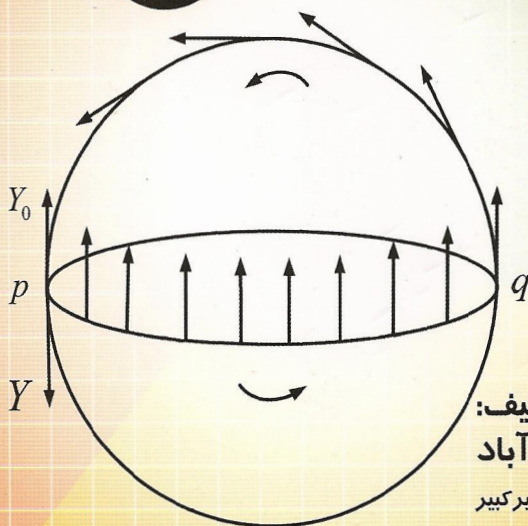
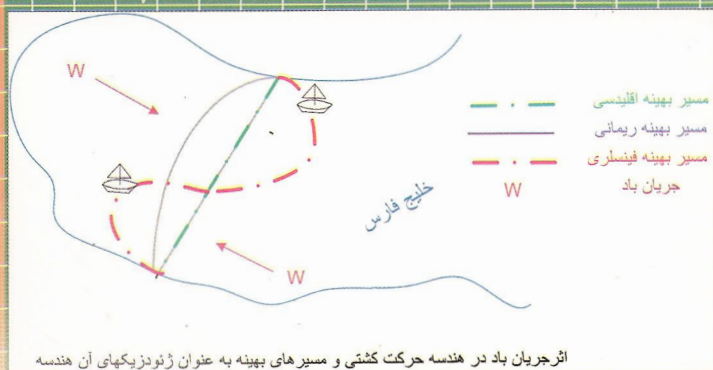




انتشارات دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

هندسه منیفلد (۲)



تالیف:

دکتر بهروز بید آباد

عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی امیرکبیر

بسم الله الرحمن الرحيم

هندسہ منیفلد (۲)

تألیف

دکتر بهروز بیدآباد

عضو هیات علمی دانشگاه صنعتی امیرکبیر

زمستان ۱۳۸۹

فهرست مطالب

الف	دیاچه
۱	۱ منیفلدهای ریمانی
۲	۱.۱ متریک ریمانی
۶	۲.۱ متریک القایی به زیر منیفلدها
۷	۱.۲.۱ روش محاسبه متریک القائی IR^m
۱۰	۳.۱ متریک حاصلضرب
۱۲	۴.۱ شرایط وجود متریک ریمانی
۱۵	۲ یک تعمیم از متریک ریمانی و کاربرد آن
۱۶	۱.۲ تاریخچه متریک فینسلری
۱۷	۲.۲ از هندسه اقلیدسی تا هندسه فینسلری
۲۱	۳.۲ متریک فینسلری
۲۴	۱.۳.۲ چند مثال از متریک فینسلری
۲۶	۴.۲ توابع همگن و قضیه اولر
۲۸	۵.۲ استفاده از متریک فینسلری در مدل سازی مسائل کاربردی
۲۹	۱.۵.۲ شاخص یا ایندیکاتریکس یک تابع اساسی فینسلری
۳۰	۲.۵.۲ مدل سازی ریاضی و هندسه یک حرکت
۳۲	۳.۵.۲ مسئله ناوبری زرمولو و تعیین متریک یا هندسه یک حرکت
۳۳	۴.۵.۲ بدست آوردن تابع اساسی فینسلری به روش اوکوبو
۳۹	۶.۲ مسیرهای بهینه در مسائل کاربردی

۳ التصاق خطی و التصاق ریمانی ۴۱

۴۳	۱.۳	التصاق خطی و مشتق گیری همگرد
۴۶	۲.۳	تعبیر هندسی مشتق گیری همگرد در طول یک منحنی
۴۹	۳.۳	التصاق ریمانی و قضیه اساسی هندسه ریمانی
۵۳	۱.۳.۳	صورت موضعی قضیه اساسی و مشتق گیری همگرد
۵۶	۴.۳	ژئودزیک به عنوان تعمیم خط راست روی منیفلد
۵۹	۱.۴.۳	ژئودزیک های کره S^2
۶۳	۵.۳	تعبیر هندسی کلمه موازی و انتقال موازی روی منیفلدها
۶۷	۶.۳	مشتق همگرد میدان های تانسوری
۷۰	۱.۶.۳	یکریختی موسیقیایی
۷۱	۲.۶.۳	مشتق همگرد کل
۷۳	۷.۳	مشتق لی و میدان های برداری همدیس و متجانس

۴ انحنای ریمان ۷۹

۸۴	۱.۴	انحنای ریمان
۸۷	۱.۱.۴	انحنا در مختصات موضعی
۸۹	۲.۱.۴	منیفلد مسطح
۹۲	۲.۴	انحنای برشی
۹۹	۳.۴	انحنای ریچی و انحنای عددی
۱۰۳	۴.۴	متریک های شبه ریمانی و مسئله فضا-زمان انیشتن
۱۰۳	۱.۴.۴	متریک های شبه ریمانی
۱۰۶	۲.۴.۴	پیدایش متریک انیشتن
۱۰۹	۵.۴	صلبیت یا استحکام منیفلدها

۵ آنالیز روی منیفلد ها ۱۱۳

۱۱۴	وجود و یکتایی ژئودزیک ها	۱.۵
۱۱۷	میدان برداری ژئودزیک یا اسپری	۱.۱.۵
۱۱۸	نگاشت نمایی	۲.۵
۱۱۹	روش محاسبه دیفرانسیل یک تابع نمایی	۳.۵
۱۲۲	مختصات نرمال و شرایط وجود و یکتایی آن	۴.۵
۱۲۵	کاربرد مختصات نرمال	۵.۵
۱۲۹	لم گاوس	۶.۵
۱۳۶	کمینه بودن ژئودزیک ها	۷.۵
۱۴۲	قضیه هاف-رینو	۸.۵
۱۴۳	منیفلد های کامل	۱.۸.۵
۱۵۰	گرادیان، دیورژانس و لاپلاسیان منیفلدهای ریمانی	۹.۵
۱۵۷	انتگرال روی منیفلدهای ریمانی و قضیه هاف	۱۰.۵
۱۶۳	قضیه دیورژانس و فرمول انتگرال گیری جز به جز روی منیفلد ها	۱۱.۵

۶ نظریه منحنی ها در منیفلدهای ریمانی ۱۶۷

۱۶۸	فرمول های فرنه در منیفلدهای ریمانی	۱.۶
۱۷۱	دایره ژئودزیک روی منیفلدهای ریمانی	۲.۶

۷ زیر منیفلدهای یک منیفلد ریمانی ۱۷۵

۱۷۷	دومین فرم اساسی زیر منیفلدهای ریمانی	۱.۷
۱۸۳	معادلات اساسی زیر منیفلد های ریمانی	۲.۷
۱۸۸	معادلات گاوس-کودازی	۱.۲.۷
۱۹۱	معادلات اساسی ابر رویه های یک منیفلد ریمانی	۲.۲.۷
۱۹۴	قضیه باهیت گوس	۳.۲.۷

۱۹۷	انحناهای دیگر روی یک زیرمنیفلد و رابطه بین آنها
۱۹۹	۱.۳.۷ لم شور

۸ میدانهای ژاکوبی

۲۰۸	۱.۸ معادلات ژاکوبی
۲۱۰	۲.۸ میدان ژاکوبی
۲۱۷	۳.۸ تعبیر میدانهای ژاکوبی و رابطه میان انحنا و توزیع ژئودزیکیها
۲۱۸	۴.۸ نقاط مزدوج

۹ فرم های التصاق

۲۲۱	۱.۹ پایه های غیر مختصاتی
۲۲۳	۲.۹ ۱- فرم های التصاق کارتان
۲۲۶	۳.۹ ۲- فرم انحنا در منیفلدها
۲۳۲	۱.۳.۹ اتحاد ریچی و اتحاد بیانچی

۱۰ نظریه کلاف ها

۲۳۷	۱.۱۰ کلاف تاری یا فضای فیبره
۲۴۱	۲.۱۰ کلاف کروی واحد یا کلاف تاری یک
۲۴۲	۱.۲.۱۰ کلاف کروی تصویری
۲۴۴	۳.۱۰ استفاده از نظریه کلاف ها جهت ساخت منیفلد های با ابعاد بالاتر
۲۴۵	۴.۱۰ نگاشت گذر یا تغییر کارت یک کلاف تاری
۲۴۶	۵.۱۰ کلافهای برداری
۲۴۸	۶.۱۰ همریختی کلاف های برداری
۲۴۹	۷.۱۰ برشهای کلاف برداری
۲۵۱	۸.۱۰ کلاف برداری دوگان

۲۵۱	۹.۱۰ جمع مستقیم ویتنی دو کلاف برداری
۲۵۳	۱.۹.۱۰ میدان های تانسوری روی کلاف های برداری
۲۵۴	۱۰.۱۰ کلاف برگردان
۲۵۵	۱۱.۱۰ زیرکلاف ها
۲۵۶	۱۲.۱۰ کلاف عمودی و برش موقعیت
۲۶۰	۱.۱۲.۱۰ برش موقعیت
۲۶۲	۲.۱۲.۱۰ یکرختی کلاف عمودی و کلاف برگردان
۲۶۳	۱۳.۱۰ زیرکلاف افقی
۲۶۵	۱۴.۱۰ التصاق غیرخطی روی کلافهای برداری
۲۶۷	۱۵.۱۰ التصاق خطی روی کلافهای برداری
۲۶۹	۱۶.۱۰ ۱- فرم التصاق روی یک کلاف برداری
۲۷۰	۱۷.۱۰ ۲- فرم انحنا روی یک کلاف برداری
۲۷۲	۱۸.۱۰ التصاق جهتی
۲۷۵	۱۹.۱۰ التصاق فینسلری
۲۷۶	۱.۱۹.۱۰ مقدمات ساختار فینسلری
۲۷۸	۲.۱۹.۱۰ التصاق فینسلری
۲۷۹	۳.۱۹.۱۰ التصاق فینسلری منظم
۲۸۳	۴.۱۹.۱۰ انحنا و تاب التصاق فینسلری
۲۸۵	۲۰.۱۰ التصاق های کارتان و چرن
۲۸۶	۱.۲۰.۱۰ التصاق کارتان
۲۸۸	۲.۲۰.۱۰ التصاق چرن

۲۹۱ ۱۱ گروه و جبرلی

۲۹۲ ۱.۱۱ گروه توپولوژیک

۲۹۵	۱.۱.۱۱ زیرگروه یک گروه توپولوژیک
۲۹۶	۲.۱۱ گروه لی
۲۹۷	۱.۲.۱۱ مقایسه تعریف گروه توپولوژیک و گروه لی
۲۹۷	۲.۲.۱۱ چند مثال از گروههای لی
۲۹۸	۳.۱۱ مولفه همانی یک گروه لی
۳۰۰	۴.۱۱ حاصلضرب گروههای لی
۳۰۱	۵.۱۱ زیرگروه های یک گروه لی
۳۰۴	۶.۱۱ همریختی و یکرختی گروههای لی
۳۰۵	۷.۱۱ یافتن زیرگروه های لی و جبر لی
۳۰۹	۸.۱۱ عمل یک گروه لی روی یک منیفلد

