید β ، Σ را قطع کند. از طرفی دیگر اگر β در نقطه ای مانند $\beta(t)$ ، $J^-(A) = D^-(A)$ را قطع کند، آنگاه $\beta|_{[t, \infty)}$ باید A را قطع کند و وارد $\tilde{M}$ شود. از این رو، Σ سطح کشی برای M است. در نهایت، $x \in S$ را ثابت در نظر بگیرید. فرض کنید α هر منحنی علی گسترش ناپذیر آینده باشد که از $x \in S$ آغاز می شود. از آنجایی که $J^+(x) \cap J^-(S)$ فشرده است، α در نهایت باید $J^-(A) \subset J^-(S)$ را باقی بگذارد و وارد $\tilde{M}$ شود. از این رو، انتهای آینده α ، Σ را قطع می کند، که این به معنای این است که $x \in J^-(\Sigma)$ از آنجایی که $x \in S$ دلخواه بود، داریم $S \subset J^-(\Sigma)$. $\square$

۲.۱.۳ واقعیت های بیشتر

واقعیت های زیر را پیش تر نیاز خواهیم داشت.

لم ۱۷.۱.۳. فرض کنید S کران آکروئال باشد و $\eta : [0, b] \rightarrow M$ ، $\eta(0) \in S$ ، ژئودزیک تهی در جهت آینده باشد. اگر η ، S - ماکسیمال باشد آنگاه $\eta \subset S$ خواهد بود. از این رو، یک S - شعاع تهی از یک کران آکروئال S الزاماً از داخل خود S گرفته خواهد شد.

اثبات. با فرض P و F به ترتیب به عنوان مجموعه‌های یکتای گذشته و آینده، همانند گزاره ۶.۱.۲، داریم $\eta \subset J^+(S) \subset I^+(S) \subset S \cup F$. فرض کنید برای یک $c \in [0, b]$ ، $\eta(c) \in F$ ، از آنجایی که $\eta(0) \in S$ داریم $I^-(\eta(0)) \subset P$. در نتیجه، منحنی زمان‌گونه‌ای از P تا $\eta(c) \in F$ وجود خواهد داشت، و با جدا سازی خواص کران‌های آکروئال، این منحنی باید S را قطع کند. و این به این معنی است که $\eta(c) \in I^+(S)$ ، بنابراین $d(S, \eta(c)) = 0 < L(\eta|_{[0, c]})$ و این در تناقض با شرط حداکثری η به عنوان S - قطعه است. $\square$

لم منحنی حدی، یک ابزار پایه‌ای در هندسه لورنتسی است. ما از آن در لم زیر استفاده خواهیم کرد، به [۵] و [۱۴] رجوع کنید.

لم ۱۸.۱.۳. متریک ریمانی کامل h روی M را ثابت در نظر بگیرید. فرض کنید $\alpha_k : [0, \infty) \rightarrow M$ یک دنباله از منحنی‌های علی گسترش ناپذیر آینده باشد، که با توجه به طول قوس محاسبه شده با h پارامتری شده است. اگر $\{\alpha_k(0)\}$ دارای نقطه حدی p باشد، منحنی علی (پیوسته) گسترش ناپذیر آینده $\alpha : [0, \infty) \rightarrow M$ با $\alpha(0) = p$ ، و زیر دنباله $\{\alpha_{k_j}\}$ به طور یکنواخت همگرا به α وجود خواهد داشت، که این امر با توجه به h ، روی بازه‌های (پارامتری) فشرده صورت می‌گیرد.

لم منحنی حدی، همراه با نتیجه زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد (به قضیه ۷.۵ [۲۴] رجوع کنید).
گزاره ۱۹.۱.۳. تابع طول قوس لورنتسی با توجه به توپولوژی همگرایی یکنواخت روی زیر مجموعه‌های فشرده، نیم پیوسته بالایی^۱ خواهد بود، به عبارت دیگر، اگر یک دنباله از منحنی‌های علی

^۱ Upper semicontinuous

$\alpha_k : [a, b] \rightarrow M$ به طور یکنواخت همگرا به منحنی علی $M : [a, b] \rightarrow M$ باشد، آنگاه

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup L(\alpha_k) \leq L(\alpha)$$

۲.۳ کره های تعمیم یافته

در این بخش، به تعاریف کره گذشته تعمیم یافته، کره آینده تعمیم یافته، کره نقطه ای و کره کشی و همچنین بیان و اثبات چند لم که در بخش بعدی مورد نیاز است پرداخته می شود.

تعریف ۱.۲.۳. با فرض اینکه $r > 0$ و C مجموعه کامل علی گذشته ناتهی باشد، کره گذشته (تعمیم یافته) به شعاع r و مرکز C مجموعه زیر است،

$$S_r^-(C) := \{x : d(x, C) = r\}$$

لم ۲.۲.۳. اگر $S_r^-(C)$ ناتهی باشد، $S_r^-(C)$ یک کران آکروئال گذشته سره غیر علی است.

اثبات. فرض کنید $S := S_r^-(C) \neq \emptyset$. در ابتدا مشاهده می کنیم که S غیر علی است. فرض کنید $y \in S$ و با استفاده از تام بودن علی گذشته C ، فرض کنید β قطعه ای زمان گونه ماکسیمال باشد که از y تا C بوده و طول آن r است. اگر $z \in J^-(y) - \{y\}$ باشد، آنگاه در صورت نیاز می توان با استفاده از برش گوشه^۱ در یک همسایگی y ، یک منحنی علی از z تا C با طولی بسیار بزرگتر از r ایجاد کرد. از این رو، $z \in S_r^-(C) = S$. این نشان می دهد که S غیر علی است. برای نشان دادن اینکه $S = \partial I^-(S)$ ، فرض کنید $x \in \partial I^-(S)$ و اینکه $\alpha : [-T, 0] \rightarrow M$ قطعه منحنی زمان گونه آینده باشد که در $\alpha(0) = x$ پایان می یابد. آنگاه $\alpha|_{[-T, 0]} \subset I^-(S)$. در نتیجه، برای هر $t > 0$ داریم $d(\alpha(-t), C) > r$ و با استفاده از پیوستگی، $d(x, C) \geq r$ را داریم. اگر $d(x, C) > r$ باشد، آنگاه $C -$ قطعه ماکسیمال گذشته از x تا C را استفاده می کنیم تا اینکه به این نتیجه برسیم $x \in I^-(S)$ یک تناقض است. بنابراین، $d(x, C) = r$ ، به عبارت دیگر، $x \in S$. این نشان می دهد که $\partial I^-(S) \subset S$.

^۱ Cutting the corner

شماره $S \subset \partial I^-(S)$ تابع آکروئال بودن S است. $\square$

لم ۳.۲.۳. فرض کنید S کره گذشته با شعاع r باشد. آنگاه S یک S - قطعه شعاعی آینده ماکسیمال به طول r از هر نقطه را در بر می‌گیرد.

اثبات. اگر $S = S_r^-(C)$ که در آن C یک مجموعه کامل علی گذشته می‌باشد، آنگاه با استفاده از دوگان زمانی در لم ۱۲.۱.۳ هر $x \in S$ به وسیله C - قطعه ماکسیمال به طول r به C متصل شده است. بر اساس تعریف $S_r^-(C)$ ، این قطعه الزاماً همانند S - قطعه ماکسیمال می‌باشد. $\square$

لم ۴.۲.۳. فرض کنید $C \subset M$ کامل علی گذشته باشد. آنگاه شعاع در مفهومی که در زیر آمده است جمع پذیر است.

$$S_a^-(S_r^-(C)) = S_{r+a}^-(C)$$

در نتیجه، برای $s > r > 0$ ، داریم، $d(S_s^-(C), S_r^-(C)) = s - r$ (به شرط اینکه $S_s^-(C) \neq \emptyset$).
 اثبات. با استفاده از لم ۱۱.۱.۳، هر کره $S_r^-(C)$ کامل علی گذشته است. از این رو $S_a^-(S_r^-(C))$ خوش تعریف است. برای نشان دادن جمع پذیر بودن شعاع، ابتدا فرض کنید $x \in S_a^-(S_r^-(C))$ با استفاده از لم ۱۲.۱.۳، x به وسیله قطعه زمان گونه‌ای به طول a به $y \in S_r^-(C)$ متصل شده است. از آنجایی که به طور مشابه y به وسیله قطعه‌ای به طول r به C متصل شده است، داریم $d(x, C) \geq r + a$.
 آنگاه، با فرض α به عنوان C - قطعه آینده ماکسیمال از x تا C ، α باید از میان $S_r^-(C)$ بگذرد. بخشی از α که قبل از $S_r^-(C)$ قرار دارد با طول a محدود شده است و بخش بعد از آن با طول r محدود شده است، بنابراین $d(x, C) \leq r + a$ خواهد بود، پس $d(x, C) = r + a$ ، به عبارت دیگر، $x \in S_{r+a}^-(C)$. حال فرض کنید $x \in S_{r+a}^-(C)$. آنگاه C - قطعه ماکسیمال α را از x تا C به طول $r + a$ خواهیم داشت. از آنجایی که هر بخش از α در C پایان می‌یابد باید C - قطعه ماکسیمال باشد، نقطه $x' \in \alpha$ چنان وجود دارد که آن بخش باقی مانده α به طول r یک C - قطعه ماکسیمال به طول r می‌باشد، و از این رو $x' \in S_r^-(C)$ است، پس $d(x, S_r^-(C)) \geq d(x, x') = a$ ، اما، داریم

$d(x, S_r^-(C)) \leq a$ ، چرا که در غیر این صورت، می توان منحنی ای از x تا C رسم کرد که طول آن بیشتر از $r + a$ باشد. بنابراین، $d(x, S_r^-(C)) = a$ ، به عبارت دیگر، $x \in S_a^-(S_r^-(C))$. از این رو،
 $S_a^-(S_r^-(C)) = S_{r+a}^-(C)$ ، بنابراین در می یابیم که برای $s > r$ ،

$$d(S_s^-(C), S_r^-(C)) = d(S_{s-r}^-(S_r^-(C)), S_r^-(C)) = s - r$$

□

تعریف ۵.۲.۳. کره آینده $S_r^+(C)$ ، که در آن C کامل علی آینده است، به روشی مشابه تعریف شده است، یعنی،

$$S_r^+(C) := \{x : d(C, x) = r\}$$

تعریف ۶.۲.۳. اگر C شامل یک نقطه تنها و یا یک سطح کشی باشد، آنگاه، همانطور که پیش تر اشاره شد C هم کامل علی گذشته و هم کامل علی آینده خواهد بود و ما $S_r^\pm(C)$ را به ترتیب کره نقطه ای و کره کشی می نامیم.

لم زیر برای آموختن مطالب بعدی اساسی است (به [۱۶] نیز رجوع کنید).

لم ۷.۲.۳. فرض کنید M کامل ژئودزیکی زمان گونه آینده (گذشته) باشد. آنگاه کره های کشی آینده (گذشته) از یک سطح کشی فشرده، سطوح کشی (فشرده) هستند.

اثبات. از آنجایی که در اثبات از مباحث استاندارد استفاده می شود، اثبات به صورت خلاصه بیان می شود. فرض کنید C یک سطح کشی فشرده بوده، و M را کامل ژئودزیکی زمان گونه آینده فرض کنید. نشان می دهیم که $S_r^+(C)$ فشرده است. با استفاده از پیوستگی تابع طول، این یک مجموعه بسته می باشد. اگر فشرده نباشد، آنگاه، با ثابت در نظر گرفتن هر متریک ریمانی کامل h روی M ، دنباله ای از نقاط $x_k \in S_r^+(C)$ وجود دارد به طوری که h - طول x_k تا C به سمت بینهایت میل کند. برای هر k ، یک C - قطعه ماکسیمال $\alpha_k : [0, t_k] \rightarrow M$ (که بر اساس طول قوس پارامتری شده است) وجود خواهد داشت، برای هر k از C تا x_k می باشد، و به طوری که $t_k \rightarrow \infty$.

با استفاده از کامل بودن C ، a_k دارای نقطه حدی $a \in C$ خواهد بود. البته ممکن است a حد یک زیر دنباله از a_k باشد، برای راحتی کار این زیر دنباله را با همان a_k در نظر می‌گیریم. در این صورت، a_k به منحنی حدی علی گسترش ناپذیر آینده $M : [0, \infty) \rightarrow M$ همگرا خواهد بود. همانند حد C - قطعه ماکسیمال، α یک C - شعاع می‌باشد. از آنجایی که α باید در آینده زمان گونه C وارد شود، زمان گونه محسوب می‌شود. چون α ژئودزیک است فرض کامل بودن این اطمینان را می‌دهد که α در نقطه‌ای مانند $\alpha(t_0)$ ، $S_r^+(C)$ را قطع می‌کند. با استفاده از ساختار α ، $\alpha_k(t_0 + 1)$ (که به طور خاص برای k های بزرگ تعریف شده است) به $I^+(S_r^+(C))$ $\alpha(t_0 + 1) \in I^+(S_r^+(C))$ همگرا می‌شود. از این رو، $\alpha_k(t_0 + 1) \in I^+(S_r^+(C))$ را برای k های بزرگ داریم، اما، از آنجایی که α_k روی $S_r^+(C)$ پایان می‌یابد، این امر ناقض آکروئال بودن $S_r^+(C)$ می‌شود.

بنابراین، $S_r^+(C)$ باید فشرده باشد. اما یک مجموعه آکروئال بدون لبه فشرده در یک فضازمان هذلولوی سراسری به سادگی یک سطح کشی در نظر گرفته می‌شود (برای مثال، با نشان دادن اینکه $H(S) = \phi$).

۳.۳ شبه کره‌های تعمیم یافته

در این بخش، به بیان تعاریف کران آکروئال گذشته (آینده) سره، حد آکروئال گذشته (آینده)، شبه کره آینده و گذشته (تعمیم یافته) و نیز بیان یک لم و قضیه‌ای که از آن لم بدست می‌آید می‌پردازیم. **تعریف ۱.۳.۳.** فرض کنید $\{S_k^- = S_{r_k}^-(C_k)\}$ دنباله‌ای از کره‌های گذشته (ناتهی) باشد. با توجه به **لم ۲.۲.۳**، هر S_k^- یک کران آکروئال گذشته سره است، و از این رو همانند گزاره **۶.۱.۲**، دارای مجموعه‌های گذشته و آینده مرتبط یکتای P_k^- و F_k^- می‌باشد که حد آن برای هر k ، $P_k^- = I^-(S_k^-)$ است. به طور مشابه و به صورت دوگان زمانی، S_k^+ که کران آکروئال آینده سره است تعریف می‌شود. **نکته ۲.۳.۳.** به یاد داشته باشید که $\{S_k^-\}$ ، در صورتی که $\{P_k^-\}$ افزایشی باشد یا $\{F_k^-\}$ ، همچنان

یکنوا خواهد بود.

تعریف ۳.۳.۳. فرض کنید $\{S_k^- = S_{r_k}^-(C_k)\}$ دنباله ای یکنواخت از کره های گذشته با شعاع

$r_k \rightarrow \infty$ باشد.

(۱) اگر $\{P_k^-\}$ دنباله ای افزایشی باشد، حد آکروئال آینده را به صورت زیر بدست می آوریم:

$$S_\infty^- = \partial \left(\bigcup_k P_k^- \right) = \partial \left(\bigcup_k I^-(S_k^-) \right)$$

(۲) اگر $\{F_k^-\}$ دنباله ای افزایشی باشد، حد آکروئال گذشته را به صورت زیر بدست می آوریم:

$$S_\infty^- = \partial \left(\bigcup_k F_k^- \right) = \partial \left(\bigcap_k J^-(S_k^-) \right)$$

در هر دو مورد (اگر ناتهی باشد)، $S_\infty^- = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k^-$ را شبه کره گذشته (تعمیم یافته) مرتبط با دنباله ای از

کره های گذشته $\{S_k^-\}$ ، می نامیم. شبه کره های آینده (تعمیم یافته)، S_∞^+ در قالب دوگان زمانی تعریف

می شوند، یعنی، به عنوان حدهای آکروئال (آینده یا گذشته) کره های آینده، $\{S_k^+\}$.

نکته ۴.۳.۳. با توجه به اینکه شبه کره های گذشته و آینده (تعمیم یافته) از نظر ساختاری کران های

آکروئال هستند بنابراین ابر سطح های C° آکروئال بدون لبه می باشند.

در زیر شاخصه های بیشتری از شبه کره های گذشته تعمیم یافته را ذکر می کنیم.

گزاره ۵.۳.۳. اگر شبه کره گذشته S_∞^- کراندار آینده باشد (به عبارت دیگر، برای یک سطح کشی S ،

$S_\infty^- \subset J^-(S)$ یک سطح کشی گذشته است یعنی، $H^-(S) = \emptyset$).

□

اثبات. این امر از لم های ۱۴.۱.۳ و ۱۶.۱.۳ نتیجه می شود.

قضیه ۶.۳.۳. فرض کنید S_∞^- شبه کره گذشته باشد. آنگاه از هر نقطه S_∞^- یک S_∞^- - شعاع تهی یا

زمان گونه در جهت آینده خارج می شود. به علاوه، اگر S_∞^- کراندار آینده باشد آنگاه هر S_∞^- - شعاع

زمان گونه خواهد بود. در این صورت، S_∞^- نیز غیر علی است.

قضیه‌ی بالا به کمک لم زیر ثابت می‌شود.