۱۲ قضیه گاوس- بونه

۳۱۷	
۳۱۹	۱.۱۲ مشخصه اولر در هندسه و توپولوژی
۳۱۹	۱.۱.۱۲ پایاهای توپولوژیک
۳۲۰	۲.۱.۱۲ مشخصه اولر در IR^3
۳۲۴	۳.۱.۱۲ مشخصه اولر در ابعاد بالا
۳۲۵	۲.۱۲ انحنای ژئودزیک و مختصات شبه ژئودزیک
۳۳۱	۳.۱۲ قضایای گاوس-بونه
۳۳۲	۴.۱۲ اثبات فرمول گاوس- بونه
۳۳۶	۱.۴.۱۲ اثبات فرمول گاوس- بونه
۳۴۰	۵.۱۲ اثبات قضیه سرتاسری گاوس- بونه
۳۴۱	۶.۱۲ تعمیم قضیه گاوس-بونه

۱۳ حسابان تغییرات

۳۴۵	
۳۴۷	۱.۱۳ تغییرات یک منحنی تکه‌ای هموار و فضای مسیر

۳۵۰	۲.۱۳ مسیره‌های بحرانی
۳۵۲	۳.۱۳ انرژی یک مسیر
۳۵۴	۴.۱۳ فرمول اولین تغییرات
۳۵۸	۵.۱۳ اندیس و تباهی در یک نقطه بحرانی
۳۶۲	۶.۱۳ فرمول تغییرات دوم
۳۶۴	۷.۱۳ میدانهای ژاکوبی و نقاط مزدوج
۳۷۰	۱۰.۷.۱۳ تعبیر هندسی میدانهای ژاکوبی
۳۷۲	۲۰.۷.۱۳ تعبیر رابطه بین انحنا و توزیع ژئودزیکها
۳۷۶	۳۰.۷.۱۳ چند مثال از میدانهای ژاکوبی و نقاط مزدوج
۳۷۸	۴۰.۷.۱۳ دومین کاربرد میدانهای ژاکوبی و نقاط مزدوج
۳۸۲	۸.۱۳ نقاط مزدوج و تباهی هسیان
۳۸۴	۹.۱۳ قضیه اندیس (مورس)
۳۹۶	۱۰.۱۳ کاربرد حسابان تغییرات
۳۹۷	۱۰.۱۰.۱۳ منیفلدهای با انحنای ریچی مثبت (قضیه مایرز)

۴۰۱	۱۴ راهنمای حل برخی از مسایل کتاب
۴۰۱	۱.۱۴ نکاتی در مورد روش حل مسایل هندسه
۴۰۳	۲.۱۴ راهنمای حل چند تمرین از کتاب
۴۲۵	۳.۱۴ مسایل گوناگون
۴۲۸	۴.۱۴ راهنمای حل مسایل گوناگون

۴۳۶ کتابنامه

۴۴۷ نمایه

۴۵۹ واژه نامه فارسی به انگلیسی

دیباچه

شکر و سپاس بی همتایی را سزد که انسان را خلق کرد، تاج اکرام بر سر وی نهاد و به او وعده تسلط بر مجهولات جهان هستی را داد. بدیهی است که تحقق این وعده بزرگ الهی نیاز به فکر و تحقیق دارد. برای درک بهتر این موضوع و یافتن راهکارهای آن از بیانات اندیشمندان بزرگی استفاده می‌کنیم که از درون خود به اسرار جهان هستی پی برده بودند، بدون آنکه در کلاس درس شرکت کنند.

یکی از عرفای بزرگ اوائل قرن چهاردهم در بیان فکر و تحقیق چنین می‌فرماید^۱:

امتیاز انسان از سایر جانداران به عقل و فکر پایان بین است.

همانطور که از لفظ این عبارت به نظر می‌رسد، فکر پایان بین فکری است که بیشتر به پایان کار می‌انديشد، نه فقط به سود و زیان آن در آینده نزدیک. هر چه این فکر دوراندیش تر باشد، عمیق تر و با ارزش تر است.

مفهوم این جمله که تفاوت بین انسان و جانداران را بیان می‌کند بسیار عمیق بوده و نه در توان نگارنده است که بتواند آن را شرح دهد، و نه این کتاب به آن منظور نوشته شده است. اما از آنجا که اصلاح فکر و نیت انسان در شروع هر کار موجب تقویت و پشتکار،

^۱ کتاب شریف پند صالح چاپ چهارم اثر مولانا المعظم حضرت قطب العارفین آقای حاج شیخ محمد حسن صاحب علیشاه قدس الله سره ۱۲۷۰-۱۳۴۵ هجری.

و در نهایت موفقیت او می شود، دست ارادت به سوی عرفای بزرگ دراز نموده از خرمن دانش و جهان بینی آن ها خوشه ای می چینیم و توشه راه نموده در تحصیل دانش ریاضی از آن بهره می بریم. به طور کلی علم و دانش، به معنای صحیح آن، مانند نوری است که موجب افزایش بینش شده و منجر به شناخت مجهولات جهان هستی در ابعاد مختلف می گردد و کسب آن بدون تلاش و لطف الهی میسر نمی گردد. دراین میان از بیانات سعدی عارف قرن هفتم هجری استفاده می کنیم.

نابرده رنج گنج میسر نمی شود مزد آن گرفت جان برادر که کار کرد

لذا انسان وقتی به دریای علم و دانش خصوصا در ریاضیات، دست پیدا می کند که از خواسته هایی که مطابق با فکر پایان بین نیست چشم پوشی نماید. به طور کلی، آغاز این فکر دور اندیش، آغاز حرکت در راه علم و دانش است. مولوی عارف بزرگ قرن هفتم در این زمینه چنین می فرماید.

هر که آخر بین تراو مسعود تر هر که آخور بین تراو مترود تر
از پی هر گریه آخر خنده ایست مرد آخر بین، مبارک بنده ایست

اگر انسان با اصلاح فکر و نیت خود صاحب اندیشه پایان بین گردیده و هدفی بزرگ داشته باشد، از ناملایماتی که در راه او پیش می آید اندوهگین و دلسرد نمی گردد. بنابراین یافتن هدفی بزرگ برای همه و خصوصا برای دانشجویان دروس ریاضی بسیار مفید به نظر می رسد.

لذا از همه ما علاقه مندان به دروس ریاضی انتظار می رود که با صبر و پشتکار و با تقویت فکر پایان بین خویش در این راه قدم برداشته و تلخی های آن را با تحمل و استقامت به شیرینی تبدیل کنیم. باشد که خداوند از آن دریای علم و دانش خود قطره ای نیز به ما عنایت فرماید.

سخنی با مسئولین و علاقه مندان ریاضی در ایران.

بر اساس آمار و اظهار نظر اساتید بین المللی که اخیرا از مجامع ریاضی ایران و جهان دیدن کرده اند، نسبت دانشجویان علاقه مند به تحصیلات عالی در این کشور بیش از سایر کشورهای غربی و حتی بیش از کشورهای شرقی مانند چین است. این موضوع یکی از بزرگترین امتیازات کشور ایران محسوب می گردد، به این معنی که دارای بالاترین نسبت جمعیت جوان و علاقه مند به تحصیلات عالی در جهان است. لذا وظیفه همه مسئولین و مراکز تصمیم گیری کلان کشور خصوصا در آموزش عالی است که از این سیل خروشان و با ارزش که دیری نخواهد پایید با برنامه ریزی مناسب نهایت استفاده را ببرند. چنانچه برنامه ریزی صحیح در آموزش و تحقیقات و همچنین پیش بینی لازم برای جذب این افراد به صورت مناسب انجام پذیرد می توان شاهد جهش علمی ایران در دهه آینده بود.

مقدمه کتاب

اما بعد، از آنجا که درس هندسه با قدمت بیش از دو هزار و چهارصد سال در تاریخ به عنوان اولین مطالعات ریاضی در جهان شناخته شده است، اما به علت پیشرفت های چشمگیری که در چند دهه اخیر رخ داده است، در مقایسه با دروس جبر و آنالیز فاقد متون مناسب برای تدریس در سطوح مختلف از دبیرستان تا دانشگاه می باشد. از طرف دیگر عدم وجود یک چتر حمایتی از طرف مراکز علمی کشور و هزینه های سنگین چاپ کتاب، موجب گردیده است که این بحران در کشور ایران نمود بیشتری پیدا کند. نظر به کمبود متون کلاسی هندسه، خصوصا در زبان فارسی، بیم آن می رود که دانشجویان این رشته احساس ناپوستگی در مطالب نموده و در نتیجه، دچار نابسامانی پایه افکار خود گردند. این کتاب خلاصه مطالبی است در هندسه منیفلد^۱ که در طی مدتی بیش از بیست و دو سال توسط نگارنده در دانشگاه های ایران و دانشگاه پردو در شهر ایندیناپولیس آمریکا^۲ تدریس گردیده است. مطالب این

^۱ Purdue University Indiana University, Indianapolis, USA, 2009-2010.

کتاب بر اساس نیاز دانشجویان ایرانی و اطلاعات آنها، مطابق با روش‌های جدید در آخرین متون هندسه که به زبانهای انگلیسی، فرانسه و فارسی منتشر گردیده و همچنین مرتبط با تحقیقاتی است که اخیراً در مرزهای دانش انجام می‌شود نگارش گردیده است. امید آن می‌رود که به لطف خداوند و کمک اساتید و دانشجویان علاقه‌مند به دروس هندسه در ابراز عقیده و بیان اشکالات آن، رفته رفته تکمیل گردد.

کتاب هندسه منیفلد^۱ که اولین کتاب به زبان فارسی در هندسه منیفلد هاست، مورد توجه اساتید و دانشجویان علاقه‌مند به هندسه و کاربرد آن واقع و تا کنون چندین بار به طور مکرر چاپ و چاپ دوم آن نیز برنده جایزه کتاب برتر در *اولین جشنواره ملی کتب فنی مهندسی و علوم گردیده* است. از طرفی چون اساتید محترم هندسه و دانشجویان این رشته، تکمیل آن را خواستار بودند، تصمیم گرفتم تا به یاری خداوند در بضاعت ناچیز خود اقدام به نگارش کتاب هندسه منیفلد^۲ نمایم، باشد که مورد استفاده ایشان و همه علاقه‌مندان به هندسه و کاربرد آن در مهندسی و علوم، قرار گیرد. امیدوارم بتوانم با این کار قدمی هر چند کوچک، در راه پیشرفت هندسه دانشجویان ریاضی در ایران برداشته باشم.

روش مطالعه این کتاب

این کتاب برای کلیه دانشجویان علاقه‌مند به هندسه و کاربرد آن در مهندسی و علوم نگارش گردیده است. در این کتاب مطالب زیادی گردآوری گردیده است که بسیار بیش از سرفصل‌های مورد نیاز در درس رسمی هندسه منیفلد^۲ است، اما تمام آنها را به طور کامل پوشش داده و خواننده را برای ادامه مطالعات و تحقیقات خود در هر فصل یاری می‌کند. لذا دانشجویان کارشناسی ارشد در گرایش‌های مهندسی، فیزیک نظری و هندسه منیفلد^۲، با توجه به نیاز تحقیقاتی خود و نظرات اساتید محترم باید فصول درس را انتخاب نمایند. فصول دیگر برای دانشجویان دوره دکتری هندسه توصیه می‌گردد.