لم ۷.۳.۳. (لم S_k - قطعه). فرض کنید S_k دنباله‌ای از زیر مجموعه‌هایی با مجموعه حدی S باشد، که در آن هر نقطه $s \in S$ حد دنباله $s_k \in S_k$ می‌باشد. فرض کنید که برای هر k ، S_k - قطعه آینده ماکسیمال، یعنی α_k ، چنان وجود داشته باشد که دارای طول (لورنتسی) l_k بوده و از نقطه‌ای مانند $x_k \in S_k$ شروع شده باشد و نیز داشته باشیم $l_k \rightarrow \infty$. اگر $x_k \rightarrow x \in S$ ، آنگاه S - شعاع آینده‌ای با نقطه شروع x ، وجود خواهد داشت.

اثبات. متریک ریمانی کامل h روی M را ثابت در نظر بگیرید، برای هر k ، فرض کنید $\alpha_k : [0, T_k] \rightarrow M$ ، S_k - قطعه آینده ماکسیمال با طول لورنتسی l_k باشد که از $x_k \in S_k$ شروع می‌شود. و با توجه به طول قوس h پارامتری شده است. این دلالت بر این دارد که $T_k \rightarrow \infty$ میل می‌کند. برای یافتن علت، بنگرید که برای k های بزرگ، نقاط ابتدایی (که همگرا می‌باشند) $x_k = \alpha_k(0)$ در یک h - گوی فشرده در اطراف x قرار گرفته‌اند. اگر یک زیر دنباله از T_{k_j} مانند T_{k_j} کراندار باشد، نقاط پایانی $\alpha_{k_j}(T_{k_j})$ نیز در h - گوی فشرده در اطراف x_∞ گنجانده می‌شدند. آنگاه با استفاده از پیوستگی، d در حاصلضرب چنین گوی‌هایی کراندار می‌شد، و داریم $l_{k_j} = d(x_{k_j}, \alpha_{k_j}(T_{k_j})) \leq C$ و نیز می‌دانیم $l_k \rightarrow \infty$ که این تناقض است.

با بسط دادن دلخواه $\alpha_k(S)$ در جهت آینده و به کار گرفتن لم منحنی حدی برای زیر دنباله $\alpha_{k_j} : [0, \infty) \rightarrow M$ ، یک منحنی حدی علی C° گسترش ناپذیر آینده $\alpha : [0, \infty) \rightarrow M$ که از $\alpha(0) = x \in S$ شروع می‌شود وجود دارد، به طوری که $\{\alpha_{k_j}\}$ به طور یکنواخت با توجه به متر h روی بازه‌های (پارامتری) فشرده به سمت α همگرا می‌باشد.

$y \in S$ را ثابت در نظر بگیرید. با توجه به فرض، دنباله‌ای مانند $y_k \in S_k$ وجود دارد، به طوری که $y_k \rightarrow y$. برای هر $T > 0$ ، $\alpha_k(T)$ برای k های بزرگ تعریف شده است، و بنا به ویژگی نیم پیوسته بالایی طول قوس و نیم پیوسته پایینی d ، داریم،

$$\begin{aligned}
L(\alpha|_{[\circ, T]}) &\geq \lim_{j \rightarrow \infty} \sup L(\alpha_{k_j}|_{[\circ, T]}) \\
&\geq \lim_{j \rightarrow \infty} \inf d(S_{k_j}, \alpha_{k_j}(T)) \\
&\geq \lim_{j \rightarrow \infty} \inf d(y_{k_j}, \alpha_{k_j}(T)) \\
&\geq d(y, \alpha(T))
\end{aligned}$$

از آنجایی که $y \in S$ دلخواه است، نتیجه می گیریم که برای تمامی مقادیر $T > \circ$ داریم

$$\square \quad L(\alpha|_{[\circ, T]}) = d(S, \alpha(T)) \text{ و بنابراین } \alpha \text{ یک } S \text{ - شعاع است.}$$

حال اثبات قضیه ۶.۳.۳ را ارائه می دهیم.

اثبات قضیه ۶.۳.۳: بنا به گزاره ۱۵.۱.۲، هر نقطه $x \in S_{\infty}^{-}$ حد دنباله ای از نقاط

آن r_k بوده و از $x_k \in S_k^{-} = S_{r_k}^{-}(C_k)$ است. بنا به ۳.۲.۳، یک S_k^{-} - قطعه آینه ماکسیمال وجود دارد که طول آن r_k بوده و از x_k آغاز می شود. بنابراین، لازم است لم ۷.۳.۳ را به کار گیریم تا به این نتیجه برسیم که برای هر نقطه S_{∞}^{-} یک S_{∞}^{-} - شعاع آینه وجود دارد. حال فرض کنید که S_{∞}^{-} توسط یک سطح کشی S آینه کراندار شده است، به عبارتی، $S_{\infty}^{-} \subset J^{-}(S)$. اگر η یک S_{∞}^{-} - شعاع آینه باشد، آنگاه η باید آینه زمان گونه S را قطع کند و وارد آن شود. در حالت خاص، η باید S_{∞}^{-} را ترک کند و از این رو بنا به لم ۱۷.۱.۳، η زمان گونه است. اینکه S_{∞}^{-} در این حالت غیر علی است از حذف گوشه ها نتیجه می شود؛ فرض کنید $M \rightarrow [\circ, \infty)$ یک S_{∞}^{-} - شعاع آینه زمان گونه باشد که از $x \in S_{\infty}^{-}$ آغاز می شود. آنگاه، بنا به تعریف هر قطعه اولیه $M \rightarrow [\circ, T)$ ، $\eta : [\circ, T)$ - قطعه ماکسیمال است، به عبارتی، $\eta|_{[\circ, T]}$ طولانی ترین منحنی بین S_{∞}^{-} تا $\eta(T)$ است. اگر در آنجا نقطه ای مانند $\{x\} - J^{-}(x) \cap S_{\infty}^{-}$ وجود داشت، (آنگاه با حذف گوشه نزدیک به x) می توانستیم منحنی بزرگتر از y و از این رو از S_{∞}^{-} تا $\eta(T)$ رسم کنیم.

۴.۳ شبه کره‌های شعاعی و کشی

در این بخش دو دسته مهم و ملموس از شبه کره‌ها را می‌سازیم. دسته اول، شبه کره شعاعی است که به صورت حد کره‌های نقطه‌ای در امتداد یک شعاع ساخته می‌شود و به عنوان یک سطح تراز از تابع بوسمان در نظر گرفته می‌شود (مباحث بیشتر در این مورد را در ادامه می‌خوانیم). دسته دوم، شبه کره کشی می‌باشد که از یک سطح کشی فشرده، S ، ساخته می‌شود و دنباله آن کره‌های کشی آینده هستند.

۱.۴.۳ شبه کره‌های شعاعی

فرض کنید $M \rightarrow [\circ, \infty) : \gamma$ شعاع زمان گونه با سرعت یکه کامل آینده باشد. آنگاه دنباله پیش شبه کره‌های شعاعی $S_k^- = S_k^-(\gamma(k))$ به ازای تمامی k ، شرط $S_k^- \subset J^-(S_{k+1}^-)$ را برآورد می‌کند. برای اثبات این امر اگر $a \in S_k^- = \{x : d(x, \gamma(k)) = k\}$ باشد، با استفاده از نامساوی مثلث معکوس داریم،

$$d(a, \gamma(k+1)) \geq d(a, \gamma(k)) + d(\gamma(k), \gamma(k+1)) = k+1,$$

که از آن نتیجه می‌شود $a \in J^-(S_{k+1}^-)$. بنابراین، با توجه به تبصره ۱۳.۱.۲، دنباله $P_k^- = I^-(S_k^-)$ افزایشی است، و ما را به تعریف زیر سوق می‌دهد.

تعریف ۱.۴.۳. (شبه کره شعاعی^۱). فرض کنید $M \rightarrow [\circ, \infty) : \gamma$ شعاع ژئودزیک زمان گونه با سرعت یکه و کامل آینده باشد. آنگاه دنباله پیش شبه کره‌های شعاعی، $\{S_k^-\} := \{S_k^-(\gamma(k))\}$ ، با گذشته‌های افزایشی $\{P_k^-\} = \{I^-(S_k^-)\}$ ، یکنوا است و شبه کره شعاعی مرتبط با γ (شبه کره شعاعی گذشته) را به عنوان حد آکروئال آینده به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$S_\infty^-(\gamma) = \partial \left(\bigcup_k P_k^- \right) = \partial \left(\bigcup_k I^-(S_k^-) \right).$$

^۱ Ray Horosphere

به یاد داشته باشید $S_{\infty}^{-}(\gamma)$ ناتهی است، چرا که بنا به گزاره ۱۵.۱.۲ که $\gamma(0) \in S_{\infty}^{-}(\gamma)$ است برای تمام $k, \gamma(0) \in S_k^{-}$ می باشد. شبه کره شعاعی آینده $S_{\infty}^{+}(\gamma)$ به صورت دوگان زمانی تعریف می شود.

با به کار گیری گزاره ۵.۳.۳ و قضیه ۶.۳.۳ داریم:

لم ۲.۴.۳. $S_{\infty}^{-}(\gamma)$ یک ابر سطح C° آکروئال بدون لبه است که از هر یک از نقاطش یک $S_{\infty}^{-}(\gamma)$ - شعاع آینده خارج می شود. اگر $S_{\infty}^{-}(\gamma)$ به وسیله یک سطح کشی کراندار آینده باشد، آنگاه هر یک از این شعاع ها زمان گونه است و $S_{\infty}^{-}(\gamma)$ یک سطح کشی گذشته غیر علی است. در حالت کلی، γ خود یک $S_{\infty}^{-}(\gamma)$ - شعاع است.

یک شرایط پایه ای وجود دارد که در آن شبه کره های شعاعی کراندار آینده شده اند.

لم ۳.۴.۳. فرض کنید γ یک S - شعاع زمان گونه کامل آینده باشد، برای یک سطح کشی S ، و فرض کنید $S_{\infty}^{-} = S_{\infty}^{-}(\gamma)$ باشد. آنگاه:

(۱) به ازای تمام مقادیر k ، $S_k^{-} \subset J^{-}(S)$ و از این رو $S_{\infty}^{-} \subset J^{-}(S)$.

(۲) $S_{\infty}^{-} \subset I^{-}(\gamma)$ و از هر نقطه S_{∞}^{-} ، یک S_{∞}^{-} - شعاع آینده زمان گونه خارج می شود.

اثبات. برای اثبات (۱)، توجه کنید که با پارامتری کردن γ با استفاده از طول قوس، این واقعیت که γ

یک S - شعاع است، به ازای همه $x \in S$ به این صورت معنی می شود که

$d(x, \gamma(k)) \leq d(\gamma(0), \gamma(k)) = k$. بنابراین، برای هر $y \in I^{+}(S)$ ، $d(y, \gamma(k)) < k$ را داریم،

پس $S_k^{-} = S_k^{-}(\gamma(k)) \subset J^{-}(S)$. با گرفتن حد آکروئال از مجموعه های مشمول در مجموعه بسته

$J^{-}(S)$ ، داریم $S_{\infty}^{-} \subset J^{-}(S)$. برای اثبات (۲)، توجه کنید که هر پیش شبه کره S_k^{-} یک کره گذشته

از نقطه ای روی γ است و بنابراین در $I^{-}(\gamma)$ قرار دارد، این نتیجه می دهد که $S_{\infty}^{-} \subset \overline{I^{-}(\gamma)}$. بنا به

قضیه ۶.۳.۳، از هر نقطه S_{∞}^{-} یک شعاع آینده خارج می شود. در مورد شبه کره های شعاعی، هر چنین

شعاعی به عنوان منحنی حدی از دنباله ای از S_k^{-} - قطعات ماکسیمال بدست می آید که به طور کامل

در $I^-(\gamma)$ قرار گرفته‌اند. از این رو، هر S_∞^- - شعاع در $\overline{I^-(\gamma)}$ قرار دارد. از آنجایی که S_∞^- کراندار آینده می‌باشد، همه‌ی S_∞^- - شعاع‌ها زمان‌گونه هستند. فرض کنید $x \in S_\infty^- \cap \partial I^-(\gamma)$ باشد، در این صورت S_∞^- - شعاع آینده که از x شروع می‌شود در $\overline{I^-(\gamma)}$ قرار می‌گیرد، بنابراین باید در $\partial I^-(\gamma)$ باقی بماند. اما از آنجایی که این شعاع زمان‌گونه است، داریم، $S_\infty^- \subset I^-(\gamma)$. $\square$

نکته‌ای در مورد توابع بوسمان. فرض کنید یک شعاع ژئودزیک زمان‌گونه با سرعت یک و کامل

آینده، $M \rightarrow [0, \infty)$ ، γ ، در فضا-زمان هذلولوی سراسری M داشته باشیم، تابع بوسمان مرتبط $b = b_\gamma$ به صورت زیر تعریف شده است.

$$b(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} [k - d(x, \gamma(k))].$$

بر خلاف حالت هندسه ریمانی، اگرچه توابع پیش بوسمان $b_k(x) = k - d(x, \gamma(k))$ در همه جا پیوسته هستند، اما حد بالا در حالت کلی این گونه نیست (به [۶] رجوع کنید). در حالت خاص، با وجود اینکه مجموعه‌های تراز در $^\circ$ و از توابع پیش بوسمان یعنی $S_k^-(\gamma(k)) = \{b_k = 0\}$ کره‌های گذشته خوش رفتار هستند، اما مجموعه سطح بوسمان $\{b = 0\}$ بدون افزودن مفروضات بیشتر، کمتر شناخته شده‌اند. در فضاهایی که شرط هم-شعاع به اصطلاح زمان‌گونه برقرار باشد، توابع پیش بوسمان به طور یکنواخت روی زیر مجموعه‌های فشرده به b همگرا می‌شوند، و از این رو چنین فضاهایی b پیوسته است، رجوع کنید به، [۶]، [۱۰] و [۱۸]. در حالت خاص، اگر فرض کنیم که شرط هم-شعاع زمان‌گونه روی $I^-(\gamma)$ صدق کند، آنگاه با استفاده از همگرایی یکنواخت b_k به b روی $I^-(\gamma)$ می‌توان نشان داد که مجموعه سطح بوسمان $\{b = 0\}$ و شبه کره شعاعی $S_\infty^-(\gamma)$ با هم تطابق دارند. به هر جهت، به دور از شرایط خاص [۶] و [۱۲]، می‌توان نشان داد شعاع زمان‌گونه در حالت کلی فقط در همسایگی $((0, \infty))$ γ برقرار است [۱۰]. فلسفه تحقیقات پیش رو بررسی توابع بوسمان لورنتسی و پیچیدگی‌های تحلیلی آنها، و نیز تمرکز مستقیم روی خواص همگرایی دنباله‌هایی از کره‌ها می‌باشد. این روش ذاتاً مشابه برخورد سنتی با شبه کره‌ها در هندسه هذلولوی است. بنا به روش اتخاذ شده در

اینجا، ترتیب حد کره ها نتیجه علّیت خمینه های لورنتسی است، بخصوص در گذار از خواص کران های آکرونال.

۲.۴.۳ شبه کره های کشی

برای این ساختار، با یک سطح کشی فشرده S در فضا زمان کامل ژئودزیکی زمان گونه آینده M آغاز می کنیم. ایده ساخت شبه کره های کشی جایگزین کردن دنباله نقاط مرکزی $\{\gamma(k)\}$ بیان شده در ساختار شبه کره شعاعی، با دنباله کره های شعاعی آینده $\{S_k^+(S)\}$ است، آنگاه به طور مشابه حد کره های گذشته نیز از این دنباله گرفته خواهند شد. به یاد داشته باشید، بنا به لم ۷.۲.۳، هر $S_k^+(S)$ یک سطح کشی فشرده است، و، در حالت خاص، کامل علّی گذشته می باشد. دنباله پیش شبه کره های کشی را این گونه تعریف می کنیم

$$\tilde{S}_k := S_k^-(S_k^+(S)).$$

باز هم هر $\tilde{S}_k$ کران آکرونال گذشته سره با مجموعه های متناظر گذشته و آینده $\tilde{P}_k = I^-(\tilde{S}_k)$ و $\tilde{F}_k$ می باشد. همانند پیش شبه کره های شعاعی، دنباله پیش شبه کره های کشی یکنوا است، اما جهت آن

برعکس است. برای اثبات این مورد، فرض کنید $x \in S_{k+1}^+(S)$ است. از این رو،

$d(x, S_{k+1}^+(S)) = k + 1$. اگر α یک منحنی زمان گونه آینده از x تا $S_k^+(S)$ باشد که این مسافت را

می پیماید، آنگاه نقطه منحصر به فرد $x_k := \alpha \cap S_k^+(S)$ وجود خواهد داشت. همچنین فرض کنید،

α_k^- بخشی از α قبل از x_k باشد و α_k^+ بخش بعد از آن باشد. با استفاده از (دوگان زمانی) لم ۴.۲.۳،

داریم $d(S_k^+(S), S_{k+1}^+(S)) = 1$ و از این رو $L(\alpha_k^+) \leq 1$. بنابراین،

$$L(\alpha_k^-) = L(\alpha) - L(\alpha_k^+) \geq (k + 1) - 1 = k$$

از این رو، $d(x, S_k^+(S)) \geq L(\alpha_k^-) \geq k$ ، که دلالت بر این دارد که $x \in J^-(\tilde{S}_k)$ می باشد.

از آنجایی که x دلخواه بوده، این نشان می دهد که $\tilde{S}_{k+1} \subset J^-(\tilde{S}_k)$. بنابراین، با توجه به تبصره

۱۳.۱.۲، $\{\tilde{P}_k\} = \{I^-(\tilde{S}_k)\}$ کاهشی بوده، یا، به طور معادل $\{\tilde{F}_k\}$ افزایشی است، و بنابراین، حد آکروئال خوش تعریف است و داریم، $S_\infty^-(S) = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{S}_k$. به طور خلاصه، این امر ما را به تعریف زیر سوق می‌دهد.