تقدیر و تشکر

در راه طولانی نگارش این کتاب، از کتب، مقالات و جزوات اساتید و پایان نامه‌های دانشجویان زیادی استفاده نموده‌ام که نام آن‌ها را در کتابنامه هر فصل ذکر کرده‌ام. از اساتید محترم دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه امیرکبیر، خصوصا آقای دکتر اسدالله رضوی برای ارایه نظر در مورد فصل گروه‌های لی، آقای دکتر ناصر بروجردیان برای اصلاحات فصل کلاف‌ها و آقای دکتر مرتضی میر محمد رضایی برای حمایت و زحماتشان در کمک به نگارش این کتاب تشکر می‌نمایم. همچنین در این راه دانشجویان زیادی متحمل زحمت شده و مرا یاری نمودند که تعداد آنها بسیار زیاد است. اگر بخواهم بیشتر توضیح بدهم باید بگویم که تعداد آنها به اندازه تعداد کل کسانی است که در دانشگاه امیرکبیر و دانشگاه پردو در شهر ایندیاناپولیس آمریکا در گرایش هندسه تحصیل نموده و با اینجانب درس هندسه منیفلد گرفته و یا به هر جهت با اینجانب در تماس بوده یا سؤالی مطرح کرده اند. کم و بیش میزان تاثیر زحمات آنها را خود آن افراد با مطالعه کتاب در می‌یابند. اما به دلیل آنکه ممکن است نام بعضی از این عزیزان از قلم بیافتد، از ذکر نام آن‌ها خودداری نموده و از یکایک آنها قدردانی می‌نمایم.

حروف چینی نسخه فعلی کتاب به همت آقای دکتر مهدی امیدعلی که از توسعه دهندگان بسته‌زی‌پرشین^۳ هستند توسط ایشان به این سبک برگردانده شده است که لازم است از زحمات ایشان در تکمیل این بسته که در آینده نقش بسیار مهمی در گسترش ریاضی خواهد داشت تشکر کرد.

مهم‌ترین خاصیت این نرم‌افزار قابلیت جستجو در فایل پی‌دی‌اف است که نرم‌افزارهای فارسی‌تک و تک‌پارسی فاقد آن بوده‌اند. لذا پیشنهاد آخر اینجانب به کلیه اساتید ریاضی و مدیران دانشکده‌های ریاضی آن است که پایان‌نامه‌های ارشد و دکتری ریاضی با این بسته نوشته شود تا با امکان جستجو در فایل پی‌دی‌اف آن تحولی در دسترسی به مفاهیم ریاضی

^۳XqPersian

در مرزهای دانش به زبان فارسی و در پایان نامه ها امکان پذیر گردد.
از خوانندگان عزیز در مورد غلط های چاپی احتمالی پوزش طلبیده، از آنها تقاضا دارد،
در صورت امکان، مراتب را به اینجانب اطلاع دهند تا در چاپ های بعدی اصلاح گردد.

بهروز بیدآباد

دانشیار دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

پاییز ۱۳۸۹

آدرس الکترونیکی: bidabad@aut.ac.ir

منیفلدهای ریمانی

هندسه ای که ریمان آن را برای اولین بار مطرح ساخت و بنام هندسه ریمانی معروف گردید در حقیقت تعمیم مطالبی بنام هندسه دیفرانسیل رویه ها است که توسط گاوس مورد مطالعه قرار گرفته بود. در هندسه دیفرانسیل رویه ها یک ضرب داخلی روی خانواده بردارهای مماس بر رویه تعریف می گردد که توسط این ضرب می توان طول بردارهای مماس بر رویه در $\mathbb{R}^3$ را بدست آورد. این ضرب داخلی را معمولاً توسط $\langle , \rangle$ نمایش می دهند. از خواص جالب توجه این ضرب آن است که کلیه خواص هندسی رویه از جمله طول قوس یک منحنی

$\gamma(t)$ در روی هر رویه را نیز می‌توان با استفاده از آن بدست آورد.

$$L = \int_a^b \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle^{\frac{1}{2}} dt$$

مفاهیم دیگری نیز با استفاده از این ضرب داخلی در روی رویه تعریف می‌شوند که عبارتند از مساحت یک رویه، زاویه بین دو منحنی، انحنای رویه و غیره. طول قوس یک خم و روش محاسبه آن اساس تعریف خواص هندسی آن فضا است. به عبارت دقیقتر وقتی روشی یا فرمولی (معمولا با استفاده از انتگرال ریمان) برای محاسبه طول قوس یک خم در یک فضا ارائه می‌دهیم یک نوع ضرب داخلی یا متریک روی آن فضا تعریف کرده ایم. با استفاده از این متریک می‌توان کلیه خواص هندسی دیگر آن فضا را تعریف نمود. لذا می‌توان گفت که بنوعی با ارائه یک متریک در یک فضا در حقیقت هندسه آن را معرفی کرده ایم.

در حقیقت اولین کار ریمان تعمیم این ضرب بود که بعدها منجر به تعریف انتگرال ریمان و متریک ریمان گردیده، موجبات تعریف هندسه ریمانی را پس از هندسه اقلیدسی فراهم نمود. در فیزیک نیز مشابه این کاری یعنی تعریف هندسه فضا توسط شکل خاصی از انتگرال بالا و عبارت زیر آن صورت می‌گیرد و اساس کارهای فیزیک نظری است. تابع انرژی که در فصل حسابان تغییرات به آن پرداخته می‌شود از این مقوله است.

یکی دیگر از مفاهیم جالب در هندسه مفهوم ژئودزیک به عنوان کوتاهترین منحنی واصل بین دو نقطه است که توسط ضرب داخلی برخوایسته از متریک ریمان تعریف می‌شود. مفهوم ژئودزیک و نقش آن در توسعه هندسه و همچنین در کاربرد هندسه و حل مسائل بهینه سازی رادر فصل تعمیم مترهای فینسلری و فصل حسابان تغییرات مطالعه خواهیم نمود.

۱.۱ متریک ریمانی

فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر از کلاس C^2 و به بعد n باشد.

تعریف ۱.۱.۱. یک متریک ریمانی^۱ روی منیفلد دیفرانسیل پذیر M عبارتست از یک تانسور g از نوع $(\dot{,})$ روی M بطوریکه در هر نقطه p از M ، g_p متقارن باشد، یعنی

$$\forall X, Y \in T_p M, g_p(X, Y) = g_p(Y, X),$$

و معین مثبت باشد، یعنی $g_p(X, X) > 0$ اگر $X \neq 0$ باشد.

به راحتی می توان بررسی نمود که این تانسور در هر نقطه M یک ضرب داخلی روی $T_p M$ تعریف می کند. این ضرب داخلی را توسط $\langle X, Y \rangle_p < X, Y >_p$ یا تانسور $g_p(X, Y)$ نمایش می دهیم.

اگر (x, U) یک کارت در همسایگی نقطه p از منیفلد M ، $x(p) = (x^1, \dots, x^n)$ مختصات موضعی وابسته به آن و $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ پایه ای در همسایگی p روی $T_p M$ باشد داریم:

$$X_p = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p) \quad , \quad Y_p = \sum_{i=1}^n Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p).$$

آنگاه در مختصات موضعی تانسور ریمان به صورت زیر نوشته می شود.

$$g_p(X, Y) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(p) dx^i \otimes dx^j(X, Y)$$

چون g متقارن است رابطه فوق را می توان به صورت $g = \sum g_{ij} dx^i dx^j$ نوشت که در آن $g_{ij}(x^1, \dots, x^n)$ توابعی هستند که روی کارت (x, U) در همسایگی نقطه $p \in M$ به صورت زیر تعریف می شوند.

$$g_{ij}(p) = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}(p), \frac{\partial}{\partial x^j}(p)\right) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}(p), \frac{\partial}{\partial x^j}(p) \right\rangle.$$

و در رابطه $g_{ij} = g_{ji}$ صدق می کند.

^۱Reimannian metric

اگر درمینان ماتریسی مخالف صفر باشد آن راناتبهگون^۲ می نامیم. این مفهوم بنوعی معادل مفهوم معکوس پذیری ماتریس $[g_{ij}]$ و معین بودن تانسور g است.

مثال ۲.۱.۱. فضای $\mathbb{R}^n$ با مختصات اقلیدسی و پایه $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ را برای فضای مماس در نظر می گیریم اگر مختصات نقطه p توسط $(x^1, \dots, x^n)$ داده می شود، داریم:

$$g_{ij}(p) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}(p), \frac{\partial}{\partial x^j}(p) \right\rangle = \delta_{ij}.$$

متریک ریمان حاصل $g = \sum_{i=1}^n \delta_{ij} dx^i dx^j = (dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2$ را متریک طبیعی^۳، متریک کانونی فضای اقلیدسی^۴ یا متریک اقلیدسی می نامند. متریک ریمانی g یک متریک دیگری در T^*M فضای دوگان TM تولید می کند که آن را با g^* یا $\langle \cdot, \cdot \rangle^*$ نمایش می دهیم. g^* تانسوری از نوع $(2,0)$ است.

$$g^* = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

با استفاده از خواص ضرب داخلی در فضای دوگان می توان نتیجه گرفت که ماتریس $g^{ij}(p)$ در هر نقطه p معکوس ماتریس $g_{ij}(p)$ است و داریم:

$$\sum_{k=1}^n g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j.$$

اگر $X, Y \in T_p M$ ، آنگاه متریک ریمانی $g(X, Y)$ یا ضرب داخلی بین دو بردار X و Y را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\langle X, Y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \sum_{j=1}^n Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = \sum_{i,j} X^i Y^j \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle.$$

^۲non-degenerate

^۳Natural metric

^۴Canonical metric

$$g(X, Y) = \langle X, Y \rangle = \sum_{i,j} g_{ij} X^i Y^j.$$

در حالت خاص فضای اقلیدسی $g_{ij} = \delta_{ij}$ ، ضرب فوق به ضرب داخلی عادی در $\mathbb{R}^n$ تبدیل می‌شود.

تعریف ۳.۱.۱. منیفلد دیفرانسیل پذیر M همراه با متریک ریمانی g را یک منیفلد ریمانی^۵ نامیده توسط (M, g) نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنیم (M, g) و $(\bar{M}, \bar{g})$ دو منیفلد ریمانی بوده و $f: M \rightarrow \bar{M}$ یک دیفیئومورفیسم - یعنی f دوسویی، f و f^{-1} دیفرانسیل پذیر- بین آنها باشد. نگاشت f را یک ایزومتري^۶ گوئیم اگر $g = f^* \bar{g}$ ، یا به عبارت معادل $\forall p \in M$ و $\forall X, Y \in T_p M$ داشته باشیم:

$$g_p(X, Y) = \bar{g}_{f(p)}((f_*)_p X, (f_*)_p Y).$$

در این صورت می‌گوئیم دو منیفلد M و $\bar{M}$ باهم ایزومتر هستند.

نگاشت f را در نقطه p یک ایزومتري موضعی^۷ گوئیم اگر یک همسایگی U شامل p موجود باشد به طوری که $f(U) \subset \bar{M}$ و $f: U \rightarrow f(U)$ هم‌متري یا ایزومتري باشد. اگر به ازاء هر نقطه p از M ، یک ایزومتري موضعی موجود باشد، می‌گوئیم M و $\bar{M}$ به‌طور موضعی طول پا، به طور موضعی هم متر یا به طور موضعی ایزومتريک هستند.

تمرین ۵.۱.۱. متریک های ریمانی در منیفلد های یک بعدی. اگر $\gamma: t \in I \rightarrow M$ یک منحنی روی M باشد، آنگاه نگاشت $t = \gamma^{-1}$ یک کارت مختصاتی روی این منحنی تعریف می‌کند.

^۵Riemannian manifold

^۶Isometry

^۷locally isometric

الف) نشان دهید متریک ریمانی روی منیفلد یک بعدی γ را می توان به صورت زیر نوشت.

$$(ds)^2 = g(\gamma', \gamma') = g_{11}(dt)^2$$

راهنمایی. از فرمول طول قوس یک منحنی استفاده کنید.

ب) نشان دهید که هر منیفلد ریمانی یک بعدی که با پارامتر طبیعی طول قوس s پارامتری شده باشد (یعنی با سرعت واحد باشد) به طور موضعی با $\mathbb{R}$ ایزومتریک است.

۲.۱ متریک القایی به زیر منیفلدها

در این بخش به تعمیم روش های مقدماتی برای محاسبه متریک القایی $\mathbb{R}^m$ به زیر منیفلدهای آن می پردازیم. در هندسه دیفرانسیل موضعی فراگرفتم چگونه از نگاشت پارامتری رویه برای محاسبه متریک ریمان یا اولین فرم اساسی ^۸ رویه استفاده کنیم. در این روش متریکی را که متریک $\mathbb{R}^3$ به رویه القاء می کرد، به دست آوردیم. در اینجا قصد داریم این روش را برای زیر منیفلدها با استفاده از توابع پارامتری چند متغیره تعمیم دهیم.

فرض کنیم M و $\overline{M}$ دو منیفلد دیفرانسیل پذیر به ابعاد به ترتیب n و $n+k$ بوده و نگاشت $f: M^n \rightarrow \overline{M}^{n+k}$ یک جادهنده یا ایمرسیون باشد. در این صورت $(f_*)_p$ در تمام نقاط $p \in M$ یک به یک است. اگر روی $\overline{M}$ یک متریک ریمانی مانند $\overline{g}$ تعریف شده باشد آنگاه f یک متریک ریمانی مانند g روی M القاء می کند که توسط $g = f^*\overline{g}$ تعریف می شود. به عبارت معادل متریک القایی به صورت زیر تعریف می کند.

$$g_p(X, Y) = \overline{g}_{f(p)}((f_*)_p X, (f_*)_p Y) \quad \forall X, Y \in T_p M.$$

برای اثبات کافی است نشان دهیم $f^*\overline{g}$ متقارن و معین مثبت است واضح است که g_p

^۸first fundamental form

متقارن است زیرا $\bar{g}_{f(p)}$ متقارن است و از طرفی چون $(f_*)_p$ یک به یک است داریم

$$X \neq 0 \iff f_*X \neq 0,$$

لذا g_p معین مثبت است. g_p متریک ریمان بدست آمده را متریک القاء شده^۹ توسط f ویا متریک زیرفضایی می نامیم. چنانچه فضای دربرگیرنده فضای اقلیدسی باشد یعنی $\mathbb{R}^{n+k} = \overline{M}^{n+k}$ متریک القاء شده را کانونی می نامیم. متریک القاء شده g روی M در حقیقت تحدید $\bar{g}$ است به بردارهای مماس بر M . برای روشن شدن این موضوع به زیربخش بعد توجه فرمائید.

۱.۲.۱ روش محاسبه متریک القائی $\mathbb{R}^m$

فرض کنیم M یک زیر منیفلد جادهنده $\overline{M} = \mathbb{R}^m$ و $r: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M \subset \mathbb{R}^m$ یک نشاننده^{۱۰} و $r(U)$ باز باشد. در این صورت r را یک پارامتری سازی موضعی^{۱۱} می نامیم. به عنوان مثال اگر M یک زیر منیفلد $\mathbb{R}^m$ و

$$r: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M \subset \mathbb{R}^m$$

که در آن $n < m$ ، آنگاه به ازای $i = 1, 2, \dots, m$ تابع $r^i(u^1, \dots, u^n)$ تابع پارامتری موضعی M است. در این صورت اگر $(u^1, \dots, u^n)$ مختصات $\mathbb{R}^n$ بوده و r^i مولفه های نگاشت r در $\mathbb{R}^m$ باشند، آنگاه متریک القایی روی M از رابطه زیر بدست می آید:

$$g = \sum_{i=1}^m (dr^i)^2 = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial r^i}{\partial u^j} du^j \right)^2 \quad (1.1)$$

^۹Induced metric

^{۱۰} Imbedding

^{۱۱}Local parametrization

با فرض

$$\frac{\partial r}{\partial u^j} = \left(\frac{\partial r^1}{\partial u^j}, \dots, \frac{\partial r^m}{\partial u^j} \right), \quad r(U) = (r^1, \dots, r^m)$$

و

$$g_{kj} = \left\langle \frac{\partial r}{\partial u^k}, \frac{\partial r}{\partial u^j} \right\rangle \quad k, j = 1, \dots, n$$

که در آن $\langle \cdot, \cdot \rangle$ متریک ریمانی $\mathbb{R}^m$ است، رابطه بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$g = \sum_{k,j=1}^n g_{kj} du^k du^j$$

که در اینجا g متریک القایی $\mathbb{R}^m$ روی M است. با این روش می‌توان متریک ریمانی روی $(\bar{M}, \bar{g})$ را به زیرمجموعه $M \subset \bar{M}$ القاء نمود.

مثال ۱.۲.۱. کره $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ را در مختصات کروی $(\theta, \varphi) = (u^1, u^2)$ در نظر می‌گیریم. در هندسه دیفرانسیل مقدماتی متریک ریمان یا اولین فرم اساسی کره به صورت زیر محاسبه می‌شود. می‌دانیم نگاشت پارامتری کره عبارتست از

$$r: (u^1, u^2) \rightarrow (r^1 = \cos u^1 \cos u^2, r^2 = \cos u^1 \sin u^2, r^3 = \sin u^1)$$

مقادیر $g_{kj} = \left\langle \frac{\partial r}{\partial u^k}, \frac{\partial r}{\partial u^j} \right\rangle$ را محاسبه نموده در رابطه فوق قرار می‌دهیم.

$$g_{11} = \left\langle \frac{\partial r}{\partial u^1}, \frac{\partial r}{\partial u^1} \right\rangle = \left\langle \left(\frac{\partial r^1}{\partial u^1}, \frac{\partial r^2}{\partial u^1}, \frac{\partial r^3}{\partial u^1} \right), \left(\frac{\partial r^1}{\partial u^1}, \frac{\partial r^2}{\partial u^1}, \frac{\partial r^3}{\partial u^1} \right) \right\rangle = 1$$

$$g_{22} = \left\langle \frac{\partial r}{\partial u^2}, \frac{\partial r}{\partial u^2} \right\rangle = \cos^2 u^1$$

$$g_{12} = g_{21} = 0$$

با جایگذاری (θ, φ) به جای (u^1, u^2) متریک ریمان روی کره بدست می‌آید.

$$g = (du^1)^2 + \cos^2 u^1 (du^2)^2$$

مثال ۲.۲.۱. فضای $\mathbb{R}^{n+1}$ با متریک اقلیدسی $\bar{g}_{ij} = \delta_{ij}$ را که در آن اندیس های i و j مقادیر $1, \dots, n+1$ را می گیرند در نظر می گیریم. با استفاده از این متریک و نگاشت شمول طبیعی یک متریک ریمان روی $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ تعریف می کنیم که آنرا متریک القایی $\mathbb{R}^{n+1}$ یا متریک کانونی کره می نامیم. فرض کنیم $f: S^n \rightarrow f(S^n) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ نگاشتی باشد که به هر نقطه از کره S^n همان نقطه را در $\mathbb{R}^{n+1}$ وابسته می کند. این نگاشت را نگاشت شمول طبیعی نیز می گوئیم. اگر یک کازت در همسایگی نقطه $p \in S^n$ با مختصات $(u^1 \dots u^n)$ در نظر بگیریم بازاء هر $X, Y \in T_p S^n$ داریم

$$f_* X = f_* \left(\sum_{\alpha=1}^n X^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \right) = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i=1}^{n+1} X^\alpha \frac{\partial f^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

در نتیجه با جایگذاری این عبارت در تعریف، متریک القایی g روی S^n به صورت زیر بدست می آید.

$$\begin{aligned} g_p(X, Y) &= \bar{g}_{f(p)}(f_* X, f_* Y) = \sum_{i,j}^{n+1} \bar{g}_{ij} dx^i dx^j (f_* X, f_* Y) \\ &= \sum_{i,j}^{n+1} \bar{g}_{ij} dx^i (f_* X) dx^j (f_* Y), \\ &= \sum_{i,j}^{n+1} \bar{g}_{ij} dx^i \left(\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\alpha=1}^{n+1} X^\alpha \frac{\partial f^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^l} \right) dx^j \left(\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\alpha=1}^{n+1} Y^\alpha \frac{\partial f^j}{\partial u^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^l} \right), \\ &= \sum_{i,j}^{n+1} \bar{g}_{ij} df^i(X) df^j(Y) = \sum_{i,j}^{n+1} \delta_{ij} df^i df^j(X, Y), \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} (df^i)^2(X, Y). \end{aligned}$$

لذا متریک القایی یا کانونی g روی کره S^n عبارت است از تحدید $\bar{g}$ روی $\mathbb{R}^{n+1}$ به بردارهای مماس بر S^n .