تعریف ۴.۴.۳. (شبه کره کشی^۱). فرض کنید M کامل ژئودزیکی زمان گونه آینده و شامل سطح کشی فشرده S باشد. آنگاه دنباله پیش شبه کره‌های کشی گذشته، $\{\tilde{S}_k\} := \{S_k^-(S_k^+(S))\}$ یکنوا است، که با دنباله کاهشی از مجموعه‌های گذشته $\{\tilde{P}_k\} = \{I^-(\tilde{S}_k)\}$ ، یا به طور معادل، دنباله افزایشی از مجموعه‌های آینده $\{\tilde{F}_k\}$ همراه خواهد بود، و ما شبه کره گذشته مرتبط با S (شبه کره کشی گذشته) را به وسیله حد آکروئال گذشته تعریف خواهیم کرد،

$$S_\infty^-(S) := \partial \left(\bigcup_k \tilde{F}_k \right) = \partial \left(\bigcap_k J^-(\tilde{S}_k) \right).$$

از آنجایی که S سطح کشی فشرده است، با کمک تکنیک‌های استاندارد می‌توانیم یک S - شعاع زمان گونه آینده γ را بسازیم (به لم ۴ در [۴] رجوع شود). آنگاه برای همه مقادیر k داریم $\gamma(0) \in \tilde{S}_k$ و از این رو $\gamma(0) \in S_\infty^-(S)$ را خواهیم داشت. در حالت خاص، $S_\infty^-(S)$ همواره ناتهی است. در ادامه برخی از خواص اولیه $S_\infty^-(S)$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

لم ۵.۴.۳. فرض کنید $S_\infty^- = S_\infty^-(S)$ است.

(۱) S_∞^- به وسیله S کراندار آینده است.

(۲) S_∞^- یک سطح کشی گذشته غیر علی است که از هر نقطه آن یک S_∞^- - شعاع آینده زمان گونه خارج می‌شود.

(۳) اگر γ ، S - شعاع آینده باشد. آنگاه $S_k^-(\gamma(k)) \subset J^-(\tilde{S}_k)$ و $S_\infty^-(\gamma) \subset J^-(S_\infty^-(S))$.

^۱ Cauchy Horosphere

اثبات. با توجه به تعاریف کاملاً مشخص است که برای همه مقادیر k ، $\tilde{S}_k^- \subset J^-(S)$ است. از این رو، (۱) از گزاره ۱۵.۱.۲ نتیجه می‌شود. آنگاه (۲) از (۱)، گزاره ۵.۳.۳ و قضیه ۶.۳.۳ نتیجه می‌شود. در نهایت، برای درک (۳)، فرض کنید γ ، $S -$ شعاع آینده است، که باید زمان‌گونه باشد. با پارامتری کردن γ به وسیله طول قوس خواهیم دید که $\gamma(k) \in S_k^+(S)$ است. سپس در می‌یابیم که کره نقطه‌ای گذشته $(\gamma(k))$ از $S_k^-(\gamma(k))$ به گذشته پیش شبه کره کشی گذشته $\tilde{S}_k = S_k^-(S_k^+(S))$ متمایل است. (اگر $a \in S_k^-(\gamma(k))$ ، آنگاه، از آنجایی که $\gamma(k) \in S_k^+(S)$ است، مسافت بین a تا $S_k^+(S)$ باز هم کوچکتر از k است.) بنابراین، برای همه‌ی مقادیر k ، شبه کره‌ها

$$S_k^-(\gamma(k)) \subset J^-(\tilde{S}_k)$$

را برآورد می‌کنند. رابطه شبه کره در (۳) تابع مورد مذکور و گزاره ۱۵.۱.۲ است. $\square$

نکته ۶.۴.۳. حال فرض کنید M کامل ژئودزیک زمان‌گونه گذشته (آینده) باشد. آنگاه با توجه به لم ۷.۲.۳، هر کره کشی گذشته $\tilde{S}_k$ یک سطح کشی فشرده خواهد بود. در حالت خاص، هر $\tilde{S}_k$ آینده سره است، به عبارتی $\tilde{F}_k = I^+(\tilde{S}_k)$ ، و از این رو بنا به معادله ۴.۴.۳

$$S_\infty^-(S) = \partial \left(\bigcup_k I^+(\tilde{S}_k) \right).$$

با استفاده از گزاره ۱۵.۱.۲، در این حالت، $S_\infty^-(S)$ حد دنباله‌ای سطوح کشی فشرده است. به هر جهت، در حالت کلی $S_\infty^-(S)$ ممکن است کشی، یا، فشرده نباشد. برخی معیارها برای تراکمی بودن $S_\infty^-(S)$ در بخش ۴.۳ در نظر گرفته شده‌اند.

در فصل بعدی، برخی شاخصه‌های سختی و تحدب^۱ شبه کره‌های تعمیم یافته و شبه کره‌های کشی را در حالت خاص، استدلال خواهیم کرد.

^۱ Convexity And Rigidity

فصل چهارم

سختی و تحدّب

این فصل شامل پنج بخش است و بیشتر مطالب آن با بهره بردن از مرجع‌های [۲]، [۴]، [۵]، [۹]، [۱۵]، [۱۶] و [۲۴] بیان می‌شود. بخش اول، به بحث در مورد فرضیه نابرابری انحناى متوسط ضعیف که در [۱۱] توسط اشنبرگ^۱ در مفهوم محمل برای ابرسطح‌های ناهموار خمینه‌های ریمانی بیان شده است می‌پردازد و مطالبی که در [۲] توسط اندرسون^۲، هوارد^۳ و گالووی^۴ شرایط مرتبط را برای ابرسطح‌های ناهموار خمینه‌های لورنتسی مطرح کردند اختصاص دارد. در بخش دوم، یک نتیجه شکافندگی را برای شبه کره‌های تعمیم یافته بیان می‌کنیم. در بخش سوم همچنین به کاربرد شبه کره‌های کشی پرداخته می‌شود در این بخش قضیه‌ای را بیان و ثابت می‌کنیم که در بخش بعدی اثباتی جایگزین برای آن ارائه می‌شود و بر پایه قضیه شکافندگی لورنتسی بنا شده است. در بخش چهارم، به بحث و

^۱ Eschenburg

^۲ Andersson

^۳ Howard

^۴ Galloway

بررسی خطها^۱ و قضیه شکافندگی می‌پردازیم. بخش پنجم و آخر، به بیان یک مسأله پرداخته می‌شود.

۱.۴ نابرابری انحناى متوسط ضعیف

در این بخش، برخی تعاریف پایه‌ای در مورد ابر سطح فضاگونه، انحناى متوسط ابر سطح فضاگونه، ابر سطح محمل گذشته و آینده و یک قضیه مهم را از مراجع [۱۱]، [۵] و [۲] یاد آوری می‌کنیم. برای اتفاق نظر روی علامت‌ها، ابر سطح فضاگونه هموار را با Σ در فضا زمان M نمایش می‌دهیم، همراه با متریک القایی h و فرم اساسی دوم K .

تعریف ۱.۱.۴. برای برخی $X, Y \in T_p \Sigma$ ، $K(X, Y) = h(\nabla_X u, Y)$ را داریم، که در آن u میدان برداری یکه زمان‌گونه در جهت آینده متعامد (قائم) بر Σ است. آنگاه،

$$H = \Sigma \text{ انحناى متوسط} = \text{tr}_\Sigma K = \text{div}_\Sigma u.$$

ما نسخه ضعیف تری از ابر سطح‌های فضاگونه مورد استفاده در [۲]، [۱۲] و [۱۸] را فراهم کرده‌ایم؛ برای اطلاعات بیشتر به [۵]، فصل ۱۴ رجوع کنید.

تعریف ۲.۱.۴. یک ابر سطح فضاگونه C° در M زیر مجموعه $S \subset M$ می‌باشد که موضعاً غیر علی و بدون لبه است، به عبارتی، به ازای هر $p \in S$ ، همسایگی U از p در M وجود دارد به طوری که $U \cap S$ در U غیر علی و بدون لبه است.

نکته ۳.۱.۴. یک ابر سطح فضاگونه C° لزوماً یک ابر سطح C° نشانده در M است، که این امر از [۲۴]، گزاره ۵.۸ نتیجه می‌شود. به یاد داشته باشید که همچنین S_∞^- - شبه کره‌های گذشته کراندار آینده، که (به طور کلی) غیر علی بودند، ابر سطح‌های فضاگونه C° هستند.

تعریف ۴.۱.۴. فرض کنید S و S' دو ابر سطح فضاگونه C° باشند که در نقطه $q \in S \cap S'$ برخورد می‌کنند. گوئیم S' به طور موضعی به آینده S در نزدیکی q وارد می‌شود اگر، برای یک همسایگی U از q که در آن S غیر علی و بدون لبه است، داشته باشیم $S' \cap U \subset J^+(S, U)$. در این حالت، S' را نیز

^۱ Lines

ابرسطح محمل آينده برآى S در q مى‌ناميم.

نکته ۵.۱.۴. گوييم ابرسطح فضاگونه C° ، S ، داراى انحناى متوسط کمتر يا مساوى a در مفهوم محمل است اگر برآى همه $q \in S$ و هر $\varepsilon > 0$ ، ابرسطح فضاگونه محمل آينده هموار (حداقل از کلاس C^2) $S_{q,\varepsilon}$ برآى S در q با انحناى متوسط $H_{q,\varepsilon}$ چنان وجود داشته باشد که در رابطه زير صدق کند

$$H_{q,\varepsilon} \leq a + \varepsilon.$$

تذکر ۶.۱.۴. با استفاده از دوگان زمانى، مفهوم ابرسطح محمل گذشته برآى S در $q \in S$ را مى‌توان تعريف کرد، و مى‌توانيم در مورد ابرسطح‌هاى فضاگونه C° ، S ، که داراى انحناى متوسط بزرگتر يا مساوى a در مفهوم محمل است بحث کنيم (البته با توجه به معکوس کردن نابرابرى ۵.۱.۴، برآى حالت گذشته داريم $(H_{q,\varepsilon}(q) \geq a - \varepsilon)$)

قضيه ۷.۱.۴. فرض کنيد S_1 و S_2 ابرسطح‌هاى فضاگونه C° باشند به طوري که، برآى برخى مقادير ثابت a ، داشته باشيم،

(۱) S_2 موضعاً به آينده S_1 در نزديکى $S_1 \cap S_2$ $q \in S_1 \cap S_2$ وارد مى‌شود.

(۲) S_2 داراى انحناى متوسط $H_2 \leq a$ در مفهوم محمل است.

(۳) S_1 داراى انحناى متوسط $H_1 \geq a$ در مفهوم محمل است (با کران‌هاى هسيان يک طرفه^۱).

آنگاه همسايگى U از q وجود دارد، به طوري که $S_1 \cap U = S_2 \cap U$ و اين اشتراک يک ابرسطح فضاگونه‌ى هموار با انحناى متوسط $H = a$ است.

□

اثبات. رجوع کنيد به مرجع [۲].

^۱ One-sided Hessian bounds

۲.۴ یک نتیجه شکافندگی برای شبه کره‌های تعمیم یافته

با اثبات یک خاصیت پایه‌ای برای شبه کره‌های تعمیم یافته آغاز می‌کنیم.

قضیه ۱.۲.۴. فرض کنید M فضا زمان کامل ژئودزیکی زمان گونه آینده باشد که در شرایط همگرایی زمان گونه صدق می‌کند، یعنی به ازای تمامی بردارهای زمان گونه X ، $Ric(X, X) \geq 0$. اگر S_{∞}^{-} شبه کره گذشته باشد و هر S_{∞}^{-} شعاع آینده آن زمان گونه باشد (برای مثال، اگر S_{∞}^{-} کراندار آینده باشد) آنگاه، S_{∞}^{-} دارای انحنای متوسط بزرگتر یا مساوی صفر در مفهوم محمل می‌باشد (با کران‌های هسیان یک طرفه).

اثبات. فرض کنید $x \in S_{\infty}^{-}$ است. بنا به قضیه ۶.۳.۳، S_{∞}^{-} شعاع زمان گونه آینده، γ ، را داریم که از x آغاز می‌شود. با استفاده از فرض کامل بودن، γ کامل آینده است، و با استفاده از پارامتری کردن با توجه به طول قوس، داریم $M \rightarrow [\infty, 0]$. γ از آنجایی که $\gamma|_{[0, r]}$ یک S_{∞}^{-} - قطعه ماکسیمال است، در می‌یابیم که کره گذشته $S_r^{-}(\gamma(r))$ یک سطح محمل گذشته برای S_{∞}^{-} در x است. از آنجایی که نقاط بریدگی در طول $\gamma|_{[0, r]}$ به سمت $\gamma(r)$ وجود ندارد، تابع مسافت $d(x, \gamma(r))$ در یک همسایگی $\gamma([0, r])$ هموار بوده، و در حالت خاص، کره گذشته $S_r^{-}(\gamma(r))$ در نزدیکی x هموار می‌باشد. آنگاه، با استفاده از فرضیه انحناء، تئوری قیاس پایه‌ای (رجوع شود به [۹]) نتیجه می‌گیریم که $S_r^{-}(\gamma(r))$ دارای انحنای متوسط بزرگتر یا مساوی $\frac{-n}{r}$ در x است، (که در آن $M = M^{n+1}$ است). از آنجایی که r می‌تواند به دلخواه بزرگ گرفته شود، و از آنجایی که x دلخواه بود، این نتیجه را می‌گیریم که S_{∞}^{-} دارای انحنای متوسط یا بزرگتر مساوی صفر در مفهوم محمل است. بخشی که مربوط به کران‌های هسیان یک طرفه است از [۲]، گزاره ۳.۵ و فرض اینکه همه S_{∞}^{-} شعاع‌های آینده زمان گونه هستند نتیجه می‌شود. $\square$

گزاره زیر نابرابری انحنای متوسط محمل بیان شده در قضیه C در [۱۵] را به صورت کلی تعمیم

می‌دهد.

گزاره ۲.۲.۴. فرض کنید M هذلولوی سراسری باشد و فضازمان کامل ژئودزیکی زمان گونه آینده شرط همگرایی زمان گونه را برآورد کند. فرض کنید S ابرسطح فضاگونه C^0 ، کامل علی آینده، غیر علی و همبند باشد که در مفهوم محمل دارای انحنای متوسط کمتر یا مساوی صفر است. اگر یک S - شعاع آینده از S خارج شود، آنگاه S ابرسطح فضاگونه کامل ژئودزیکی، ماکسیمال، هموار، و آینده علی S شکافته می‌شود؛ یعنی، $(J^+(S), g)$ به وسیله‌ی تابع نمایشی نرمال، با $([0, \infty) \times S, -dt^2 \oplus h)$ ایزومتر است، که در آن h متریک ریمانی القا شده روی S است.

اثبات. با استفاده از دوگان زمانی در **لم ۱۴.۱.۳**، S سطح کشی آینده است، یعنی $H^+(S) = \emptyset$. از این رو، $J^+(S) \subset D(S)$ است و با محدود کردن آن فضازمان به $D(S)$ ، می‌توانیم بدون از دست دادن این کلیت فرض کنیم که S یک سطح کشی برای M است و فرض را کامل کنیم.

S - شعاع آینده γ را ثابت در نظر بگیرید، که باید زمان گونه، و از این رو کامل آینده باشد. فرض کنید $S_\infty^- = S_\infty^-(\gamma)$ شبه کره شعاعی گذشته مرتبط با آن باشد. بنا به **لم ۲.۴.۳** و **۶.۳.۴**، S_∞^- غیر علی است، و با $J^-(S)$ همراه است، و همه S_∞^- - شعاع‌های آینده زمان گونه هستند. پس قضیه **۱.۲.۴** بیان‌گر این است که در مفهوم محمل S_∞^- دارای انحنای متوسط بزرگتر یا مساوی صفر، با کران‌های هسیان یک طرفه است. فرض کنید S^- مؤلفه همبندی S_∞^- باشد که شامل $\gamma(0)$ است. آنگاه $S \cap S^-$ ناتهی و بسته است. از آنجایی که S موضعاً با S^- در آینده نزدیک هر نقطه از اشتراک $x \in S \cap S^-$ تلاقی می‌کند، قضیه **۷.۱.۴** نتیجه می‌دهد که، برای برخی از همسایگی‌های باز U از x ، داریم مجموعه $S \cap U = S^- \cap U$ ، هموار، فضاگونه و ماکسیمال است. در حالت خاص، این نتیجه می‌دهد که $S \cap S^-$ در هر دو فضای S و S^- باز می‌باشد، بنابراین $S = S^-$ هموار، فضاگونه، و ماکسیمال است. در نتیجه، S_∞^- - شعاع‌های آینده زمان گونه از هر نقطه $S = S^-$ نیز S - شعاع‌ها هستند. از آنجایی که S هموار است، این‌ها دقیقاً ژئودزیک نرمال آینده با مبدأ S می‌باشند. کامل بودن

ژئودزیک S و شکافتگی $J^+(S)$ در نتیجه قضیه C در [۱۵] صورت گرفته‌اند. (در مقابل، در این مرحله می‌توان به صورت مستقیم تکنیک‌های معادله ریکاتی استاندارد را برای ابرسطح‌های فضاگونه هموار $S_t = \{p \in J^+(S) : d(S, p) = t\}$ اعمال کرد؛ به [۱۵]، لم ۳.۱ رجوع شود). $\square$

اکنون به کمک نتایج قبلی می‌توان نتیجه شکافتگی زیر را در رابطه با شبه‌کره‌های تعمیم یافته بدست آورد.

قضیه ۳.۲.۴. فرض کنید M فضازمان کامل ژئودزیکی زمان‌گونه و هندلولوی سراسری باشد، که شرط همگرایی زمان‌گونه را برآورد می‌کند. همچنین S_∞^- را یک شبه‌کره گذشته (تعمیم یافته) کراندار آینده در نظر بگیرید که یک S_∞^- - شعاع گذشته را در بردارد. آنگاه S_∞^- سطح کشی کامل ژئودزیکی فضاگونه هموار است، و M در امتداد S_∞^- شکافته می‌شود، به عبارت دیگر، (M, g) با $(\mathbb{R} \times S_\infty^-, -dt^2 \oplus h)$ ایزومتر است، که در آن h متریک القایی روی S_∞^- محسوب می‌شود.

اثبات. بنا به قضیه ۶.۳.۳، S_∞^- ابرسطح فضاگونه C° غیر علی سراسری است. به علاوه، بنا به قضیه ۱.۲.۴، S_∞^- انحنا متوسط محمل بزرگتر یا مساوی صفر دارد (با کران‌های هسیان یک طرفه). فرض کنید S^- مؤلفه همبندی S_∞^- باشد که از آن یک S_∞^- - شعاع گذشته خارج می‌شود. لم ۱۶.۱.۳ بیان می‌کند که S^- کامل علی گذشته است. آنگاه، با استفاده از دوگان زمانی در گزاره ۲.۲.۴، داریم که S^- یک ابرسطح فضاگونه کامل ژئودزیکی، ماکسیمال، غیر علی و هموار می‌باشد، به طوری که $(J^-(S^-), g)$ به کمک تابع نمایی با $((-\infty, 0] \times S^-, -dt^2 \oplus h)$ ایزومتر است، که در آن h متریک القایی روی S^- محسوب می‌شود. در ادامه از قضیه ۶.۳.۳ و هموار بودن S^- نتیجه می‌شود که همه ژئودزیک‌های نرمال آینده با نقطه شروع در S^- ، S^- - شعاع‌های زمان‌گونه کامل آینده می‌باشند. در نتیجه، با روشی مشابه می‌توان نشان داد که کل برد تابع نمایی یعنی $N(S^-)$ به صورت

$$N(S^-), g) \approx (\mathbb{R} \times S^-, -dt^2 \oplus h)$$

این ساختار حاصلضربی و کامل بودن

ژئودزیکی S^- بیان‌گر این است که $N(S^-)$ کامل ژئودزیکی و هذلولوی سراسری است (رجوع شود به [۵]، بخش ۳.۶). این نتیجه می‌دهد که $N(S^-) = M$ و S^- یک سطح کشی برای M است. در نهایت، اگر $x \in S_\infty^- \setminus S^-$ ، آنگاه $x \in I^\pm(S)$ است، که ناقض آکروئال بودن S_∞^- است. بنابراین $S^- = S_\infty^-$. $\square$

از آنجایی که این یک ابرسطح C° آکروئال بدون لبه است، شبه کره فشرده S_∞^- الزاماً یک سطح کشی (فشرده) است، و از آنجا که یک S_∞^- - شعاع گذشته را در بر دارد و به سادگی کراندار آینده می‌باشد، بنابراین، نتیجه زیر را از قضیه ۳.۲.۴ بدست خواهیم آورد.

نتیجه ۴.۲.۴. فرض کنید M فضازمان کامل ژئودزیکی زمان‌گونه هذلولوی سراسری باشد که شرط همگرایی زمان‌گونه را برآورد می‌کند. اگر S_∞^- یک شبه کره گذشته در M باشد آنگاه S_∞^- سطح کشی کامل ژئودزیکی فضازمان هموار می‌باشد، و M در امتداد S_∞^- شکافته می‌شود، به عبارت دیگر، (M, g) با $(\mathbb{R} \times S_\infty^-, -dt^2 \oplus h)$ ایزومتر است، که در آن h متریک القایی روی S_∞^- است.

۳.۴ کاربرد شبه کره‌های کشی

در این بخش، ابتدا ویژگی‌های شبه کره کشی را معرفی می‌کنیم سپس، با استفاده از تعریفی که از شرط حداقل - حداکثری ارائه می‌دهیم به بیان و اثبات چند لم می‌پردازیم. در ادامه، بخش را با یک نتیجه شکافندگی دیگر پایان می‌دهیم.

فرض کنید M فضازمان کامل ژئودزیکی زمان‌گونه همراه با سطح کشی فشرده S باشد، و نیز شبه کره کشی مرتبط را $S_\infty^- = S_\infty^-(S)$ در نظر بگیرید. بنا به نتایج قبلی، برخی از ویژگی‌های S_∞^- را به طور خلاصه در زیر بیان می‌کنیم.

(۱) S_∞^- حد دنباله‌ای (ناتهی) سطوح کشی فشرده است.

(۲) S_∞^- به وسیله S و $J^-(S)$ کراندار آینده است.

(۳) S_{∞}^{-} سطح کشی گذشته است و یک S_{∞}^{-} - شعاع زمان گونه از هر نقطه آن خارج می شود.

(۴) اگر شرط همگرایی زمان گونه برقرار باشد، آنگاه S_{∞}^{-} در مفهوم محمل انحنای متوسط بزرگتر یا مساوی صفر دارد (با کران های هسیان یک طرفه).

همان گونه که می توان از نتیجه ۴.۲.۴ دریافت، فشردگی به طور خاص یک ویژگی مهم برای شبه کره ها است. اما، همان گونه که پیش تر گفته شد، با توجه به اینکه S_{∞}^{-} برابر با حد سطوح کشی فشرده است، اما لزوماً خودش در حالت کلی فشرده نیست. در اینجا، معیاری ساده برای فشردگی به واسطه شرط حداقل - حداکثری مبتنی بر سطح کشی ارائه می دهیم.

لم ۱.۳.۴. فرض کنید M کامل ژئودزیکی زمان گونه آینده همراه با سطح کشی فشرده S باشد. آنگاه $S_{\infty}^{-}(S)$ سطح کشی فشرده است اگر و تنها اگر کراندار گذشته باشد.

اثبات. یک سطح کشی به طور بدیهی محدود به گذشته S است پس کراندار گذشته است. برعکس فرض کنید که $S_{\infty}^{-}(S)$ کراندار گذشته باشد، به عبارت دیگر، برای سطح کشی S' که الزاماً فشرده نیز هست، $S_{\infty}^{-}(S) \subset J^{+}(S)$ برقرار باشد آنگاه، بنا به (۲) که در بالا بیان شد،

$S_{\infty}^{-}(S) \subset J^{+}(S') \cap J^{-}(S)$ از این رو، $S_{\infty}^{-}(S)$ ابر سطح C° آکروئال بدون لبه (بسته) می باشد که

در مجموعه فشرده قرار دارد، و در نتیجه باید سطح کشی فشرده باشد. $\square$

تعریف ۲.۳.۴. (شرط حداقل - حداکثری). فرض کنید M کامل ژئودزیکی زمان گونه آینده همراه با سطح کشی فشرده S باشد. برای هر عدد صحیح مثبت k ، $S_k := S_k^{+}(S)$ را در نظر بگیرید. گوییم شرط حداقل - حداکثری به شرطی روی S صدق می کند که $R > 0$ وجود داشته باشد، به طوری که برای همه مقادیر k داشته باشیم

$$\max_{x \in S} d(x, S_k) - \min_{x \in S} d(x, S_k) \leq R$$

تذکر ۳.۳.۴. به یاد داشته باشید که، بنا به تعریف $S_k = S_k^{+}(S)$ ، داریم $\max_{x \in S} d(x, S_k) = k$ به

سادگی دیده می شود که شرط حداقل - حداکثری برای هر سطح کشی در فضای حاصلضربی لورنتسی

$(\mathbb{R} \times N, -dt^2 + f^2(t)h)$ ، که در آن $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ و (N, h) یک خمینه ریمانی فشرده است صادق است. در حالت خاص، برای هر سطح کشی در فضای دسیت^۱ نیز صدق می‌کند.

لم ۴.۳.۴. فرض کنید M کامل ژئودزیکی زمان‌گونه آینده همراه با سطح کشی فشرده S باشد. اگر شرط حداقل- حداکثری روی S برقرار باشد، آنگاه $S_\infty^-(S)$ کراندار گذشته می‌شود و از این رو یک سطح کشی فشرده خواهد بود.

اثبات. فرض کنید که، برای مقدار $R > 0$

$$\max_{x \in S} d(x, S_k) - \min_{x \in S} d(x, S_k) = k - \min_{x \in S} d(x, S_k) \leq R.$$

به یاد داشته باشید که بنا به لم ۷.۲.۳، $S_R^-(S)$ یک سطح کشی فشرده است. از آنجایی که $S_\infty^-(S)$ حد دنباله‌ای $\tilde{S}_k S$ است، این برای نشان دادن اینکه $\tilde{S}_k \subset J^+(S_R^-(S))$ کافی است. در غیر این صورت فرض کنید، که مقادیر $\tilde{S}_k$ و $x_1 \in \tilde{S}_k$ و $x_2 \in S_R^-(S)$ با شرط $x_1 \ll x_2$ وجود داشته باشند. بنا به تعریف $S_R^-(S)$ ، یک منحنی زمان‌گونه با طول R از x_2 تا $x_3 \in S$ وجود خواهد داشت. بنابراین، منحنی زمان‌گونه از x_3 تا $x_4 \in S_k^+(S)$ با حداقل طول $\min_{x \in S} d(x, S_k^+(S))$ وجود خواهد داشت. با الحاق این منحنی‌ها، یک منحنی از $\tilde{S}_k = S_k^-(S_k^+(S))$ تا $x_1 \in \tilde{S}_k$ تا $x_4 \in S_k^+(S)$ با طولی اکیداً بیشتر از $R + \min_{x \in S} d(x, S_k^+(S))$ را خواهیم داشت، و از این رو،

$$k = d(x_1, S_k^+(S)) > R + \min_{x \in S} d(x, S_k^+(S)),$$

که یک تناقض می‌باشد. $\square$

نتیجه ۴.۲.۴ و لم ۴.۳.۴ برای اثبات قضیه زیر در مورد حدس شکافندگی بارتنیک (رجوع شود به [۴])، در رابطه با شرط حداقل- حداکثری، با همدیگر ترکیب شده‌اند.

^۱ De Sitter space

قضیه ۵.۳.۴. فرض کنید M فضا زمان کامل ژئودزیکی زمان گونه باشد که شرط همگرایی زمان گونه را برآورد می کند. اگر S یک سطح کشی فشرده باشد که روی آن شرط حداقل- حداکثری صدق کند، آنگاه شبه کره کشی $S_{\infty}^{-} = S_{\infty}^{-}(S)$ یک سطح کشی فضا گونه فشرده هموار است و (M, g) با $(\mathbb{R} \times S_{\infty}^{-}, -dt^2 \oplus h)$ ایزومتر می باشد، که در آن h متریک القایی روی S_{∞}^{-} است.

موضوع مشابهی را مد نظر قرار می دهیم، به یاد داریم که نتیجه شکافندگی مشابه قضیه فوق در [۱۲]

از شرط S - شعاع زیر بدست آمد:

اگر یک S - شعاع زمان گونه کامل آینده γ ، که $S \subset I^{-}(\gamma)$ وجود داشته باشد حدس شکافندگی بارتنیک بر قرار است. در اینجا مشاهده می کنیم که این شرط، شرط حداقل- حداکثری را بدست می دهد.

لم ۶.۳.۴. فرض کنید M کامل ژئودزیکی زمان گونه بوده، و $S \subset M$ یک سطح کشی فشرده باشد. اگر γ ، S - شعاع آینده زمان گونه باشد به طوری که $S \subset I^{-}(\gamma)$ ، آنگاه شرط حداقل- حداکثری روی S صدق می کند.

اثبات. فرض کنید γ با طول قوس پارامتری شده باشد. از آنجایی که $S \subset I^{-}(\gamma)$ و S فشرده است، برای یک مقدار $k_0 \in \mathbb{N}$ داریم $S \subset I^{-}(\gamma(k_0))$. آنگاه برای هر $x \in S \subset I^{-}(\gamma(k_0))$ و $k_0 \leq k$ ، با استفاده از نامساوی مثلث معکوس داریم $d(x, \gamma(k)) \leq d(x, \gamma(k_0)) + (k - k_0)$ ، و با یک بازنویسی خواهیم داشت $k_0 - d(x, \gamma(k_0)) \leq k - d(x, \gamma(k))$. از آنجایی که سمت راست یک تابع پیوسته روی مجموعه فشرده S است، $R > 0$ یک کران بالا برای آن می باشد، و برای $k_0 \leq k$ ، داریم $k - d(x, \gamma(k)) \leq R$ چون $d(x, \gamma(k)) \leq d(x, S_k^{+}(S)) + R$ پس داریم $k \leq d(x, S_k^{+}(S)) + R$. با مینیمم گرفتن روی همه ی $x \in S$ نتیجه بدست می آید. $\square$

نکته ۷.۳.۴. با توجه به دسته فضا زمان های در نظر گرفته شده در لم ۶.۳.۴ شرط S - شعاع بسیار

قوی تر از شرط حداقل - حداکثری است. برای مثال، در حالی که شرط حداقل - حداکثری برای هر سطح کشی S در فضای دسیتر صدق می‌کند، شرط S - شعاع برای تمام چنین S هایی صدق نمی‌کند.

قضیه زیر نتیجه‌ای دیگر از شکافندگی است. با استفاده از قضیه ۳.۷ در [۱۶]، الزام وجود یک S_{∞}^{-} - شعاع گذشته در قضیه ۳.۲.۴ (به طور اختصاصی مربوط به شبه کره‌های کشی) می‌تواند با شرط شعاعی متفاوتی، جایگزین شود.

قضیه ۸.۳.۴. فرض کنید M فضازمان کامل ژئودزیکی زمان‌گونه باشد که شرط همگرایی زمان‌گونه را برآورد می‌کند و دارای سطح کشی فشرده S است. فرض کنید شعاع زمان‌گونه گذشته γ چنان وجود داشته باشد که از نقطه‌ای در $(S_{\infty}^{-}(S))$ شروع شود و شبه کره شعاعی آینده $S_{\infty}^{+}(\gamma)$ توسط یک سطح کشی S' کراندار گذشته است. آنگاه $S_{\infty}^{-}(S)$ سطح کشی فشرده هموار می‌باشد، و مانند قضیه ۳.۲.۴، در امتداد S_{∞}^{-} شکافته می‌شود (یعنی، (M, g) با $(\mathbb{R} \times S_{\infty}^{-}, -dt^2 \oplus h)$ ایزومتراست، که در آن h متریک القایی روی S_{∞}^{-} است.)

اثبات. بنا به نتایج قبلی (یا دوگان زمانی آنها)، $\Sigma_1 := S_{\infty}^{+}(\gamma)$ ابرسطح C° غیر علی بدون لبه می‌باشد که در مفهوم محمل، دارای انحنای متوسط کمتر یا مساوی صفر است و $\Sigma_2 := S_{\infty}^{-}(S)$ نیز ابرسطح C° آکروئال بدون لبه می‌باشد که در مفهوم محمل، دارای انحنای بزرگتر یا مساوی صفر است. از آنجایی که $J^{+}(S') \supset \Sigma_1$ و $J^{-}(S) \supset \Sigma_2$ هستند، نتیجه می‌دهد که $J^{+}(\Sigma_1) \cap J^{-}(\Sigma_2)$ زیر مجموعه‌ای از یک مجموعه فشرده $k = J^{+}(S') \cap J^{-}(S)$ است. برابری

$J^{+}(\Sigma_1) \cap J^{-}(\Sigma_2) = J^{+}(\Sigma_1 \cap k) \cap J^{-}(\Sigma_2 \cap k)$ به راحتی بدست می‌آید و نشان می‌دهد که $J^{+}(\Sigma_1) \cap J^{-}(\Sigma_2)$ فشرده است. از آنجایی که $d(\Sigma_1, \Sigma_2) = \delta > 0$ ، از قضیه ۳.۷ در [۱۶] نتیجه می‌شود که Σ_1 و Σ_2 سطوح کشی فضاگونه فشرده هموار می‌باشند و $J^{+}(\Sigma_1) \cap J^{-}(\Sigma_2)$ با فضای حاصلضربی لورنتسی $([\delta, 0] \times \Sigma_1, -dt^2 \oplus h)$ ایزومتر می‌باشد، که در آن h متریک القایی روی Σ_1

می‌باشد. در حالت خاص، Σ_2 ماکسیمال است (در واقع کاملاً ژئودزیک است). حال حکم به کمک نتیجه ۱ در مرجع [۴]، بدست می‌آید. $\square$

۴.۴ خط‌ها و قضیه شکافندگی

در این بخش، یک اثبات جایگزین برای قضیه ۳.۲.۴ ارائه می‌دهیم، که مختص شبه‌کره‌های کشی بوده و بر پایه قضیه شکافندگی لورنتسی بنا شده است (رجوع شود به [۵] و منابع موجود در آنجا).
 تعریف ۱.۴.۴. یک خط علی در فضا‌زمان، یک ژئودزیک علی گسترش ناپذیر است با این ویژگی که هر قطعه از این خط بیشترین مسافت لورنتسی بین نقاط پایانی این قطعه را دارد.
 قضیه ۲.۴.۴. (قضیه شکافندگی لورنتسی). اگر (M, g) فضا‌زمان هندلولوی سراسری باشد که شرط همگرایی زمان‌گونه را برآورد کند و یک خط زمان‌گونه کامل را در بر داشته باشد، آنگاه (M, g) به طور ایزومتري به صورت فضای حاصلضرب، $(\mathbb{R} \times N, -dt^2 \oplus h) \approx (M, g)$ شکافته می‌شود، که در آن (N, h) یک خمینه ریمانی کامل است.

در ادامه به بیان برخی خواص کلی برای شبه‌کره‌های تعمیم یافته می‌پردازیم.

گزاره ۳.۴.۴. فرض کنید S_∞^- یک شبه‌کره گذشته تعمیم یافته در فضا‌زمان هندلولوی سراسری M باشد، آنگاه هر S_∞^- - شعاع زمان‌گونه گذشته γ به یک خط علی زمان‌گونه بسط می‌یابد.