۳.۱ متریک حاصلضرب

اگر (M_1, g_1) و (M_2, g_2) دو منیفلد ریمانی باشند آنگاه برای منیفلد حاصلضرب $M_1 \times M_2$ می‌توان بطور طبیعی یک متریک ریمان تعریف نمود. این متریک را متریک حاصلضرب^{۱۲} نامیده، توسط جمع مستقیم دو متریک $g = g_1 \oplus g_2$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall X_i, Y_i \in T_{p_i} M_i : g(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2) = g_1(X_1, Y_1) + g_2(X_2, Y_2)$$

واضح است که g تانسوری از نوع $(\cdot)$ بوده، متقارن و معین مثبت است لذا یک متریک ریمانی روی $M_1 \times M_2$ تعریف می‌کند. فضای مماس بر منیفلد حاصلضرب بطور طبیعی بصورت زیر بیان می‌شود:

$$T_{(p_1, p_2)} M_1 \times M_2 = T_{p_1} M_1 \oplus T_{p_2} M_2$$

اگر مختصات موضعی M_1 و M_2 را به ترتیب توسط $(x^1, \dots, x^n)$ و $(x^{n+1}, \dots, x^{n+m})$ نمایش دهیم، آنگاه مختصات $M_1 \times M_2$ توسط $(x^1, \dots, x^{n+m})$ بیان می‌گردد. در این دستگاه مختصات موضعی، متریک حاصلضرب به صورت زیر معرفی می‌گردد:

$$g = \sum_{i,j=1}^{n+m} g_{ij} dx^i dx^j$$

که در اینجا مولفه های ماتریس متریک حاصلضرب برابر است با

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} (g_1)_{ij} & \cdot \\ \cdot & (g_2)_{ij} \end{pmatrix}$$

^{۱۲}Product metric

مثال ۱.۳.۱. چنبره ۲-بعدی $T^2 = S^1 \times S^1$ را در نظر گرفته متریک حاصلضرب را با استفاده از متریک ریمان روی S^1 بدست می‌آوریم. فرض کنیم $r: [0, 2\pi] \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2$ به طوریکه

$$r(u^1) = (\cos u^1, \sin u^1)$$

متریک ریمان روی S^1 از رابطه $g_{11} = \langle \frac{\partial r}{\partial u^1}, \frac{\partial r}{\partial u^1} \rangle = 1$ بدست می‌آید. لذا $g_1 = (du^1)^2$ مجدداً روی دایره دیگر پارامتری‌سازی $r(u^2) = (\cos u^2, \sin u^2)$ را در نظر گرفته متریک ریمان $g_2 = (du^2)^2$ بدست می‌آید. لذا متریک حاصلضرب عبارتست از

$$g = g_1 + g_2 = (du^1)^2 + (du^2)^2$$

مثال ۲.۳.۱. چنبره n -بعدی $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ را به عنوان زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^{2n}$ در نظر می‌گیریم که توسط معادلات $(x^1)^2 + (x^2)^2 = \dots = (x^{2n-1})^2 + (x^{2n})^2 = 1$ تعریف می‌شود. یک پارامتری‌سازی موضعی روی چنبره توسط رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$r(u^1, \dots, u^n) = (\cos u^1, \sin u^1, \dots, \cos u^n, \sin u^n)$$

با محاسبه ماتریس ژاکوبین این نگاشت داریم $rank(r) = n$ لذا r یک نشاننده است. حال به روش فوق متریک القایی روی T^n را محاسبه می‌کنیم.

$$g_{11} = \langle (-\sin u^1, \cos u^1, 0, \dots, 0), (-\sin u^1, \cos u^1, 0, \dots, 0) \rangle = 1$$

$$g_{22} = g_{33} = \dots = g_{ii} = 1, \quad g_{ij} = 0 \quad (i \neq j)$$

لذا متریک ریمان القایی T عبارتست از

$$g = \sum_{i=1}^n (du^i)^2$$

که مشابه متریک اقلیدسی است.

تمرین ۳.۳.۱. یک متریک ریمانی روی $\mathbb{R}^3$ در مختصات کروی (ρ, θ, φ) تعریف کنید.

تمرین ۴.۳.۱. درستی رابطه (۱.۱) در این بخش را تحقیق کنید.

تمرین ۵.۳.۱. فرض کنیم M و $\overline{M}$ دو منیفلد دیفرانسیل پذیر به ابعاد به ترتیب n و $n+k$ بوده و نگاشت $f: M^n \rightarrow \overline{M}^{n+k}$ یک جادهنده یا ایمرسیون باشد. اگر روی N یک متریک ریمانی مانند $\overline{g}$ تعریف شده باشد آنگاه f یک متریک ریمانی مانند g روی M القاء می‌کند که توسط $g = f^*\overline{g}$ تعریف می‌شود. مقدار g را به صورت موضعی بنویسید. راهنمایی: از مثال (۲.۲.۱) استفاده کنید.

تمرین ۶.۳.۱. منحنی $\gamma(t) = (a(t), 0, b(t))$ یک منحنی در صفحه $x \circ z$ است که محور z ها را قطع نمی‌کند. فرض کنیم $\gamma'(t) \neq 0$ ، اگر این منحنی حول محور z ها دوران کند سطح دواری پدید می‌آید که آنرا با حاصلضرب $S^1 \times \gamma(t)$ نمایش می‌دهیم. معادله پارامتری این سطح عبارتست از

$$r(\theta, t) = (a(t) \cos \theta, a(t) \sin \theta, b(t))$$

الف. نشان دهید $S^1 \times \gamma(t)$ یک زیرمنیفلد جادهنده $\mathbb{R}^3$ است.

ب. نشان دهید اگر $\gamma(t)$ زیرمنیفلد نشاننده باشد، آنگاه $S^1 \times \gamma(t)$ یک زیرمنیفلد نشاننده است.

ج. متریک ریمانی القاء شده توسط r برای سطح دوار را محاسبه کنید.

د. متریک حاصلضرب را برای سطح دوار بدست آورید.

۴.۱ شرایط وجود متریک ریمانی

در این بخش شرایط وجود متریک ریمانی روی یک منیفلد را بررسی می‌کنیم. یکی از امتیازات این متریک آن است که روی همه منیفلدها (به شرط آنکه هاسدرف بوده و دارای

پایه شمارا باشند) تعریف می‌گردد. لذا در ادامه کتاب کلیه منیفلدها را هاسدرف و با پایه شمارا (پیرافشرده) فرض می‌نمائیم.

گزاره ۱.۴.۱. روی هر منیفلد دیفرانسیل پذیر M (هاسدرف و با پایه شمارا) می‌توان یک متریک ریمانی تعریف نمود.

اثبات. در حقیقت می‌خواهیم شرایطی فراهم نمائیم که متریک القائی توسط کارتهای موضعی تشکیل یک متریک ریمانی روی M بدهد. یک پوشش از M توسط کارتهای موضعی $(U_\alpha, x_\alpha)_{\alpha \in A}$ را در نظر گرفته، فرض می‌کنیم $(V_\beta, \varphi_\beta)_{\beta \in B}$ افراز واحد^{۱۲} وابسته به این پوشش باشد. چون M دارای پایه شماراست افراز واحد وجود دارد. روی $x_\beta(V_\beta)$ که بازی از $\mathbb{R}^n$ است متریک کانونی یا ضرب اسکالر $\langle \cdot, \cdot \rangle$ را در نظر گرفته توسط نگاشت برگردان این کارت x_β یک متریک ریمانی به V_β القاء نموده آنرا با g_β نمایش می‌دهیم. بنا بر تعریف متریک القایی داریم $g_\beta = x_\beta^* \langle \cdot, \cdot \rangle$ یا به عبارت معادل:

$$g_\beta(X, Y)_p = \langle (x_\beta)_* X, (x_\beta)_* Y \rangle_{x(p)}$$

حال با استفاده از افراز واحد و این متریک ریمانی موضعی یک متریک ریمانی سرتاسری روی M تعریف می‌کنیم. برای این کار کافی است فرض کنیم

$$\forall p \in M, \forall X, Y \in T_p M, \quad g_p(X, Y) = \sum_{\beta \in B} \varphi_\beta g_\beta(X, Y)_p$$

براحتی می‌توان بررسی نمود^{۱۴} که در هر نقطه $p \in M$ یک متریک ریمانی روی M تعریف می‌کند. $\square$

^{۱۳} برای تعریف افراز واحد به پیوست ۱۱ در پایان فصل دوم از جلد اول کتاب [۲] هندسه منیفلد ۱ مراجعه

نمائید.

^{۱۴} در صورت لزوم برای توضیحات بیشتر می‌توان به کتاب [۳۶] W. M. Boothby صفحه ۱۸۸

مراجعه نمود.

یک تعمیم از متریک ریمانی و کاربرد آن

اگر شرایط مذکور در تعریف متریک ریمانی را بعضاً حذف نموده یا کمی تغییر دهیم متریک های جدیدی حاصل می شوند که تعبیر بسیار جالب داشته و در فیزیک و مهندسی بسیاری از پدیده ها را توجیه می نمایند. به عنوان مثال اگر شرط مثبت بودن در تعریف متریک ریمانی را حذف کنیم متریک جدیدی به نام متریک شبه-ریمانی^۱ پدید می آید که کاربرد

^۱Pseudo-Riemannian metric

زیادی در تعبیر پدیده های فیزیکی دارد. اگر شرط ۲- فرمی بودن یا فرم مربعی را حذف کنیم متریک فینسلری ظاهر می گردد. بنابر قول مشهور چرن^۲ متریک فینسلری همان متریک ریمانی است بدون شرط مربعی بودن [۴۱]. در این فصل به یک تعمیم از متریک های ریمانی به نام متریک های فینسلری می پردازیم. متریک های شبه-ریمانی در فصول بعد مورد مطالعه قرار خواهند گرفت.

۱.۲ تاریخچه متریک فینسلری

علاوه بر روش های اقلیدسی و ریمانی برای محاسبه طول یک بردار روش های دیگری نیز موجود است که نظر به کاربرد بسیار زیاد آنها در علوم فنی مهندسی و فیزیک، در اینجا به یکی از آنها به نام متریک فینسلری اشاره می کنیم. متریک های فینسلری طبعی ترین تعمیم متریک های ریمانی هستند که استفاده زیادی در مسائل کاربردی داشته و اخیرا مورد توجه بسیاری از ریاضیدانان کاربردی و محض قرار گرفته اند. مطالعه متریک فینسلر ابتدا توسط جی اف بی ریمان^۳ در سال ۱۸۵۴ آغاز گردید، ولی از آنجائیکه او عقیده داشت که مفهوم متریکی که بعد ها به نام ریمان معروف شد برای مطالعه مفاهیم هندسی و ادامه کارهای گاوس^۴ مناسب تر است به مطالعات خود ادامه نداد. اما نظر باینکه این تابع در تعبیر پدیده های فیزیکی نقش موثری داشت بعدها توسط دیگران مورد مطالعه قرار گرفت. از جمله این افراد پل فینسلر^۵ بود که در سال ۱۹۱۸ با استفاده از نتایج بدست آمده توسط استاد خودش کنستانتین کاراتئودوری^۶ و قضیه اولر توانست تعریف مدونی از این متریک ارائه نماید. او

^۲S.S. Chern

^۳George Friedrich Bernhard Riemann ریاضیدان آلمانی ۱۸۲۶-۱۸۶۶.

^۴Carl Friedrich Gauss منجم، ریاضیدان و فیزیکدان آلمانی ۱۷۷۷-۱۸۵۵.

^۵Paul Finsler ریاضیدان آلمانی ۱۸۹۴-۱۹۷۰.

^۶Constantin Caratheodory ریاضیدان آلمانی ۱۸۷۳-۱۹۵۰.

در حقیقت شرایطی برای یک تابع مانند $F(x, y)$ روی کلاف مماس TM ارائه نمود که در عین حالی که از تابع ریمان جامع تر بود خواص اصلی آن را نیز داشت. وی ثابت کرد که این تابع در هر نقطه $x \in M$ یک ضرب داخلی به صورت $F^2 = g_{ij}(x, y)y^i y^j$ روی $T_x M$ تعریف می کند. لذا می توان گفت که دوران شکوفایی هندسه بیست و دو قرن پس از افلاطون و اقلیدس در اسکندریه توسط دانشمندان آلمانی مانند گوس، ریمان و غیره صورت پذیرفت. نظریه هندسه فینسلر توسط بروالد^۷ و کارتان^۸ گسترش چشمگیری پیدا کرد [۳۹] به طوری که هر یک التصاقی را به شکل موضعی با توجه به نیازهای خود تعریف نمودند که به نوعی تعمیم التصاق ریمان بود. التصاق کارتان از نظر سازگاری با متریک شباهت زیادی با التصاق ریمان داشت و طبیعتاً نقش بیشتری در گسترش هندسه ایفا نمود. اولین کسی که نظریه التصاق فینسلری را به صورت سرتاسری بیان نمود اکبرزاده بود که در تز دکترای خود، تحت نظر شاگرد کارتان به نام لیشنروویچ^۹، در سال ۱۹۶۶ در پاریس به پایان رسانید. این موضوع اخیراً در کتاب او به نام نظریه سرتاسری هندسه فینسلری [۱۵] به چاپ رسید.

۲.۲ از هندسه اقلیدسی تا هندسه فینسلری

برای محاسبه طول برداری مانند X در فضای اقلیدسی از ضرب داخلی دو بردار یعنی $\langle X, X \rangle^{1/2}$ استفاده می کنیم. این ضرب داخلی یک متریک موسوم به متریک اقلیدسی در فضای $\mathbb{R}^n$ تعریف می کند $\langle X, Y \rangle = \delta_{ij} X^i Y^j$ که در آن $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ دلتای کرونکر است. به همین صورت در منیفلد ریمانی (M, g) طول یک بردار مماس X با ارائه یک ضرب داخلی روی فضای مماس $T_p M$ محاسبه می گردد. این ضرب داخلی برخاسته از

^۷Berwald

^۸Elie Cartan

^۹A. Lichnerowicz

متریک ریمانی g را توسط $g(X, Y) = g_{ij}X^iY^j$ نمایش دادیم که در آن $g_{ij}(x)$ ها توابعی حقیقی روی M هستند، که بستگی به نقطه $x \in M$ دارند یعنی $g_{ij} : M \rightarrow \mathbb{R}$. حال می خواهیم یک ضرب داخلی تعریف کنیم که در آن طول یک بردار علاوه بر نقطه $x \in M$ به جهت آن نیز بستگی دارد. متریک برخاسته از این ضرب داخلی را متریک فینسلری می نامیم و با $g(X, Y) = g_{ij}X^iY^j$ نمایش می دهیم. در اینجا $g_{ij}(x, y)$ ها توابعی حقیقی روی TM هستند، که علاوه بر نقطه $x \in M$ به جهت آن یعنی $y \in T_xM$ نیز بستگی دارند. برای روشن شدن کاربرد جهت در محاسبه طول به مثال های زیر توجه فرمائید. به عنوان مثال فرض کنیم می خواهیم مسیر حرکت نور را در یک محیط غیر ایزوتروپ یا غیر همسان M بدست آوریم. می دانیم در این محیط سرعت نور به جهت آن نیز بستگی پیدا می کند. در نتیجه کوتاهترین زمان برای گذر از این محیط غیر ایزوتروپ نه تنها به نقطه تابش نور بستگی دارد بلکه به جهت آن نیز بستگی پیدا می کند. به زبان ریاضی کوتاهترین زمان گذر نه تنها به نقطه $x \in M$ بلکه به بردار مماس بر مسیر حرکت یعنی $y \in T_xM$ نیز بستگی دارد. مسیر بهینه زمانی مربوطه را کوتاهترین منحنی یا ژئودزیک متر فینسلری می نامیم. از آنجا که تعریف هر هندسه با تعریف طول آغاز می شود تعریف فاصله دو نقطه در روی یک منحنی در هندسه اقلیدسی را یادآوری می کنیم. فرض کنیم $C(t)$ یک منحنی در $\mathbb{R}^n$ باشد. براحتی با تعمیم روش محاسبه طول خم در ریاضی عمومی می توان طول $C(t)$ را به صورت زیر محاسبه نمود. اگر $C : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ دارای معادله پارامتری $C(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ باشد و $\frac{dx^i}{dt}$ به ازای مقادیر $1, \dots, n$ برای i ، مولفه های بردار مماس بر $C(t)$ باشند، آنگاه طول قوس منحنی در هندسه اقلیدسی از رابطه زیر

بدست می‌آید.

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{\delta_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt.$$

طول قوس منحنی در هندسه اقلیدسی.

که در آن ضرایب δ_{ij} دلتای کرونکر هستند. توجه نمایید که در این جا از قانون جمع‌بندی در هندسه دیفرانسیل برای اندیسهایی که یکبار در بالا و یکبار در پایین ظاهر می‌شوند استفاده کرده‌ایم. حال اگر یک منحنی مانند $C : [a, b] \rightarrow M$ روی منیفلد ریمانی (M, g) در نظر بگیریم آنگاه مولفه‌های آن در کارت (x, U) توسط رابطه $x^i(t) = (xoc)^i(t)$ تعریف می‌شوند. چنانچه احتمال اشتباه نرود برای سادگی به جای $(xoc)^i(t)$ از رابطه $x^i(t)$ استفاده می‌کنیم. لذا مولفه‌های بردار مماس نیز به صورت $\frac{dx^i}{dt}$ ارائه می‌شوند که مشابه حالت اقلیدسی است. لذا طول قوس منحنی در هندسه ریمانی از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(x) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt.$$

طول قوس منحنی در هندسه ریمانی.

که در آن $g_{ij}(x)$ مولفه‌های تانسور متریک ریمان، توابعی حقیقی روی M هستند. در کاربرد هندسه برای محاسبه زمان گذر ممکن است شرایطی پیش آید که اندازه زمان گذر بستگی به جهت آن نیز داشته باشد. به عبارت دیگر ممکن است مسیر بهینه از نظر زمان دیگر مسیر بهینه ریمانی یا اقلیدسی نباشد. لذا طول قوس منحنی در هندسه فینسلری

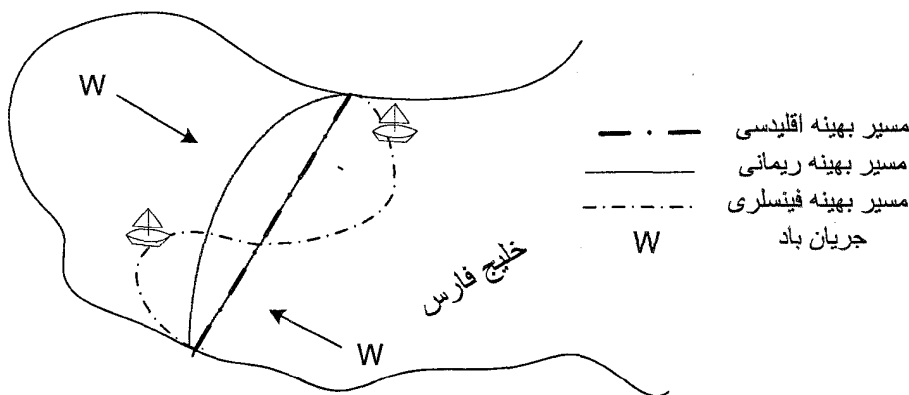
از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(x, y) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt.$$

طول قوس منحنی در هندسه فینسلری.

که در آن $g_{ij}(x, y)$ ها مولفه‌های تانسور متریک فینسلری، توابعی حقیقی روی TM هستند.

حال برای روشن شدن نیاز عملی به متریک فینسلر به مثال دیگری در این زمینه می‌پردازیم. فرض کنید می‌خواهیم از بندر عباس به بندر دیگری در جنوب خلیج فارس برویم. در اینجا سه مسیر بهینه مختلف با توجه به متریک های اقلیدسی، ریمانی و فینسلری مشخص شده است، شکل ۱۰۲ را ببینید. مسیراقلیدسی که خط راست است غیر قابل استفاده است. مسیریمانی



شکل ۱۰۲: تفاوت سه مسیر بهینه در هندسه های اقلیدسی، ریمانی و فینسلری.

که بخشی از دایره عظیمه کره زمین است فقط وقتی مسیر بهینه است که هیچگونه نیروی دیگری

مانند نیروی باد و غیره بر کشتی اثر نکند. لذا در حالت طبیعی یعنی هنگام وجود نیروهای مزاحم حرکت، تنها مسیر بهینه زمانی برای کشتی مسیر فینسلری است. چنانچه نیروی باد موجود نباشد در واقع مسئله به حالت ریمانی تبدیل می شود و مسیر بهینه برای کشتی مسیر ریمانی است. این مسئله به نام مسئله ناوبری زملو^{۱۰} معروف است. در هر دو مثال بالا طول مسیر حرکت نور و قایق با متریکی به نام متریک راندرز^{۱۱} که نوع خاصی از متریک های فینسلری است، محاسبه می شود.

۳.۲ متریک فینسلری

در این بخش به تعریف متریک های فینسلری می پردازیم. فرض کنیم M یک منیفلد C^∞ و $T_x M$ فضای مماس در نقطه $x \in M$ باشد کلاف مماس بر M را با عبارت $TM := \bigcup_{x \in M} T_x M$ نمایش می دهیم. نگاشت تصویر طبیعی عبارت است از:

$$\pi : TM \rightarrow M,$$

که در آن $\pi(x, y) = x$. فضای دوگان $T_x^* M$ توسط $T_x^* M$ نمایش داده شده و فضای کتانژانت در نقطه $x \in M$ نامیده می شود. کلاف $T^* M := \bigcup_{x \in M} T_x^* M$ کلاف کتانژانت نام دارد.

تعریف ۱.۳.۲. یک ساختار فینسلر^{۱۲} روی TM تابعی است چون $F : TM \rightarrow [0, \infty]$ که در شرایط زیر صدق می کند:

• منظم بودن^{۱۳}: F روی $TM \setminus 0$ از کلاس C^∞ باشد.

^{۱۰}Zermelo navigation

^{۱۱}Randers metric

^{۱۲}Finsler structure

^{۱۳}regularity

• همگن مثبت^{۱۴}: به ازای هر $\lambda > 0$ ، $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$

• تحذب قوی^{۱۵}: ماتریس زیر موسوم به ماتریس هسیان در تمام نقاط $TM \setminus 0$ معین مثبت باشد.

$$(g_{ij}) := \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j} \right)$$

به این صورت که برای هر $V \neq 0$ داشته باشیم $g(V, V) > 0$.

در اینجا معین مثبت بودن به این معنی است که ماتریس (g_{ij}) نا تبهگون - یعنی با دترمینان مخالف صفر - بوده و برای هر بردار $y \neq 0$ داشته باشیم

$$g_{ij}(x, y) y^i y^j > 0.$$

تانسور متقارن و معین مثبت g با مولفه های (g_{ij}) را تانسور اساسی^{۱۶} یا متریک فینسلر نامیده دوتایی (M, g) را منیفلد فینسلری می نامند. اگر فرض کنیم $C_{ijk} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}$ آنگاه C را مولفه های تانسور تاب کارتان^{۱۷} می نامند. تانسور تاب کارتان انحراف متریک فینسلری را از متریک ریمانی مشخص می کند. به عبارت معادل اگر $C_{ijk} = 0$ باشد آنگاه (g_{ij}) به y بستگی نداشته و در نتیجه یک متریک ریمانی است. توجه نمایید که در اینجا مولفه های تانسور متریک فینسلر یعنی $g_{ij}(x, y)$ روی TM تعریف شده و توابعی از x و y هستند، در حالی که مولفه های تانسور متریک ریمان یعنی $g_{ij}(x)$ روی M تعریف شده و توابعی از x هستند.