اثبات. اثبات نتیجه مستقیم قضیه ۶.۳.۳ است. S_∞^- دارای S_∞^- - شعاع آینده η است که از $\gamma(0)$ بسط می‌یابد. بنا به گزاره ۶.۱.۲، هر منحنی علی $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ که از $x = \gamma(t)$ تا $y = \eta(s)$ می‌باشد باید S_∞^- را در نقطه‌ای مانند $p = \alpha(c)$ قطع کند، اما، از آنجا که η و γ ، S_∞^- - شعاع‌ها هستند داریم:

$$L(\alpha) = L(\alpha|_{[a,c]}) + L(\alpha|_{[c,b]}) \leq d(x, S_\infty^-) + d(S_\infty^-, y) = L(\gamma|_{[0,t]}) + L(\eta|_{[0,s]})$$

این نتیجه می‌دهد که تلاقی η و γ ایجاد کننده یک خط علی است، که به دلیل زمان گونه بودن γ ، آن (خط) لزوماً زمان گونه خواهد بود. $\square$

لم زیر در اثبات قضیه ۵.۴.۴ که در ادامه بیان می‌شود به کار می‌رود.

لم ۴.۴.۴. فرض کنید (M, g) با خمینه حاصلضربی لورنتسی $(\mathbb{R} \times N, -dt^2 + h)$ ، که در آن (N, h) یک خمینه ریمانی همبند و فشرده است، ایزومتر است. در این صورت برای هر سطح کشی S در M ، شبه‌کره کشی نظیر S یعنی $S_\infty^-(S)$ ، یک سطح کشی فشرده است.

اثبات. از آنجایی که N فشرده است، (M, g) هذلولوی سراسری همراه با سطح کشی فشرده می‌باشد. از این رو، S الزاماً فشرده بوده و بریدگی $N' := \{a\} \times N$ وجود دارد که درون گذشته S واقع است، یعنی $N' \subset J^-(S)$. از ساختار حاصلضربی (M, g) و این واقعیت که N' یک بریدگی است، داریم $\tilde{N}'_k = N'$. بنابراین $\tilde{S}_k \subset J^+(N') \cap J^-(S)$ و از این رو، بنا به گزاره ۱۵.۱.۲، $S_\infty^-(S) \subset J^+(N') \cap J^-(S)$ می‌باشد. به عنوان یک ابرسطح C° علی بدون لبه مشمول در یک مجموعه فشرده، $S_\infty^-(S)$ باید خود یک مجموعه فشرده باشد. $\square$

قضیه ۵.۴.۴. فرض کنید M فضا زمان کامل ژئودزیکی زمان گونه آینده باشد، که در $\text{Ric}(X, X) \geq 0$ به ازای همه بردارهای زمان گونه X صدق می‌کند. فرض کنید M سطح کشی S را در بر داشته و اینکه شبه‌کره کشی $S_\infty^-(S)$ مربوط به این سطح کشی شامل یک $S_\infty^-(S)$ - شعاع گذشته کامل باشد. آنگاه $S_\infty^-(S)$ یک سطح کشی فضا گونه فشرده و هموار است، که در امتداد M شکافته می‌شود.

اثبات. بنا به فرض، یک $S_\infty^-(S)$ - شعاع گذشته γ را داریم. از آنجایی که $S_\infty^-(S)$ غیر علی است، این شعاع باید زمان گونه باشد. همانند گزاره ۳.۴.۴، این شعاع را به هر $S_\infty^-(S)$ - شعاع آینده از نقطه شروع γ متصل کنید که یک خط زمان گونه ایجاد شود و بنا به قضیه ۲.۴.۴، M به طور ایزومتری به

خمینه حاصلضربی $(M, g) \approx (\mathbb{R} \times N, -dt^2 + h)$ شکافته می‌شود، که (N, h) یک خمینه ریمانی کامل است. از آنجایی که سطوح کشی M فشرده هستند، N باید فشرده باشد. لذا، بنا به لم ۴.۴.۴، $S_\infty^-(S)$ یک سطح کشی فشرده است. حال باید بررسی کنیم که $S_\infty^-(S)$ یک t - بریدگی در امتداد $S_\infty^-(S)$ است، مختصات زمان t بیشترین مقدار را در $t = b$ اختیار می‌کند، که در نقطه $p \in S_\infty^-(S)$ اتفاق می‌افتد. بریدگی $N_b = \{b\} \times N$ دارای انحنای متوسط صفر می‌باشد و بنا به قضیه ۱.۲.۴، $S_\infty^-(S)$ در مفهوم محمل دارای انحنای متوسط بزرگتر یا مساوی صفر خواهد بود. پس، اصل ماکسیم هندسی، قضیه ۷.۱.۴، بیان‌گر این است که N_b و $S_\infty^-(S)$ در نزدیکی p بر هم منطبق هستند. پس به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که، $S_\infty^-(S) = N_b$ و قضیه ۵.۴.۴ اثبات می‌شود. $\square$

۵.۴ نگاهی به آینده

بنا به لم ۶.۳.۴، شرط حداقل-حداکثری از $S \subset I^-(\gamma)$ نتیجه می‌شود که با توجه به نکته ۷.۳.۴، شرط حداقل-حداکثری از شرط S - شعاع γ ضعیف تر است. از طرفی در مرجع [۲۶]، شریف زاده^۱ و بهرام پور^۲ در قضیه ۳.۳ نشان داده‌اند که شرط $\sum_c$ شرط حداقل-حداکثری را نتیجه می‌دهد (با توجه به تبصره ۳.۲ در [۲۶] اگر M یک فضازمان با خواص زیر باشد:

- M هذلولوی سراسری است.
- M شامل یک سطح کشی فشرده است.
- M شرط همگرایی زمان‌گونه را برآورد می‌کند، یعنی، برای همه‌ی بردارهای زمان‌گونه $X \in TM$ ، $Ric(X, X) \geq 0$ برقرار باشد.
- M کامل ژئودزیکی زمان‌گونه آینده است.

^۱ Sharifzadeh

^۲ Bahrampour

• $S -$ شعاع γ در M و عدد حقیقی $c \geq 0$ چنان وجود دارند که مجموعه سطوح تابع بوسمان b

در c ، زیر مجموعه‌ای از $D^+(S)$ است، یعنی، $\sum_c \subset D^+(S)$.

آنگاه M به صورت حاصلضرب متریک شکافته می‌شود. سپس در قضیه ۳.۳ نشان داده‌اند که

اگر $(\gamma) I^- \subset S$ باشد آنگاه شرط آخر تبصره برقرار است و این یعنی شرط حداقل-حداکثری

روی $\sum_c$ برقرار است. (

مسأله ۱.۵.۴. ارتباط بین شرط حداقل-حداکثری و شرط $\sum_c$ به چه صورت است؟

فصل ۵

ضمیمه

این فصل به مرور مفاهیمی از هندسه شبه‌ریمانی مورد نیاز در این پایان نامه، می‌پردازد. این فصل شامل پنج بخش است که بخش اول مقدمه‌ای کوتاه بر هندسه شبه‌ریمانی می‌باشد و در آن به مفهوم خمینه‌ها پرداخته می‌شود. بخش دوم، خمینه‌های شبه‌ریمانی را معرفی می‌کند. بخش سوم به التصاق‌ها، بخش چهارم به ژئودزیک‌ها و بخش پنجم به تانسورها اختصاص یافته است.

۱.۵ خمینه

در این بخش، ابتدا تعاریف مقدماتی از توپولوژی عمومی از قبیل تعریف فضای توپولوژیک، مجموعه باز، تابع پیوسته، همان ریختی، زیر پایه توپولوژیک و پایه توپولوژیک یادآوری می‌شود، سپس مفاهیم مورد نیاز راجع به خمینه‌ها، از جمله خمینه‌های توپولوژیک، توپولوژی حاصلضربی، توپولوژی زیر فضایی، دیفیئومورفیسم، خمینه هموار و همبند، بردار مماس، فضای مماس، کلاف مماس، جلوبری، فروبری، نشاننده، زیر خمینه نشاننده، میدان برداری، کرشه لی، نیم پیوسته بالایی و پایینی، فضای فشرده، نقطه حدی، درون، بستار، مجموعه بسته، ترتیب جزئاً مرتب، اصل ماکسیمم و تعاریفی از

بردار فضاگونه (زمان گونه، پوچ) را از مراجع [۲۲]، [۳۴]، [۳۵]، [۲۹]، [۳۱]، [۳۲]، ذکر می کنیم.

تعریف ۱.۱.۵. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد و $\tau \subseteq P(X)$. τ را یک توپولوژی در X می نامیم اگر در سه شرط زیر صدق کند:

الف) $X, \emptyset \in \tau$

ب) τ نسبت به اجتماع دلخواه بسته باشد.

ج) τ نسبت به اشتراک متناهی بسته باشد.

در این صورت (X, τ) را یک فضای توپولوژیک می نامند. اگر (X, τ) یک فضای توپولوژیک باشد،

یک زیرمجموعه مانند U از X را یک مجموعه باز گوئیم هرگاه $U \in \tau$.

مهم ترین مثال ها از فضای توپولوژیک عبارتست از:

مثال ۲.۱.۵. (Discrete Spaces). اگر X یک مجموعه باشد توپولوژی گسسته روی X به صورت

هر زیر مجموعه ای از X که باز است تعریف می شود.

مثال ۳.۱.۵. (Metric Spaces). یک فضای متریک مجموعه ای مانند M با تابع فاصله (که متر

نامیده می شود) $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ است که برای تمام $x, y, z \in M$ خواص زیر برقرار باشد:

• (Positivity) برای تمام $x, y, x \neq y$ و $d(x, y) > 0$ و $d(x, x) = 0$

• (Symmetry) $d(x, y) = d(y, x)$

• (Triangle Inequality) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

تعریف ۴.۱.۵. تابع $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ را پیوسته گویند اگر برای هر U عضو τ_Y داشته باشیم

$$f^{-1}(U) \in \tau_X$$

تعریف ۵.۱.۵. اگر دو فضای توپولوژیک (X, τ_X) و (Y, τ_Y) و نگاشت دو سوی $f : X \rightarrow Y$

چنان باشند که f و f^{-1} هر دو پیوسته باشند در این صورت f را همان ریختی یا همئومورفیزم بین

(X, τ_X) و (Y, τ_Y) و نیز، (X, τ_X) و (Y, τ_Y) را دو فضای همان ریخت (همئومورف) می نامند.

تعریف ۶.۱.۵. یک خمینه n - بعدی یک فضای هاسدورف با پایه شمارا است به طوری که هر نقطه x از X دارای یک همسایگی بوده که با یک زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ همئومورفیسم است.

تعریف ۷.۱.۵. یک زیر پایه توپولوژیک برای مجموعه X عبارت است از یک زیرگرایه از زیرمجموعه‌های X مانند S به طوری که اجتماع عضوهای آن برابر X شود. و توپولوژی تولید شده توسط این زیرپایه عبارت است از همه‌ی اجتماع‌ها و اشتراک‌های متناهی عضوهای S .

تعریف ۸.۱.۵. یک پایه برای یک توپولوژی روی مجموعه‌ی X عبارت است از یک گرایه از زیرمجموعه‌های X مانند β به طوری که در اصول زیر صدق کند؛

- ۱- برای هر $x \in X$ وجود داشته باشد $B \in \beta$ به طوری که $x \in B$.
 - ۲- اگر $B_1, B_2 \in \beta$ و $x \in X$ چنان باشند که $x \in B_1 \cap B_2$ در این صورت وجود داشته باشد $B_3 \in \beta$ به طوری که $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.
- حال اگر β در شرایط تعریف فوق صدق کند، توپولوژی τ تولید شده توسط β را به صورت زیر تعریف می‌کنیم؛

یک زیر مجموعه U از X را در X باز گوئیم هرگاه برای هر $x \in U$ وجود داشته باشد یک $B \in \beta$ به طوری که $x \in B \subseteq U$.

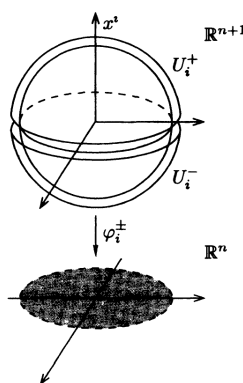
تعریف ۹.۱.۵. فضای توپولوژیک M یک خمینه توپولوژیک از بعد n است اگر شرایط زیر برقرار باشد:

- M هاسدورف باشد، یعنی برای هر دو نقطه $p, q \in M$ زیرمجموعه‌های باز جدا از هم $U, V \subset M$ وجود داشته باشد بطوری که $p \in U$ و $q \in V$.
- شمارای نوع دوم باشد، یعنی پایه‌ای شمارا برای توپولوژی M وجود داشته باشد.
- موضعیاً اقلیدسی از بعد n باشد، یعنی هر نقطه M یک همسایگی داشته باشد که با یک زیرمجموعه باز از $\mathbb{R}^n$ همئومورف باشد.

تعریف ۱۰.۱.۵. فرض کنید $X_1, \dots, X_k$ فضاهای توپولوژیک باشند. گرایه همه زیر مجموعه‌های

$X_1 \times \dots \times X_k$ به شکل $U_1 \times \dots \times U_k$ ، که U_i در X_i باز است، تشکیل پایه‌ای برای توپولوژی روی $X_1 \times \dots \times X_k$ می‌دهد که توپولوژی حاصلضربی نامیده می‌شود.

تعریف ۱۱.۱.۵. اگر X یک فضای توپولوژیک و S زیر مجموعه‌ای از X باشد توپولوژی زیر فضایی (یا، توپولوژی نسبی) روی S زیر مجموعه باز U از S است اگر و تنها اگر مجموعه باز V از X وجود داشته باشد به طوری که $U = V \cap S$.



شکل ۱.۵: کارت‌هایی برای $\mathbb{S}^n$

مثال ۱۲.۱.۵. فرض کنید کره n بعدی (واحد) $\mathbb{S}^n$ ، که مجموعه‌ای از بردارهای یک‌ه در $\mathbb{R}^{n+1}$ با توپولوژی زیر فضایی است را به صورت زیر مشخص کنیم:

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$$

در این صورت کره، هاسدورف و شمارای نوع دوم است زیرا زیر فضایی توپولوژیکی از $\mathbb{R}^{n+1}$ است. برای نشان دادن اینکه موضعاً اقلیدسی است، برای هر اندیس $i = 1, \dots, n+1$ فرض کنید U_i^+ نمایش زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{S}^n$ است که مختصات i ام آن مثبت باشد:

$$U_i^+ = \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{S}^n : x^i > 0\}.$$

به طور مشابه، U_i^- مجموعه‌ای است که $x^i < 0$. فرض کنید $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ گوی باز در $\mathbb{R}^n$ باشد، تابع پیوسته $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(u) = \sqrt{1 - |u|^2}$ در نظر بگیرید. آنگاه برای هر $i = 1, \dots, n+1$ به ترتیب به صورت

$$x^i = f(x^1, \dots, \hat{x}^i, \dots, x^{n+1}), \quad x^i = -f(x^1, \dots, \hat{x}^i, \dots, x^{n+1})$$

است. بنابراین هر مجموعه $U_i^\pm \cap \mathbb{S}^n$ موضعاً اقلیدسی از بعد n است، و نگاشت‌های

$$\varphi_i^\pm : U_i^\pm \cap \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\varphi_i^\pm(x^1, \dots, x^{n+1}) = (x^1, \dots, \hat{x}^i, \dots, x^{n+1})$$

مختصات‌های هندسی برای $\mathbb{S}^n$ هستند. چون هر نقطه در $\mathbb{S}^n$ در دامنه حداقل یکی از این $2n + 2$

کارت‌ها است، پس $\mathbb{S}^n$ یک خمینه توپولوژیک n - بعدی است. (به شکل ۱.۵، توجه کنید.)

تعریف ۱۳.۱.۵. فرض کنید M یک خمینه توپولوژیک n - بعدی باشد. چارت مختصاتی روی M ،

یک دو تایی (U, φ) است که در آن U یک زیر مجموعه باز از M و $\varphi : U \rightarrow \tilde{U}$ یک همئومورفیسم از U

به یک زیر مجموعه باز $\tilde{U} = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ است. اگر (U, φ) و (V, ψ) دو چارت باشند به طوری که

$U \cap V = \emptyset$ ، در این صورت نگاشت ترکیبی $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ **نگاشت انتقال**

از φ به ψ نامیده می‌شود. چون نگاشت انتقال، ترکیبی از همئومورفیسم‌ها می‌باشد پس خودش هم

همئومورفیسم است. نگاشت $f : M \rightarrow N$ را **دیفئومورفیسم** گویند اگر یک به یک و پوشا باشد و

f و f^{-1} هر دو دیفرانسیل پذیر باشد. به عبارت دیگر، یک دیفئومورفیسم همواره یک همئومورفیسم

است.

تعریف ۱۴.۱.۵. دو چارت (U, φ) و (V, ψ) به طور سازگار هموارند اگر $U \cap V = \emptyset$ یا نگاشت

انتقال $\psi \circ \varphi^{-1}$ دیفئومورفیسم باشد. مجموعه‌ای از چارت‌ها که دامنه M را می‌پوشاند یک **اطلس**

برای M نامیده می‌شود. **اطلس $\mathcal{A}$ هموار** است اگر هر دو چارت در $\mathcal{A}$ سازگار هموار با یکدیگر باشند.

اگر یک اطلس $\mathcal{A}$ مشمول در هیچ اطلس هموار بزرگتر نباشد می‌گوییم اطلس $\mathcal{A}$ روی M **ماکزیمال**

است. یک ساختار هموار روی خمینه توپولوژیک M ، یک اطلس هموار ماکزیمال است.

تعریف ۱۵.۱.۵. **خمینه هموار** (دیفرانسیل پذیر) M ، یک فضای هاسدورف مجهز به اطلس‌های

ماکزیمال است به عبارت دیگر، خمینه‌ای توپولوژیک است که بتوان روی آن ساختار دیفرانسیل پذیر

تعریف کرد.

مثال ۱۶.۱.۵. فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ یک خمینه دیفرانسیل پذیر n -بعدی است.

تعریف ۱۷.۱.۵. یک خمینه همبند است اگر و تنها اگر هر دو نقطه از آن را بتوان به وسیله‌ی یک قطعه منحنی هموار تکه‌ای به هم متصل کرد.

تعریف ۱۸.۱.۵. فرض کنیم M یک خمینه هموار و p یک نقطه در M باشد نگاشت خطی

$X : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ یک مشتق‌گیری در نقطه p نامیده می‌شود اگر به‌ازای هر $f, g \in C^\infty(M)$ ، رابطه زیر برقرار باشد:

$$X(fg) = f(p)Xg + g(p)Xf$$

مجموعه همه مشتق‌گیری‌ها در p یک فضای برداری است که فضای مماس M در p نامیده می‌شود و با $T_p M$ نشان داده می‌شود.

هر عنصر $T_p M$ یک بردار مماس در p نامیده می‌شود.

فرض کنید M^n خمینه n بعدی هموار باشد. از این رو، M^n یک فضای توپولوژیک هاسدورف، شمارای نوع دوم، با گردایه‌ای از کارت‌های مختصات $(U, x^i) = (U, x^1, \dots, x^n)$ در M باز است و به ازای هر دو کارت (U, x^i) و (V, y^i) در M ، $U \cap V \neq \emptyset$ است که M را می‌پوشانند و مختصات‌ها این گونه به هم مربوط می‌شوند

$$y^i = f^i(x^1, \dots, x^n), \quad f^i \in C^1$$

$$i = 1, \dots, n$$

اگر p در کارت (U, x^i) باشد آنگاه بردارهای مختصات موجود در p ، پایه‌ای به صورت زیر برای $T_p M$

تشکیل می‌دهند

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial x^2} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p$$

یعنی، هر بردار $X \in T_p M$ می‌تواند به این صورت توصیف شود

$$X = X^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p, \quad X^i \in \mathbb{R}$$

بعضی اوقات از چنین اختصار نویسی استفاده می‌کنیم: $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$.

مثال ۱۹.۱.۵. بردارهای مماس بر یک خم. فرض کنید $\sigma : I \rightarrow M, t \rightarrow \sigma(t)$ خمی هموار در M باشد. بردار مماس بر خم σ در نقطه $p = \sigma(t_0)$ ، که به صورت $\sigma'(t_0) = \frac{d\sigma}{dt}(t_0) \in T_p M$ مشخص می‌شود چنین مشتقی است،

$$\sigma'(t_0)(f) = \frac{d}{dt} f \circ \sigma(t) |_{t_0}.$$

فرض کنید p در کارت مختصاتی (U, x^i) باشد. در نتیجه در نزدیکی p ، σ می‌تواند بر حسب توابع مختصاتی بیان شود،

$$\sigma : x^i = x^i(t), \quad i = 1, \dots, n$$

در نتیجه، قائده زنجیره‌ای ایجاب می‌کند که،

$$\frac{d\sigma}{dt}(t_0) = \frac{dx^i}{dt}(t_0) \frac{\partial}{\partial x^i} |_p,$$

یعنی، $\frac{d\sigma}{dt}(t_0)$ مؤلفه‌های $\frac{dx^i}{dt}(t_0)$ هستند. در واقع هر بردار $X \in T_p M$ را می‌توان به عنوان بردار مماس بر خم گذرنده از p بیان کرد.

تعریف ۲۰.۱.۵. کلاف مماس M ، که با TM نشان داده می‌شود، به عنوان یک مجموعه، گردایه‌ای از بردارهای مماس است،

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M.$$

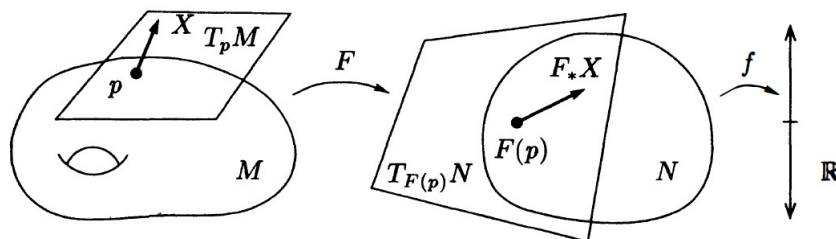
برای هر بردار $V \in TM$ ، می‌توان $2n$ - مختصاتش را نشان داد،

$$V \sim (x^1, \dots, x^n, V^1, V^2, \dots, V^n),$$

که $(x^1, \dots, x^n)$ مختصات نقطه‌ای p زمانی که V در $T_p M$ قرار دارد می‌باشد و $(V^1, \dots, V^n)$ مؤلفه‌های V نسبت به مختصات بردارهای پایه‌ای $\frac{\partial}{\partial x^1} |_p, \frac{\partial}{\partial x^2} |_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} |_p$ هستند. با این ارتباط می‌توان نشان داد که TM به طور طبیعی تشکیل یک خمینه $2n$ - بعدی را می‌دهد. به علاوه، نسبت به این ساختار خمینه، نگاشت تصویری طبیعی $V_p \rightarrow p, \pi : TM \rightarrow M$ ، هموار است.

تعریف ۲۱.۱.۵. فرض کنید M و N خمینه‌های دیفرانسیل پذیر و $F : M \rightarrow N$ یک نگاشت

دیفرانسیل پذیر باشد. برای هر $p \in M$ نگاشت $F_* : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ **جلوبری** وابسته به F نامیده



شکل ۲.۵: جلویی

می‌شود که در آن فضای مماس $T_p M$ در p و $T_{F(p)} N$ فضای مماس N در $F(p)$ است و داریم:

$$(F_* X) f = X (f \circ F)$$

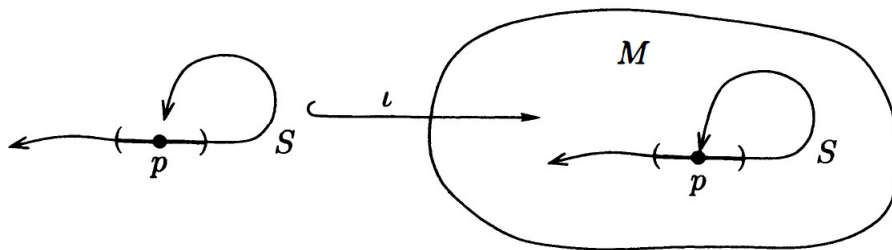
تعریف ۲۲.۱.۵. اگر نگاشت هموار $F : M^m \rightarrow N^n$ چنان باشد که در هر نقطه از M ،

F_{*p} یک نگاشت خطی ۱-۱ باشد F را یک **فروبری** (غوطه‌ور سازی) می‌گویند.

تعریف ۲۳.۱.۵. هرگاه M^m و N^n دو خمینه (هموار) باشند نگاشت $f : M^m \rightarrow N^n$ را **نشاننده**

گوییم اگر (۱) f فروبری باشد (۲) f یک به یک باشد (۳) $f(M)$ زیر خمینه N باشد. در این

صورت گویند $f(M)$ در N نشانده شده است و گاهی $f(M)$ را **زیر خمینه نشانده** در N گویند.

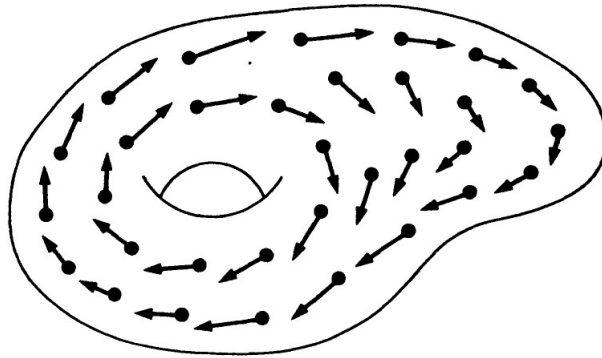


شکل ۳.۵: زیر خمینه نشانده

تعریف ۲۴.۱.۵. یک میدان برداری V روی یک خمینه M تابعی است که به هر نقطه $p \in M$ یک

برداری مماس در آن نقطه نسبت می‌دهد. (به شکل ۴.۵، توجه کنید.)

$$p \in M \longrightarrow X_p \in T_p M.$$



شکل ۴.۵: میدان برداری

اگر (U, x^i) چارت مختصاتی بر M باشند برای هر $p \in U$ داریم

$$X_p = X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$$

این n تابع یعنی، $X^i : U \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ ، مؤلفه‌های X بر (U, x^i) را بیان می‌کنند. اگر برای مجموعه‌ای از چارت‌های (U, x^i) که M را می‌پوشانند مؤلفه‌های X^i هموار باشند ($X^i \in C^\infty(U)$) آنگاه می‌گوییم که X یک میدان برداری هموار است.

فرض کنید $\mathcal{X}(M)$ نشان دهنده مجموعه همه‌ی میدان‌های برداری هموار بر M باشد. میدان‌های

برداری می‌توانند توسط توابع جمع و ضرب شوند، برای $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ و $f \in C^\infty(M)$ ،

$$(X + Y)_p = X_p + Y_p, \quad (fX)_p = f(p) X_p.$$

از این عملیات‌ها می‌توان دید که $\mathcal{X}(M)$ یک $C^\infty(M)$ - مدول است. با فرض $X \in \mathcal{X}(M)$ و

$X, f \in C^\infty(M)$ تابع $X(f) \in C^\infty(M)$ را ایجاب می‌کند، که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$X(f)(p) = X_p(f).$$

با توجه به چارت مختصاتی (U, x^i) ، $X(f)$ به صورت زیر بیان می‌شود

$$X(f) = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

بنابراین یک میدان برداری هموار $X \in \mathcal{X}(M)$ را می‌توان نگاشتی به صورت زیر در نظر گرفت

$$X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M), \quad f \mapsto X(f)$$

به طوری که؛

$$X(af + bg) = aX(f) + bX(g) \quad (a, b \in \mathbb{R}) \quad (۱)$$

$$X(fg) = X(f)g + fX(g) \quad (۲)$$

در واقع، این ویژگی‌ها به طور کامل میدان‌های برداری هموار را مشخص می‌کنند. اگر

$X, Y \in \mathcal{X}(M)$ ، **کروشه لی** میدان برداری به صورت زیر تعریف می‌شود

$$[X, Y] : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M), \quad [X, Y] = XY - YX,$$

یعنی؛

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

تعریف ۲۵.۱.۵. تابع $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ را **نیم پیوسته بالایی** گوئیم اگر و تنها اگر برای هر $a \in \mathbb{R}$ ،

$f^{-1}(-\infty, a)$ مجموعه‌ای باز در X باشد. و **نیم پیوسته پایینی** گوئیم اگر و تنها اگر برای هر $a \in \mathbb{R}$ ،

$f^{-1}(a, \infty)$ مجموعه‌ای باز در X باشد.

تعریف ۲۶.۱.۵. گوئیم **گردایه** A از زیر مجموعه‌های فضای X یک **پوشش** X است، (یا X را

می‌پوشاند) در صورتی که اجتماع اعضای A مساوی X باشد و اگر اعضای A زیر مجموعه‌های باز X

باشد، آن را یک **پوشش باز** X می‌گویند.

تعریف ۲۷.۱.۵. فضای X را **فشرده** گوئیم اگر هر پوشش باز آن مانند A ، حاوی یک زیر گردایه

متناهی باشد که آن نیز X را بپوشاند و X هاسدورف باشد.

مثال ۲۸.۱.۵. (۱) خط حقیقی $\mathbb{R}$ فشرده نیست زیرا پوشش باز $\mathbb{R}$ از بازه‌های باز

$$A = \{(n, n+2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

حاوی هیچ زیر گردایه متناهی نیست که $\mathbb{R}$ را بپوشاند.

(۲) زیر فضای $X = \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$ از $\mathbb{R}$ فشرده است. برای اثبات فرض کنید A پوشش

باز دلخواهی برای X باشد در این صورت، عضوی در A ، مانند U وجود دارد که شامل صفر است.

مجموعه U شامل همه نقاط $1/n$ به جزء تعداد متناهی از آنهاست، به ازای هر نقطه X که در U نیست، عضوی از A را چنان انتخاب می‌کنیم که شامل این نقطه باشد. گردایه‌ای که از اعضای A و U تشکیل می‌شود، یک زیر گردایه متناهی A است که X را می‌پوشاند.

(۳) هر فضای X که فقط شامل تعدادی متناهی عضو باشد، ضرورتاً فشرده است زیرا در این حالت هر پوشش X متناهی است.

تعریف ۲۹.۱.۵. زیر مجموعه A از فضای توپولوژیک X را در نظر بگیرید. $x \in X$ را نقطه حدی A گوئیم اگر و تنها اگر هر همسایگی محذوف x ، با A اشتراک غیر تهی داشته باشد. به عبارت دیگر، $U_x/x \cap A \neq \emptyset$. نقطه حدی مجموعه A را با A' نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳۰.۱.۵. فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای از فضای توپولوژیک X باشد. درون مجموعه‌ی A عبارت است از بزرگترین مجموعه باز مشمول در A ، و بستار مجموعه‌ی A عبارت است از کوچکترین مجموعه بسته شامل A با این مفهوم که برای هر مجموعه بسته C که شامل A است، $\bar{A} \subset C$. درون مجموعه‌ی A را با $IntA$ و بستار A را با ClA ، یا $\bar{A}$ ، نمایش می‌دهیم. واضح است که درون مجموعه‌ای باز و $\bar{A}$ مجموعه‌ای بسته است. بعلاوه، اگر $IntA \subset A \subset \bar{A}$ ، باز باشد $A = IntA$ و اگر A بسته باشد $A = \bar{A}$.

تعریف ۳۱.۱.۵. زیر مجموعه A از فضای توپولوژیک X بسته است اگر و تنها اگر $\bar{A} = A$ و یا $A' \subset A$ باشد.

تعریف ۳۲.۱.۵. فرض کنید A یک مجموعه باشد، رابطه $\prec$ روی A ترتیب جزئاً مرتب^۱ روی A نامیده می‌شود اگر دارای دو خاصیت زیر باشد:

(۱) (Nonreflexivity) یعنی رابطه $a \prec a$ برقرار نباشد.

(۲) (Transivity) یعنی اگر $a \prec b$ و $b \prec c$ آنگاه، $a \prec c$.

^۱ Strict partial order

قضیه ۳۳.۱.۵. (*The maximum principle*). فرض کنید A یک مجموعه باشد؛ ترتیب جزئاً مرتب $\prec$ روی A را در نظر بگیرید. آنگاه زیر مجموعه مرتب ماکسیمال B از A وجود دارد. (رجوع کنید به [۳۲])

تعریف ۳۴.۱.۵. بردار v روی M ، در $T_p M$ را

الف) (spacelike) شبه فضا یا فضاگونه گوئیم اگر $v = 0$ یا $\langle v, v \rangle > 0$ باشد.

ب) (timelike) شبه زمان یا زمان گونه گوئیم اگر $\langle v, v \rangle < 0$ باشد.

ج) (null) پوچ یا نورگونه می نامیم اگر $v \neq 0$ و $\langle v, v \rangle = 0$ باشد.

۲.۵ خمینه های شبه ریمانی

در این بخش، تعاریف فرم دو خطی متقارن، ضرب اسکالر، فضای ضرب اسکالر، اندیس فضای ضرب اسکالر، متریک شبه ریمانی، متریک ریمانی، خمینه شبه ریمانی، خمینه لورنتسی، خمینه ریمانی کامل، مؤلفه های همبندی، خمینه همبند، نقطه ی بریدگی، ابر سطح، خم، منحنی گسترش ناپذیر، طول قوس، خمینه جهت پذیر، نقطه پایان، قطعه، قطعه ماکسیمال، ایزومتري و هسیان را از مراجع [۵]، [۱۲]، [۲۹]، [۳۶] و [۲۲] ذکر

می کنیم.

تعریف ۱.۲.۵. فرض کنید V یک فضای برداری n - بعدی روی $\mathbb{R}$ باشد. فرم دو خطی متقارن

$$b : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \text{ به صورت زیر می باشد}$$

(۱) معین مثبت باشد یعنی برای هر $v \neq 0$ ، $b(v, v) > 0$ باشد.

(۲) ناتبهگون^۱ باشد یعنی برای هر $v \neq 0$ ، $w \in V$ وجود داشته باشد به طوری که $b(v, w) \neq 0$ (به عبارتی، تنها بردار متعامد بر تمام بردارها، بردار صفر است).

تذکر ۲.۲.۵. معین مثبت ناتبهگونی را ایجاب می کند.

^۱ Nondegenerate

تعریف ۳.۲.۵. یک ضرب اسکالر روی V ، یک فرم دو خطی متقارن ناتبهگون $\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ است. فضای ضرب اسکالر فضای برداری V است که دارای ضرب اسکالر $\langle, \rangle$ باشد. فرض کنید V فضای ضرب اسکالر باشد. یک پایه متعامد برای V پایه $\{e_1, \dots, e_n\}$ است که به صورت زیر بیان می‌شود،

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \pm 1 & i = j, \end{cases}$$

یا در اصطلاح دلتای کرونکر

$$\langle e_i, e_j \rangle = \varepsilon_i \delta_{ij}$$

که $\delta_{ij} = \pm 1$ و $i = 1, 2, \dots, n$.