تذکر ۱: شرط مثبت بودن F از آنجا مورد نیاز است که بتوان با استفاده از آن یک تابع فاصله روی M تعریف کرد.

^{۱۴}positive homogeneity

^{۱۵}strong convexity

^{۱۶}fundamental tensor

^{۱۷}Cartan torsion tensor

تذکر ۲: شرط همگن بودن F به دلیل فراهم آوردن یک شرط لازم و کافی است که بر آن اساس طول قوس یک منحنی که توسط انتگرال $\int F(x(t), y(t))dt$ داده می شود به پارامتر t بستگی نداشته باشد. این موضوع توسط ک. کاراتئودوری^{۱۸} استاد پ. فینسلر^{۱۹} ثابت شده است.

تذکر ۳: شرط همگن مثبت در بعضی مراجع با شرط دیگری به نام شرط همگنی مطلق تعویض می شود در این حالت به ازای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ $F(x, \lambda y) = |\lambda|F(x, y)$ نظر به اینکه این شرط نسبتاً سنگین بوده و موجب حذف برخی از مثالهای جالب در فضای فینسلر مانند فضای راندرز می شود در اینجا از آن استفاده نشده است.

تذکر ۴: شرط تحدب قوی به این منظور آورده شده است که ماتریس g_{ij} معکوس پذیر بوده و مانند ماتریس متریک ریمانی ضرایب معکوس آن یعنی g^{ij} نیز تعریف شود. مثبت معین بودن g_{ij} بستگی به انتخاب پایه در $T_x M$ ندارد. تمرین ۲.۳.۲ را ببینید.

تمرین ۲.۳.۲. شرط تحدب قوی به انتخاب پایه بستگی ندارد، به عبارت دیگر مثبت معین بودن g_{ij} بستگی به انتخاب پایه در $T_x M$ ندارد. راهنمایی: از تعریف کلاسیک تانسورهای $(\cdot)$ استفاده شود.

تمرین ۳.۳.۲. نشان دهید شرط دیفرانسیل پذیری F روی TM را نمی توان با شرط دیفرانسیل پذیری F روی TM تعویض نمود.

راهنمایی: اگر F روی TM یعنی در $y = 0$ از کلاس C^∞ باشد آنگاه چون همگن از درجه یک است، می توان آن را به صورت $F = a_i y^i$ نوشت لذا درمیان g_{ij} به بستگی پیدا می کند و ممکن است مقدارش صفر شود.

^{۱۸} K. Caratheodory

^{۱۹} Paul Finsler

۱.۳.۲ چند مثال از متریک فینسلری

مثال ۴.۳.۲. فضای ریمانی: ساده ترین مثال از یک متریک فینسلری یک متریک ریمانی است. IR^n را همراه با متریک ریمانی a_{ij} در نظر می گیریم. در این صورت منیفلد ریمانی (IR^n, a_{ij}) را می توان به عنوان یک منیفلد فینسلری در نظر گرفت که تابع اساسی آن توسط $F(x, y) = \sqrt{a_{ij}y^i y^j}$ تعریف می شود.

مثال ۵.۳.۲. فضای راندرزی: فرض کنیم $(M, a_{ij}(x))$ یک منیفلد ریمانی بوده و $\omega = \omega_i(x)dy^i$ یک میدان ۱-فرم روی M باشد. همچنین فرض کنیم

$$\alpha(x, y) = \sqrt{a_{ij}y^i y^j}, \quad \beta = \omega_i(x)y^i.$$

آنگاه می توان نشان داد که $F = \alpha + \beta$ در شرایط تابع اساسی فینسلری صدق می کند. در این صورت F را راندرزی و منیفلد (M, F) را یک فضای راندرزی یا منیفلد راندرزی می نامند. فضاهاى راندرزی کاربرد زیادی در ارائه مدل های هندسی برای نظریه نسبیت دارند.

۲۰

مثال ۶.۳.۲. فضای کروپینا: ^{۲۱} فرض کنیم α معرف یک متریک ریمانی و β یک ۱-فرم روی منیفلد M باشند. زیرفضایی از TM را در نظر می گیریم که در آن ۱-فرم $\beta > 0$ اکیدا مثبت باشد. می توان نشان داد که $F(x, y) = \frac{\alpha^2}{\beta}$ در شرایط تابع اساسی فینسلری صدق می کند. در این صورت آن را از نوع کروپینا گفته فضای $(M, \frac{\alpha^2}{\beta})$ رافضای کروپینا می نامند.

مثال ۷.۳.۲. فضای ماتسوموتو: ^{۲۲} فرض کنیم α معرف یک متریک ریمانی و β یک ۱-فرم روی منیفلد M باشند. زیرفضایی از TM را در نظر می گیریم که در آن تابع

^{۲۰} صفحه ۸۹ از مقاله [۷۴] را ببینید.

^{۲۱}Kropina space

^{۲۲}Matsumoto space

$F(x, y) = \frac{\alpha^2}{\alpha - b\beta}$ تعریف شود. می توان نشان داد که $F(x, y)$ در شرایط تابع اساسی فینسلری صدق می کند. در این صورت $F(x, y)$ را از نوع ماتسوموتو گفته فضای $(M, \frac{\alpha^2}{\alpha - b\beta})$ رافضای ماتسوموتو می نامند.

مثال ۸.۳.۲. فرض کنیم $\alpha = \sqrt{a_{ij}y^i y^j}$ معرف یک متریک ریمانی و $\beta = b_i(x)y^i$ یک ۱-فرم روی منیفلد M باشند. تعریف می کنیم

$$\|\beta_x\|_\alpha := \sup \frac{\beta(x, y)}{\alpha(x, y)} = \sqrt{a^{ij}(x)b_i(x)b_j(x)}$$

می توان نشان داد که تحت شرایطی اگر $\forall x \in M$ داشته باشیم $\|\beta_x\|_\alpha < b$. آنگاه $F(\alpha, \beta)$ به عنوان تابعی از این دو متغیر یک متریک فینسلری است، کتاب [۴۲] صفحه ۱۱ را ببینید. در این صورت $F(x, y)$ را (α, β) متریک^{۲۳} می نامیم.

مثال ۹.۳.۲. فرض کنیم $\langle, \rangle$ ضرب داخلی اقلیدسی روی $\mathbb{R}^n$ و $|\cdot|$ نرم القایی از آن باشد. قرار می دهیم $B^n(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < r\}$. سه تابع حقیقی با مقدار مثبت به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$L_\epsilon^1, L_\epsilon^2, L_\epsilon^3 : TB^n(1) \longrightarrow [0, \infty)$$

$$L_\epsilon^1(x, y) = \frac{\sqrt{|y|^2 + (|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2)}}{\epsilon(1 + |x|^2)} \pm \epsilon \frac{\langle x, y \rangle}{2(1 + |x|^2)}, |\epsilon| \leq 1$$

$$L_\epsilon^2(x, y) = \frac{\sqrt{|y|^2 - (|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2)}}{2(1 - |x|^2)} \pm \epsilon \frac{\langle x, y \rangle}{2(1 - |x|^2)}$$

$$L_\epsilon^3(x, y) = \frac{|y|}{1 - |x|^2} \pm \frac{\epsilon \langle x, y \rangle}{1 - |x|^4}$$

در این صورت سه تابع $L_\epsilon^1, L_\epsilon^2, L_\epsilon^3$ و L_ϵ^2 متریک هایی فینسلری روی $B^n(1)$ می باشند. L_ϵ^1 را متریک فانک^{۲۴} روی $B^n(1)$ می نامیم. برای اطلاعات بیشتر می توانید

کتاب [۷۱] را ببینید.

^{۲۳} (α, β) metric

^{۲۴}Funk metric

۴.۲ توابع همگن و قضیه اولر

تعریف ۱.۴.۲. تابع $H : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ را همگن مثبت^{۲۵} از درجه r نسبت به y گوئیم اگر به ازای هر عدد مثبت λ داشته باشیم:

$$\forall \lambda > 0 \quad H(\lambda y) = \lambda^r H(y)$$

و آنرا همگن مطلق^{۲۶} از درجه^{۲۷} r گوئیم اگر به ازای هر عدد حقیقی λ داشته باشیم:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad H(\lambda y) = |\lambda|^r H(y)$$

مشتق جزئی H نسبت به y^i را با $H_{y^i} = \frac{\partial H}{\partial y^i}$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۲.۴.۲ (قضیه اولر^{۲۸}). فرض کنیم تابع حقیقی H در تمام نقاط $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ دیفرانسیل پذیر باشد، آنگاه H همگن مثبت از درجه r است اگر و تنها اگر

$$y^i H_{y^i}(y) = r H(y) \quad (1.2)$$

اثبات. فرض کنیم H همگن مثبت از درجه r باشد بنابراین تعریف به ازای هر $\lambda > 0$ داریم $H(x, \lambda y) = \lambda^r H(x, y)$ با فرض ثابت بودن y از این رابطه نسبت به λ مشتق می‌گیریم:

$$y^i H_{\lambda y^i}(\lambda y) = r \lambda^{r-1} H(y)$$

با قرار دادن $\lambda = 1$ نتیجه حاصل می‌شود. حال بر عکس فرض کنیم

$$y^i H_{y^i}(y) = r H(y)$$

در نظر گرفتن y و $\lambda > 0$ از قاعده زنجیره‌ای داریم:

$$\frac{d}{d\lambda} H(\lambda y) = \frac{dH(\lambda y)}{d(\lambda y)} \frac{d(\lambda y)}{d\lambda} = H_{\lambda y}(\lambda y) y = \frac{1}{\lambda} \lambda y H_{\lambda y}(\lambda y) = \frac{1}{\lambda} r H(\lambda y)$$

^{۲۵}positively homogenous

^{۲۶}absolutely homogenous

^{۲۷}Leonard Euler ریاضیدان، فیزیکدان و مهندس سوئسی بزرگ تاریخ که در سنه ۱۷۰۷-۱۷۸۳

می زیسته است.

^{۲۸}Euler's theorem:

لذا معادله دیفرانسیل زیر را خواهیم داشت:

$$\frac{d}{d\lambda} H(\lambda y) - \frac{r}{\lambda} H(\lambda y) = 0.$$

که این معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\left(\frac{d}{d\lambda} \right) \left(\frac{H(\lambda y)}{\lambda^r} \right) = 0.$$

که جواب آن به شکل $H(\lambda y) = c\lambda^r$ است که در آن c یک مقدار ثابت است. با فرض $\lambda = 1$ مقدار $c = H(y)$ بدست می‌آید. در نتیجه $H(\lambda y) = \lambda^r H(y)$ که همگن بودن H را نتیجه می‌دهد. □

نتیجه ۳.۴.۲. اگر H از کلاس C^2 و همگن از درجه r باشد آنگاه مشتق آن نسبت به y همگن از درجه $r - 1$ است.