نکته ۴.۲.۵. هر فضای ضرب اسکالر $(V, \langle, \rangle)$ پایه‌ای متعامد می‌پذیرد. علامت یک پایه متعامد n تایی $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ است. مرسوم است که پایه را مرتب کرد در نتیجه علامت‌های منفی در ابتدا می‌آیند. اندیس فضای ضرب اسکالر تعداد علامت‌های منفی در آن هستند. این اندیس خوش تعریف است، یعنی، وابسته به انتخاب پایه نیست. مهم ترین حالات اندیس 0 و 1 است که به ترتیب، به خمینه ریمانی و لورنتسی منجر می‌شود.

تعریف ۵.۲.۵. فرض کنید M^n خمینه‌ای هموار باشد. متریک شبه‌ریمانی^۱ $\langle, \rangle$ روی M ، تخصیص هموار به هر $p \in M$ از یک ضرب اسکالر $\langle, \rangle_p$ روی $T_p M$ است.

$$p \rightarrow \langle, \rangle_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

که اندیس $\langle, \rangle_p$ برای همه p ها یکسان است. با استفاده از تخصیص هموار، برای هر $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ تابع $\langle X, Y \rangle_p$ ، $\langle X_p, Y_p \rangle_p$ ، $p \rightarrow \langle X, Y \rangle_p$ هموار است.

نکته ۶.۲.۵. با توجه به تعریف ۴.۵.۵، متریک شبه‌ریمانی روی خمینه هموار M یک میدان ۲ -

^۱ Pseudo-Riemannian Metric

تانسوری متقارن g است که در هر نقطه $p \in M$ ناتبیهگون است. به این معنا که تنها بردار متعامد بر تمام بردارها، بردار صفر است به عبارت دیگر، برای همه $Y \in T_p M$ ، $g(X, Y) = 0$ است اگر و تنها اگر $X = 0$. (در بخش ۵.۵، به میدان تانسوری اشاره کرده‌ایم.)

تعریف ۷.۲.۵. همچنین با توجه به تعریف ۴.۵.۵، متریک ریمانی روی خمینه هموار M یک میدان ۲

- تانسوری $g \in T^2(M)$ است که متقارن (به عبارت دیگر، برای همه $X, Y \in T_p M$ ،

$g(X, Y) = g(Y, X)$) و معین مثبت (به عبارت دیگر، اگر $X \neq 0$ ، $g(X, X) > 0$) می‌باشد.

تذکر ۸.۲.۵. متریک شبه‌ریمانی روی M را نیز، به صورت $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۹.۲.۵. خمینه شبه ریمانی، یک خمینه M^n هموار با متریک شبه ریمانی $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ است. اگر

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ ، دارای اندیس ۰ باشد خمینه ریمانی و اگر دارای اندیس ۱ باشد خمینه لورنتسی را خواهیم داشت.

اگر (U, x^i) کارت مختصاتی باشد آنگاه مؤلفه‌های متریک g_{ij} توابعی روی U هستند که به این

صورت قابل بیان می‌باشند،

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

اگر X و Y بردارهایی در نقطه‌ای از U باشند، با استفاده از دو خطی بودن داریم،

$$\langle X, Y \rangle = g_{ij} X^i Y^j$$

در نتیجه، مؤلفه‌های متریک به طور کامل متریک روی U را مشخص می‌کنند.

تذکر ۱۰.۲.۵. متریک $\langle \cdot, \cdot \rangle$ هموار است اگر و فقط اگر برای هر کارت (U, x^i) ، g_{ij} هموار باشند.

مثال ۱۱.۲.۵. فضای اقلیدسی $\mathbb{E}^n$ به عنوان خمینه ریمانی. در اینجا $\mathbb{R}^n$ را با متریک اقلیدسی مجهز

می‌کنیم. فرض کنید $(x^1, \dots, x^n)$ مختصات دکارتی روی $\mathbb{R}^n$ باشد. آنگاه برای $X, Y \in T_p \mathbb{R}^n$

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \quad Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p,$$

داریم

$$\langle X, Y \rangle = X.Y$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^n X^i Y^i \\
 &= \delta_{ij} X^i Y^j
 \end{aligned}$$

که $\delta_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle$ دلتای کرونکر است.

مثال ۱۲.۲.۵. فضای مینکوفسکی $\mathbb{M}^{n+1}$ را با متریک مینکوفسکی مجهز می‌کنیم. فرض کنید

$(x^0, x^1, \dots, x^n)$ مختصات دکارتی در $\mathbb{R}^{n+1}$ باشد. آنگاه برای $X, Y \in T_p \mathbb{R}^{n+1}$

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} |_p, \quad Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} |_p,$$

داریم

$$\begin{aligned}
 \langle X, Y \rangle &= -X^0 Y^0 + \sum_{i=1}^n X^i Y^i \\
 &= \eta_{ij} X^i Y^j
 \end{aligned}$$

که $\eta_{ij} = \varepsilon_i \delta_{ij}$, $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = (-1, 1, \dots, 1)$

تعریف ۱۳.۲.۵. خمینه ریمانی (M, g) کامل گفته می‌شود هرگاه شرایط ۱ تا ۴ آمده در قضیه زیر

برقرار باشد.

قضیه ۱۴.۲.۵. $(Hopf-Rinow)$ برای هر خمینه ریمانی (M, g) شرایط زیر معادل هستند:

(۱) تمامیت متریک: (M, g) یک فضای متریک کامل است.

(۲) تمامیت ژئودزیک: برای هر $v \in TM$ ، ژئودزیک $c(t)$ در M با $c'(0) = v$ برای همه اعداد حقیقی

مثبت و منفی $t \in \mathbb{R}$ تعریف شده است.

(۳) برای هر $p \in M$ ، نگاشت نمایی $\exp_p$ روی تمام فضای مماس $T_p M$ به N تعریف شده است.

(۴) تمامیت متناهی: هر زیر مجموعه K از M که کراندار به d است (به عبارت دیگر،

$\sup \{d(p, q) : p, q \in K\} < \infty$) دارای بستار کراندار است.

به علاوه، اگر هر یک از شرایط ۱ تا ۴ برقرار باشد آنگاه

(۵) اتصال ژئودزیک مینیمال: $p, q \in M$ مفروض است، قطعه ژئودزیک هموار c از p تا q وجود دارد

به طوری که $L(c) = d(p, q)$ (در نکته ۲۵.۲.۵، به طول قوس اشاره کرده ایم.)

تعریف ۱۵.۲.۵. فضای X مفروض است، رابطه هم ارزی $x \sim y$ را روی X تعریف می کنیم اگر زیر فضای همبندی از X شامل x و y وجود داشته باشد. کلاس های هم ارزی که در این رابطه وجود دارند مؤلفه های X (مؤلفه های همبندی X) نامیده می شوند. هر فضای دلخواه S اجتماع مجزایی از مؤلفه های همبندی خود است. یک مجموعه همبند است اگر و تنها اگر فقط یک مؤلفه همبندی داشته باشد.

مثال ۱۶.۲.۵. فرض کنید $X = [0, 1] \cup \{2\}$. مؤلفه های همبندی X عبارت است از: $\{[0, 1] \cup \{2\}\}$.

تعریف ۱۷.۲.۵. یک خمینه همبند است اگر و تنها اگر دو نقطه از آن بتواند به وسیله یک قطعه منحنی هموار تکه ای به هم وصل شود.

نکته ۱۸.۲.۵. مؤلفه های همبندی زیر فضاهای همبند ماکسیمال فضای دلخواه S هستند، زیرا یک خمینه به طور موضعاً اقلیدسی مؤلفه هایش باز هستند از این رو خمینه های همبند هستند.

تعریف ۱۹.۲.۵. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک همبند ناتهی باشد. نقطه x از X را نقطه ی بریدگی X گوئیم هر گاه $X \setminus \{x\}$ زیر مجموعه ای ناهمبند از X باشد. فضای توپولوژیک همبند ناتهی X را فضای نقطه ی بریدگی گوئیم اگر هر x در X نقطه ی بریدگی X باشد.

مثال ۲۰.۲.۵. در این مثال، $\mathbb{R}^2$ صفحه اقلیدسی با توپولوژی استاندارد است.

فرض کنید $X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, |y| = 1\}$ و $X_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = \sin \frac{1}{x}\}$

تعریف می کنیم $X = X_1 \cup X_2$. پس X یک فضای نقطه ی بریدگی است.

نکته ۲۱.۲.۵. یک ابر سطح در خمینه M ، یک زیر خمینه مانند P است که نقص بعد آن به صورت $\dim M - \dim P = 1$ می باشد.

تعریف ۲۲.۲.۵. در خمینه M ، نگاشت هموار $\alpha : I \rightarrow M$ که در آن I یک بازه باز در خط حقیقی $\mathbb{R}^1$ است را خم گوئیم.

تعریف ۲۳.۲.۵. منحنی گسترش ناپذیر، یک منحنی غیر فضاگونه گفته می‌شود اگر نقطه انتهایی نداشته باشد.

نکته ۲۴.۲.۵. بسط خمینه لورنتسی (M, g) ، یک خمینه لورنتسی (M', g') با ایزومتري $f: M \rightarrow M'$ است که نگاشت‌ها M را به داخل زیر مجموعه‌ی باز سره از M' می‌برد. اگر (M, g) دارای هیچ بسطی نباشد، گسترش ناپذیر گفته می‌شود.

نکته ۲۵.۲.۵. فرض کنید M یک خمینه شبه‌ریمانی باشد و $\alpha: [a, b] \rightarrow M$ یک قطعه منحنی هموار تکه‌ای در M ، و g متریک شبه‌ریمانی روی M باشد. **طول قوس** α به صورت زیر است

$$L(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(s)| ds.$$

که در آن،

$$\begin{aligned} |\alpha'| &= \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle^{\frac{1}{2}} \\ &= \left| \sum g_{ij} \frac{d(x^i \circ \alpha)}{ds} \frac{d(x^j \circ \alpha)}{ds} \right|^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

و $\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)}M$ بردار مماس بر α در نقطه t می‌باشد.

تعریف ۲۶.۲.۵. خمینه M جهت پذیر است هر گاه گردایه‌ای از دستگاه‌های مختصات در M مانند O وجود داشته باشد به طوری که دامنه آنها M را پوشش دهد و برای هر $\eta, \varepsilon \in O$ تابع دترمینان ژاکوبی $J(\eta, \varepsilon) = \det \left(\frac{dy^i}{dx^i} \right)$ مثبت باشد. (O اطلس جهت پذیر برای M نامیده می‌شود.)

مثال ۲۷.۲.۵. بدیهی است که $\mathbb{R}^n$ جهت پذیر است، زیرا این فضا می‌تواند توسط دستگاه‌های مختصات ساده پوشانده شود. تجربه نشان می‌دهد که کره‌ها و حلقه‌ها جهت پذیر هستند، اما نوارهای مویوس و بطری‌های کلاین جهت پذیر نیستند.

تعریف ۲۸.۲.۵. فرض کنید $\gamma: [a, b) \rightarrow M$ یک منحنی پارامتری شده باشد. آنگاه نقطه p در M یک نقطه پایان منحنی γ است اگر وقتی $t \rightarrow b^-$ داشته باشیم $\gamma(t) \rightarrow p$. (برای خمینه‌های هاسدورف نقاط پایان منحنی منحصر به فرد است.)

تعریف ۲۹.۲.۵. هر زیر مجموعه از یک مجموعه خوش ترتیب یک مجموعه خوش ترتیب با همان ترتیب است. در حالت خاص، زیر مجموعه B از مجموعه خوش ترتیب A را **قطعه** (اولیه) گویند اگر $a < b$ و $b \in B$ نتیجه دهد که $a \in B$ است. منحنی غیر فضاگونه در جهت آینده

$c : [a, b] \rightarrow (M, g)$ **قطعه ماکسیمال** گفته می شود هر گاه برای همه مقادیر s و t که $a \leq s \leq t \leq b$ داشته باشیم $L(c) = d(c(a), c(b))$ و از این رو $L(c|_{[s,t]}) = d(c(s), c(t))$

نکته ۳۰.۲.۵. خم α در خمینه شبه ریمانی M را شبه فضا (فضاگونه) می نامیم هر گاه برای هر t ، بردار $\alpha'(t)$ شبه فضا (فضاگونه) باشد. به طور مشابه خم شبه زمان (زمان گونه) و پوچ در خمینه شبه ریمانی تعریف می شود.

ایزومتري نگاشتي است که مفهوم ایزومورفیسم را برای خمینه های شبه ریمانی بیان می کند.

تعریف ۳۱.۲.۵. فرض کنیم M و N خمینه های شبه ریمانی با تانسورهای متریک g_M و g_N باشند. یک ایزومتري از M به N ، نگاشت $\varphi : M \rightarrow N$ است که دیفئومورفیسم باشد و تانسور متریک ها را حفظ کند یعنی؛

$$\varphi^*(g_N) = g_M$$

به بیان روشن تر، در هر نقطه $p \in M$ ، $d\varphi$ یک ایزومتري بین $T_p M$ و $T_{\varphi(p)} N$ است

$$\langle d\varphi(v), d\varphi(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

نکته ۳۲.۲.۵. اگر یک ایزومتري بین دو خمینه شبه ریمانی M و N وجود داشته باشد گوییم M و N ایزومتريک هستند. در واقع دو خمینه که ایزومتريک باشند، از نظر هندسی یکسان هستند.

تعریف ۳۳.۲.۵. هسیان تابع $f \in F(M)$ عبارت است از $H^f = \nabla(\nabla f)$. (∇) ، مشتق همگرد است که تعریف آن در بخش ۳.۵، آمده است.

۳.۵ التصاق

در اینجا مفهوم مشتق همگرد^۱ که شکل مشخصی به فرایند محاسبه‌ی مشتق جهت‌دار میدان‌های برداری می‌دهد را معرفی می‌کنیم. (با بهره‌گیری از مرجع [۲۲])

تعریف ۱.۳.۵. التصاق خطی^۲ ∇ روی M ، یک نگاشت دوخطی حقیقی به صورت زیر است

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$$

$$(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$$

که برای تمام $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ و $f \in C^\infty(M)$

$$\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y \quad (۱)$$

$$\nabla_X fY = X(f)Y + f \nabla_X Y \quad (۲)$$

$\nabla_X Y$ را مشتق همگرد Y نسبت به X می‌نامیم. برای هر $p \in M$ ، $\nabla_X Y|_p$ تنها وابسته به مقادیر Y

در همسایگی p و مقادیر X در خود p می‌باشد. در حالت خاص، بهتر است که $\nabla_X Y|_p$ را به

صورت $\nabla_{X_p} Y$ بنویسیم. که این را مشتق جهت‌دار Y در نقطه p در جهت X_p می‌توان در نظر گرفت.

در یک کارت مختصاتی (U, x^i) ضرائب التصاق Γ_{ij}^k ، $1 \leq i, j, k \leq n$ که توابع همواری روی U

هستند به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k,$$

که $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ می‌نامیم.

تعریف ۲.۳.۵. التصاق خطی ∇ روی M متقارن است اگر و فقط اگر ضرائب التصاق (نسبت به هر

کارت مختصاتی) به این صورت باشند که،

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \quad 1 \leq i, j, k \leq n$$

تعریف ۳.۳.۵. فرض کنید $(M, \langle, \rangle)$ یک خمینه شبه‌ریمانی، و ∇ التصاق خطی روی M باشد. گوییم

^۱ Covariant Derivative

^۲ Linear Connections

∇ با متر روی M سازگار است اگر داشته باشیم برای همه $X, Y \in \mathcal{X}(M)$,

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

و این یعنی، قاعده ضرب متریک برقرار است.

تبصره ۴.۳.۵. التصاق خطی استاندارد روی فضای اقلیدسی (و روی فضای مینکوفسکی) متقارن و سازگار با متریک است.

قضیه ۵.۳.۵. (قضیه اساسی هندسه شبه ریمانی). روی یک خمینه شبه ریمانی، التصاق خطی منحصر به فرد ∇ وجود دارد که متقارن و سازگار با متریک است.

با استفاده از تقارن و سازگاری با متریک التصاق، می توان فرمول کوزال را استنتاج کرد،

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X Y, Z \rangle &= \frac{1}{2} [X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle \\ &\quad - \langle X, [Y, Z] \rangle + \langle Y, [Z, X] \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle] \end{aligned}$$

این فرمول به یکتایی منجر می شود و می توان التصاق خطی تعیین کرد که متقارن و سازگار با متریک است. با استفاده از این فرمول می توان نشان داد که ضرائب التصاق لوی چیهویتا^۱ به این صورت می باشند:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij})$$

که $[g^{ij}] = [g_{ij}]^{-1}$.

۴.۵ ژئودزیک ها

در این بخش، مفهوم اقلیدسی خط راست را تعمیم می دهیم. (با بهره گیری از مرجع [۲۲])

فرض کنید $\sigma : I \rightarrow M, t \rightarrow \sigma(t)$ یک خم هموار در خمینه شبه ریمانی M باشد و $\mathcal{X}(\sigma)$ گردایه ای از میدان های برداری هموار X در امتداد σ باشد،

$$t \rightarrow X(t) \in T_{\sigma(t)} M$$

در مختصات موضعی (U, x^i) ، داریم

^۱ The Levi-Civita Connection

$$\sigma : x^i = x^i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$X(t) = X^i(t) \partial_i|_{\sigma(t)},$$

که مؤلفه‌های $X^i(t)$ هموارند.

التصاق لوی چویتا ∇ روی M یک مشتق همگرد روی میدان برداری در طول σ تولید می‌کند،

$$\frac{D}{dt} : \mathcal{X}(\sigma) \rightarrow \mathcal{X}(\sigma)$$

گزاره ۱.۴.۵. فرض کنید $\sigma : I \rightarrow M$ یک خم هموار در خمینه شبه‌ریمانی M باشد. بنابراین عملگر

$\mathbb{R}$ - خطی یکتایی وجود دارد

$$\frac{D}{dt} : \mathcal{X}(\sigma) \rightarrow \mathcal{X}(\sigma)$$

به طوری که

(۱) برای $X \in \mathcal{X}(\sigma)$ و $f \in C^\infty(I)$ ،

$$\frac{D}{dt} fX = \frac{df}{dt} X + f \frac{DX}{dt},$$

(۲) برای $X \in \mathcal{X}(M)$ ،

$$\frac{D}{dt} X|_{\sigma(t)} = \nabla_{\sigma'(t)} X.$$

در مختصات موضعی داریم

$$\frac{DX}{dt} = \left(\frac{dX^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \right) \partial_k.$$

همچنین $\frac{D}{dt}$ از قاعده ضرب متریک پیروی می‌کند

$$\frac{d}{dt} \langle X, Y \rangle = \langle \frac{DX}{dt}, Y \rangle + \langle X, \frac{DY}{dt} \rangle.$$

اگر خم هموار $t \rightarrow \sigma(t)$ در M را داشته باشیم، $\frac{D}{dt} \frac{d\sigma}{dt}$ شتاب همگرد σ است. در مختصات موضعی

با جایگذاری $X^k = \frac{dx^k}{dt}$ در رابطه ۴.۵ داریم

$$\frac{D}{dt} \frac{d\sigma}{dt} = \left(\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \right) \partial_k$$

تعریف ۲.۴.۵. خم هموار $t \rightarrow \sigma(t)$ ، یک ژئودزیک است اگر شتاب همگرد همواره برابر صفر داشته

باشد

$$\left(\frac{D}{dt} \frac{d\sigma}{dt}\right) = 0 \quad (\text{معادله ژئودزیک})$$

تعریف ۳.۴.۵. خمی که دارای یک تغییر پارامتر به صورت ژئودزیک باشد را پیش ژئودزیک گوئیم.

گزاره ۴.۴.۵. اگر داشته باشیم $p \in M$ و $V \in T_p M$ ، بازه I حول $t = 0$ و ژئودزیک یکتای

$$\sigma : I \rightarrow M, t \rightarrow \sigma(t)$$

وجود دارد به طوری که

$$\sigma(0) = p, \quad \frac{d\sigma}{dt}(0) = V.$$

۵.۵ تانسور

در این بخش، ابتدا مجموعه K - چند خطی را برای ورود به بحث تانسورها معرفی می‌کنیم سپس به طور مختصر مطالبی را در مورد انحناها ذکر می‌کنیم. مطالب این بخش با بهره‌گیری از مرجع [۲۲] گردآوری شده است.

تعریف ۱.۵.۵. فرض کنید $V_1, \dots, V_s$ مدول‌هایی روی حلقه K باشد. آنگاه $V_1 \times \dots \times V_s$ مجموعه‌ای

از s - تایی‌های $(v_1, \dots, v_s)$ است که $v_i \in V_i$. اگر W نیز یک مدول روی K باشد، تابع

$A : V_1 \times \dots \times V_s \rightarrow W$ یک نگاشت K - چند خطی است هرگاه A در هر یک از مؤلفه‌های

خود K - خطی باشد، به این معنی که، برای $1 \leq i \leq s$ و $v_i \in V_i$ ، تابع

$$v \rightarrow A(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_s)$$

K - خطی باشد.

تعریف ۲.۵.۵. برای اعداد صحیح $r \geq 0, s \geq 0$ که هم زمان صفر نباشند، تابع K - چند خطی

$$A : V^r \times V^s \rightarrow K$$

یک تانسور از نوع (r, s) روی V نامیده می‌شود.

نکته ۳.۵.۵. مجموعه‌ی همه تانسورهای از نوع (r, s) روی V ، $T_s^r(V)$ ، یک K - مدول است. به

سادگی می‌توان دید که تانسور از نوع $(0, 0)$ عضوی از K است.

تعریف ۴.۵.۵. میدان تانسوری A روی خمینه M تانسوری روی $F(M)$ - مدول $\mathcal{X}(M)$ است،

بنابراین اگر A تانسوری از نوع (r, s) باشد میدان تانسوری یک تابع $F(M)$ - چند خطی به صورت

زیر است

$$A : \mathcal{X}^*(M)^r \times \mathcal{X}(M)^s \rightarrow F(M).$$

که در آن $F(M)$ ، مجموعه توابع حقیقی مقدار هموار روی خمینه شبه‌ریمانی M می‌باشد.

تعریف ۵.۵.۵. فرض کنید M^n خمینه شبه‌ریمانی با التصاق لوی چیهیتای ∇ باشد. نگاشت

$$R : \mathcal{X}(M)^3 \rightarrow \mathcal{X}(M)$$

$$R_{XY}Z = \nabla_{[X,Y]}Z - [\nabla_X, \nabla_Y]Z$$

یک $(\circ, 3)$ میدان تانسوری روی M می‌باشد که **تانسور انحنا**ی ریمانی M نامیده می‌شود. فرض کنید

R تانسور انحنا ی ریمان باشد. **تانسور ریچی** Ric ، عبارتست از یک $(\circ, 2)$ میدان تانسوری که نسبت

به یک کارت مختصاتی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$R_{ij} = \sum_m R_{ijm}^m$$

که در آن، $R_{ijm}^m = \frac{\partial}{\partial x^m} \Gamma_{ji}^m - \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{mi}^m + \sum_r \Gamma_{mr}^m \Gamma_{ji}^r - \sum_r \Gamma_{jr}^m \Gamma_{mi}^r$ می‌باشد.

نکته ۶.۵.۵. روابط متقارن تانسور انحنا ی ریمان منجر به تقارن تانسور ریچی می‌شود.

تعریف ۷.۵.۵. فرض کنید M^n خمینه شبه‌ریمانی باشد. اگر $X, Y \in T_p M$ ، عملگر خطی

$$R_{XY} : T_p M \rightarrow T_p M$$

$$Z \rightarrow R_{XY}Z$$

عملگر انحنا نامیده می‌شود.

تعریف ۸.۵.۵. فرض کنید π یک صفحه ناتبه‌گون $(\det \neq 0)$ در نقطه p از خمینه ریمانی M باشد و

$\{v, w\}$ پایه π است. عدد $k(v, w)$ که به صورت زیر تعریف می‌شود، مستقل از انتخاب پایه است

$$k(v, w) = \frac{\langle R_{vw}v, w \rangle}{Q(v, w)}$$

عدد فوق را با علامت $k(\pi)$ نشان می‌دهند و آن را **انحنا ی مقطعی** در امتداد صفحه π می‌نامند.

تذکر ۹.۵.۵. k و R به طور کامل یکدیگر را مشخص می‌کنند.

تعریف ۱۰.۵.۵. خمینه شبه‌ریمانی M ، **انحنا ی ثابت** دارد اگر انحنا ی مقطعی آن در همه نقاط ثابت

باشد.

مثال ۱۱.۵.۵. $S^n(r)$ دارای انحنای اثبات $\frac{1}{r}$ است.

مراجع

- [1] L. Andersson, G.J. Galloway, *dS/CFT and spacetime topology*. Adv. Theor. Math. Phys., **6(2)**, 2002, 307-327.
- [2] L. Andersson, G.J. Galloway, R. Howard, *A strong maximum principle*. Commun. Pure Appl. Math., **51(6)**, 1998, 581-624.
- [3] R. Bartnik, *Regularity of variational maximum surfaces*. Acta Math., **161(3-4)**, 1988, 145-181.
- [4] R. Bartnik, *constant mean curvature surfaces*. Commun. Math. Phys., **171(4)**, 1988, 615-624.
- [5] J.K. Beem, P.E. Ehrlich, K.L. Easley, *Global Lorentzian Geometry*. Marcel Dekker Inc., **202**, 1996.
- [6] J.K. Beem, P.E. Ehrlich, S. Markvorsen, G.J. Galloway, *Decomposition theorems for lorentzian manifolds*. J. Differ. Geom., **22**, 1985, 29-42.

- [7] A. Borde, *Open and closed universes, initial singularities*. Phys. Rev. D., **50(6)**, 1994, 3692-3702.
- [8] M. Cai, G.J. Galloway, *Boundaries of zero scalar curvature*. Adv. Theor. Math. Phys., **3(6)**, 2000, 1769-1783.
- [9] J-H. Eschenburg, *Comparison theorems and hypersurfaces*. Manuscr. Math., **59(3)**, 1987, 295-323.
- [10] J-H. Eschenburg, *The splitting theorem for spacetimes with the strong energy condition*. J. Differ. Geom., **27**, 1988, 477-491.
- [11] J-H. Eschenburg, *Maximum principle for hypersurfaces*. Manuscr. Math., **64(1)**, 1989, 55-75.
- [12] J-H. Eschenburg, G.J. Galloway, *lines in space-times*. Commun. Math. Phys., **148(1)**, 1992, 209-216.
- [13] G.J. Galloway, *Splitting theorem for spatially closed space-times*. Commun. Math. Phys., **96(4)**, 96(4)1984, 423-429.
- [14] J-H. Eschenburg, *Curvature, causality and completeness in space-times*. Math. Proc. Camb. Philos.soc., **99(2)**, 1986, 367-375.
- [15] J-H. Eschenburg, *Some connections between global hyperbolicity and geodesic completeness*. J. Geom. Phys., **6(1)**, 1989, 127-141.

- [16] J-H. Eschenburg, *Some rigidity results for spatially closed spacetimes*. Banach Center Publ., **41**, 1996.
- [17] J-H. Eschenburg, *Cosmological spacetimes with $\Lambda > 0$* . Contemp. Math., **359**, 2004, 87-101.
- [18] G.J. Galloway, A. Horta, *Regularity of Lorentzian Busemann functions*. Trans. Am. Math. soc., **348(5)**, 1996, 2063-2084.
- [19] R. Geroch, *Singularities*. Plenum, New York., 1970, 259-291.
- [20] S.W. Hawking, G.F.R. Ellis, *The Large Scale Structure Of Space-times*. Cambridge University Press, London., 1973.
- [21] H. Karcher, *Riemannian comparsion constructions*. MAA Stud. Math., **27**, 1989, 170-222.
- [22] B. O'Neill, *Semi Riemannian Geometry*. Academic Press Inc, New York., **103**, 1983.
- [23] A. Papadopoulos, *Metric Spaces, convexity and nonpositive curvature*. Zurich., 2005.
- [24] R. Penrose, *Techniques Of Differential Topology In Relativity*. Philadelphia., 1972.
- [25] T.G. Powell, *Lorentzian Manifolds With Non-Smooth Metrics*. ProQuest LLC, AnnArbor., 1982.

- [26] M. Sharifzadeh, Y. Bahrampour, *Some results about the level sets of Lorentzian Busemann function*. Commun. Math. Phys., **286(1)**, 2009, 389-398.
- [27] J-H. Treude. *Ricci Curvature Comparsion In Riemannian And Lorentzian Geometry*. Freiburg., **2011**.
- [28] J-H. Treude, J.D.E. Grant, *Volume Comparsion for Hypersurfaces in Lorentzian Manifolds and Singularity Theorems*. arXiv: 1201. 42491., 2012.
- [29] C. Vega, *New Approaches To Spacetimes Rigidity And Splitting*. University of Miami, Coral Gables., 2013.
- [30] S-T. Yau, *Problem section. Annals of Math*. University Press, Princeton., 1982, 669-706.
- V. Carlos, *New Approaches to Spacetime Rigidity and Splitting*. Open Access Dissertations., **1075**, 2013.
- [31] S. Willard, *General topology*. AMS., 1970.
- [32] James R. Munkres, *Topology*. Prentice Hall., 2000.
- [33] P. A. C. Newman, *A proof of the splitting conjecture of s.-t. yau*. J. Differential Geometry., **31**, 1990, 163-184.
- [34] J. M. Lee, *Rietnannian Manifolds An Introduction to Curvature*. Springer-Verlag New York, Inc, 1997.

-
- [35] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer Science+Business Media, LLC, 2006.
- [36] B. Honari, Y. Bahrampour, *Cut-Point Spaces*. Proceedings Of The American Mathematical Society., textbf127, 1999, 2797-2803.
- [37] G.J. Galloway, C. Vega, *Achronal Limits, Lorentzian Spheres, and Splitting*. Springer Basel, **15**, 2014, 2241-2279.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Achronal	آکرونال
Curvature	انحناء، خمیدگی
Future	آینده
Future increasing	آینده افزایشی
Principle	اصل
Geodesically	به طور ژئودزیکی
Closure	بستار
Strongly	به طور قوی
Uniformly	به طور یکنواخت
Null	پوچ، تهی
Decomposition	تجزیه
Generalized	تعمیم یافته
Directed	در جهت
Future directed	در جهت آینده
Past directed	در جهت گذشته
Achronal limit	حد آکرونال
Horizon	خط افق، سطح افق
Line	خط

Lorentzian manifold	خمینه لورنتسی
Riemannian manifold	خمینه ریمانی
Time-dually	دوگان زمانی
Timelike	زمان گونه
Proper	سره
Globally	سراسری
Rigidity	سختی، عدم انعطاف
ray	شعاع
Horosphere	شبه کره
Future ray	شعاع آینده
Past Ray	شعاع گذشته
Ray horosphere	شبه کره شعاعی
Arc length	طول قوس
Causal	علّی
Causality	علّیت
Future causally	علّی آینده
Past causally	علّی گذشته
Acausal	غیر علّی
Compact	فشرده
Distance	فاصله، مسافت
Spacelike	فضا گونه

Spacetime	فضازمان
Segment	قطعه
Boundedness	کرانداری
Cauchy	کشی
Completeness	کامل بودن
Sphere	کره
Past	گذشته
Past increasing	گذشته افزایشی
Past proper	گذشته سره
Edge	لبه
Curve	منحنی، خم
Future bounded	کراندار آینده
Future support	محمل آینده
Future set	مجموعه آینده
Induced metric	متریک القائی
Maximal	ماکسیمال، بزرگترین
Past bounded	کراندار گذشته
Past support	محمل گذشته
Past set	مجموعه گذشته
Exponential	نمایی
Connected	همبند

Convexity	تحدّب
Hyperbolic	هذلولوی
Smooth	هموار
Monotonic	یکنواخت، یکنوا

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Achronal	آکرونال
Achronal limit	حد آکرونال
Acausal	غیر علیّ
Arc length	طول قوس
Boundedness	کراننداری
Bounded	محدود، کراندار
Cauchy	کشی
Causal	علّی
Causality	علّیت
Closure	بستار
Compact	فشرده
Completeness	کامل بودن
Connected	همبند
Convexity	تحدّب
Curvature	انحناء، خمیدگی
Curve	منحنی، خم
Decomposition	تجزیه
Directed	در جهت

Distance	فاصله، مسافت
Edge	لبه
Exponential	نمایی
Future	آینده
Future bounded	کراندار آینده
Future causally	علّی آینده
Future directed	در جهت آینده
Future increasing	آینده افزایشی
Future proper	آینده سره
Future ray	شعاع آینده
Future set	مجموعه آینده
Future support	محمل آینده
Generalized	تعمیم یافته
Geodesically	به طور ژئودزیکی
Globally	سراسری
Horizon	خط افق، سطح افق
Horosphere	شبه کره
Hyperbolic	هذلولوی
Induced metric	متریک القائی
Line	خط
Lorentzian manifold	خمینه لورنتسی

Manifold.....	خمینه
Maximal.....	ماکسیمال، بزرگترین
Monotonic.....	یکنواخت، یکنوا
Null.....	پوچ، تهی
Past.....	گذشته
Past bounded.....	کراندار گذشته
Past causally.....	علّی گذشته
Past directed.....	در جهت گذشته
Past increasing.....	گذشته افزایشی
Past proper.....	گذشته سره
Past ray.....	شعاع گذشته
Past set.....	مجموعه گذشته
Past support.....	محمل گذشته
Principle.....	اصل
Proper.....	سره
Ray.....	شعاع
Ray horosphere.....	شبه کره شعاعی
Riemannian manifold.....	خمینه ریمانی
Rigidity.....	سختی، عدم انعطاف
Segment.....	قطعه
Smooth.....	هموار

Spacelike	فضاگونه
Spacetime	فضازمان
Sphere.....	کره
Strongly	به طور قوی
Strongly causal	به طور قوی علّی
Support sense	مفهوم محمل
Time-dually	دوگان زمانی
Timelike.....	زمان گونه
Uniformly	به طور یکنواخت،
Weak mean.....	متوسط ضعیف

Surename: Farzami	Name: Elham
Title: Achronal Limits And Splitting Theorem	
Supervisor: Dr. Mehdi Sharifzadeh	
Advisor: Dr. Alireza Olfati	
Degree: Master of Science	Subject: Pure Mathematic
Field: Geometry And Topology	
University of Yasuj	Faculty of Basic Science
Date: 2017	Number of pages: 113
Keywords: <i>Spacetime, Cauchy surface, Rigidity, Covnexity.</i>	
Abstract: In this thesis the general purpose is interpretation of the horospheres with achronal approach in Lorentzian geometry and the investigation in splitting theorem and its correspondence with Hawking-Penrose singularity theorems. In this way, at first, we introduce the concepts of achronal limits, spheres, horospheres and their generalization in Lorentzian geometry, weak mean curvature inequalities and the results related to splitting for generalized horospheres and finally, the properties of convexity and rigidity of the generalized horospheres are investigated.	



University of Yasouj
Faculty of Basic Sciences
Department of Mathematics

Thesis:
For the degree of Master of Science in the Field Pure
Mathematic-Geometry And Topology

Title:
Achronal Limits And Splitting

Supervisor: Dr. Mehdi Sharifzadeh

Advisor: Dr. Alireza Olfati

Researcher:
Elham Farzami

15 February 2017