اثبات. برای اثبات کافی است از رابطه قضیه اولر نسبت به y^i مشتق بگیریم:

$$y^i H_{y^i} = r H(y) \Rightarrow \delta_j^i H_{y^i} + y^i \frac{\partial H_{y^i}}{\partial y^j} = r H_{y^j} \Rightarrow y^i \frac{\partial H_{y^i}}{\partial y^j} = (r-1) H_{y^j}$$

چون H از کلاس C^2 است می‌توان ترتیب مشتق‌گیری را عوض کرد. پس:

$$y^i \frac{\partial H_{y^j}}{\partial y^i} = (r-1) H_{y^j}$$

بنا بر عکس قضیه اولر تابع H_{y^i} همگن از درجه $r - 1$ است. □

نتیجه ۴.۴.۲. اگر تابع F همگن از درجه ۱ باشد، آنگاه داریم:

$$y^i F_{y^i}(y) = F(y) \quad (2.2)$$

$$\frac{y^i}{F} F_{y^i} = 1 \quad (3.2)$$

با مشتق‌گیری نسبت به y^i از رابطه اول داریم $F_{y^j} = \delta_j^i F_{y^i} + y^i F_{y^i y^j} = F_{y^j}$ از آنجا

$$y^i F_{y^i y^j} = 0 \quad (4.2)$$

نتیجه ۵.۴.۲. (فینسلر): تابع اساسی $F(x, y)$ در رابطه زیر صدق می‌کند.

$$F^2(x, y) = g_{ij}(x, y)y^i y^j$$

این رابطه تعمیم رابطه ای مشابه در تعریف ضرب داخلی دو بردار در فضای مماس بر یک منیفلد ریمانی است.

تمرین ۶.۴.۲. ثابت کنید تابع $F(x, y)$ در مثال ۴.۳.۲ در شرایط تابع اساسی فینسلری صدق می‌کند.

تمرین ۷.۴.۲. نتیجه فینسلر را ثابت کنید.

۵.۲ استفاده از متریک فینسلری در مدل سازی مسائل

کاربردی

مقدمه: در این بخش به ارائه مثالی از کاربرد متریک فینسلر در مدل سازی مسائل روزمره می‌پردازیم. در اینجا به نامه ای که در سال ۱۹۶۹ فینسلر به ماتسوموتو نوشت می‌پردازیم. در این نامه وی مساله‌ای به شرح زیر عنوان می‌کند. برای دیدن اصل نامه می‌توانید به صفحه ۴۶ از [۱۶] مراجعه کنید. فرض کنیم در یک زمین مسطح قرار داشته باشیم و بخواهیم در زمان یک دقیقه به یک جهت دلخواه در اطراف خود حرکت کنیم. مکان نقاطی را که پس از یک دقیقه می‌پیمایم دایره‌ای است بسته به مرکز مبدا حرکت و شعاع یک دقیقه راهپیمایی. (شکل ۲.۲ در صفحه ۳۲ را ببینید). حال اگر در دامنه یک تپه قرار داشته باشیم دیگر مکان نقاطی که پس از یک دقیقه راهپیمایی طی می‌کنیم دیگر دایره‌ای شکل نیست ولی همچنان یک منحنی بسته است (شکل ۳.۲ در صفحه ۳۳ را ببینید). این منحنی بسته جدید یعنی مکان نقاطی که پس از یک دقیقه راهپیمایی روی سطح شیب دار طی میکنیم را یک شاخص یا ایندیکاتوریکس می‌نامیم. با توجه به این شاخص می‌توان تعریف فاصله

زمانی یا طول را برای این عمل فیزیکی بدست آورد. گفتیم که تعریف فاصله یعنی تعریف یک هندسه جدید، لذا به این صورت یک مساله فیزیکی را به یک مساله هندسی تبدیل نموده، با استفاده از خواص شناخته شده هندسی به مطالعه این پدیده می پردازیم. ماتسوموتو نشان داده است که متریک مربوط به این پدیده یک متریک فینسلری است که بعدها به نام خود او مشهور گردید. صفحه ۴۷ از کتاب [۱۶] را ببینید.

۱.۵.۲ شاخص یا ایندیکاتریکس یک تابع اساسی فینسلری

تعریف ۱.۵.۲. فرض کنیم (M, F) یک منیفلد فینسلری باشد. به ازای هر $x \in M$ قرار می دهیم

$$I_F(x) = \{y \in T_x M | F(x, y) = 1\}.$$

$I_F(x)$ را ایندیکاتریس یا شاخص^{۲۹} F در x می نامیم.

در واقع به ازای هر $x \in M$ ، هر $I_F(x)$ عبارت است از کره ای به مرکز x و شعاعی که طول آن نسبت به جهت x و با استفاده از تابع اساسی فینسلری $F(x, y)$ تعریف شده است. گزاره زیر نشان می دهد که، شاخص I_F در هر نقطه x ، متریک $F(x, y)$ را مشخص می کند.

گزاره ۲.۵.۲. فرض کنیم F_1 و F_2 دو متریک فینسلری روی M باشند به طوری که به ازای هر $x \in M$ داشته باشیم $I_{F_1}(x) = I_{F_2}(x)$. در این صورت F_1 و F_2 بریکدیگر منطبق می شوند.

اثبات. فرض کنیم $F_1(y)$ و $F_2(y)$ دو متریک فینسلری روی M در نقطه مفروض $x \in M$ باشند. به طوری که به ازای هر $x \in M$ داشته باشیم $I_{F_1} = I_{F_2}$. در این صورت به

ازای هر $y \in T_x M$ داریم

$$F_1(y) = F_1(F_2(y) \frac{y}{F_2(y)}). \quad (5.2)$$

چون F_1 همگن درجه یک است، داریم

$$F_1(F_2(y) \frac{y}{F_2(y)}) = F_2(y) F_1(\frac{y}{F_2(y)}). \quad (6.2)$$

از طرف دیگر بنا بر فرض به ازای هر $x \in M$ ، $I_{F_1}(x) = I_{F_2}(x)$ ، لذا

$$F_1(\frac{y}{F_2(y)}) = F_2(\frac{y}{F_2(y)}). \quad (7.2)$$

با جایگذاری رابطه (۷.۲) در رابطه (۶.۲) چون F_2 همگن درجه یک است، داریم، $F_1(y) = F_2(y)$. چون این رابطه برای هر نقطه مفروض $x \in M$ برقرار است، داریم

$$F_1(x, y) = F_2(x, y).$$

در نتیجه، هرگاه دو متریک فینسلری در هر نقطه دلخواه دارای شاخص مساوی باشند آنگاه آن دو متریک فینسلری مساوی اند. $\square$

از این گزاره برای تعیین متریک یک حرکت فیزیکی یا به عبارت دیگر هندسه یک حرکت فیزیکی به شرح زیر استفاده می شود.

۲.۵.۲ مدل سازی ریاضی و هندسه یک حرکت

مدل سازی ریاضی: منظور از مدل سازی ریاضی^{۳۰} بیان یک پدیده فیزیکی، اجتماعی و غیره به صورت یک مساله ریاضی است. این عمل در واقع بالاترین علت نیاز جامعه بشریت به ریاضی است. وقتی که می خواهیم یک پدیده فیزیکی که در اطراف ما اتفاق می افتد را

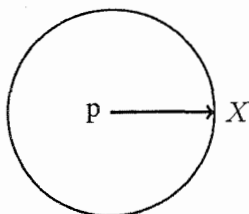
به طور دقیق مطالعه کنیم، باید این پدیده را به صورت یک مسئله ریاضی بنویسیم. این عمل را مدل سازی ریاضی^{۳۱} می نامیم. پس از تعیین مدل ریاضی آن پدیده با استفاده از آنچه در ریاضی میدانیم می توانیم به مطالعه ماکزیمم و مینیمم ها و یا به طور کلی به مطالعه خصوصیات کامل آن پدیده فیزیکی پردازیم.

هندسه یک حرکت: برای تعیین هندسه مربوط به یک پدیده فیزیکی یا یک حرکت ابتدا باید ببینیم چگونه می توان خط راست یا کوتاهترین مسیر را برای آن پدیده فیزیکی تعریف نمود. پس از به دست آوردن روابط ریاضی یا مدل ریاضی آن حرکت به تعیین مسیر های بهینه آن حرکت می پردازیم. مسیرهای بهینه نقش کوتاه ترین مسیر یا خط راست را در هندسه اقلیدسی دارند. از آنجا که شروع تعریف هر هندسه با مطالعه خط راست در آن هندسه آغاز می شود، مسیر های بهینه در یک پدیده فیزیکی نیز همین خاصیت را در تعریف هندسه آن حرکت فیزیکی دارند. پس از پیدا کردن مسیر های بهینه یا ژئودزیکهای یک پدیده فیزیکی می توانیم یک متریک برای آن حرکت به دست آوریم. این متریک تعیین کننده نوع هندسه آن حرکت است.

بنابر این منظور ما از تعیین هندسه یک حرکت به دست آوردن متریک وابسته به آن حرکت است. با استفاده از تعریف آن متریک می توانیم به مطالعه ژئودزیک های آن حرکت پرداخته و به دیگر خواص هندسی آن حرکت پی برد. در این زمینه مقالات زیادی به رشته تحریر درآورده شده است که فقط در اینجا به چند نمونه از آنها اشاره می کنیم. [۳۱]، [۵]، [۴]، [۳]، [۱۱].

۳.۵.۲ مسئله ناوبری زرمelo و تعیین متریک یا هندسه یک حرکت

مسئله ناوبری زرمelo^{۳۲} ([۱۱]، [۳۱] و [۴۲] را ببینید.) یکی از مسائل جالبی بود که در قرن هیجدهم به شرح زیر مطرح گردید. فرض کنیم قایقی موتوری در هر نقطه دلخواه p در خلیج فارس با سرعت ثابت واحد در جهت دلخواه در حال حرکت است ($\|X\| = 1 = \text{سرعت}$). چون جهت دلخواه است مکان انتهای بردار X یک دایره به مرکز p و شعاع ۱ است. اندازه بردار X یک اندازه اقلیدسی است. ($F(X) = \|X\| = 1$) در این حالت در مدت زمان



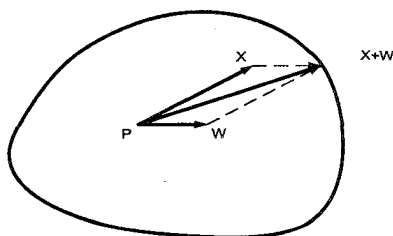
شکل ۲.۲: شاخص یا مکان هندسی نقاطی که در یک واحد زمان طی می شود بدون وجود نیروی W .

یک واحد قایق از ابتدا تا انتهای بردار X را می پیماید. حال اگر نیروی خارجی W نیز به قایق وارد شود آنگاه برآیند نیروهای وارد به نقطه p ، برابر $X + W$ است. لذا مکان هندسی انتهای $X + W$ دیگر دایره نخواهد بود. حال اگر فرض کنیم نقطه p در زمان واحد از ابتدا تا انتهای $X + W$ را طی کند $F = \|X + W\| = 1$ یک شاخص است که می توان متریک فینسلری مربوطه را با استفاده از گزاره ۲.۵.۲ به دست آورد.

در بخش بعد به روشی برای بدست آوردن تابع اساسی فینسلری یا متریک مربوط به یک حرکت فیزیکی می پردازیم. برای مطالعه مسئله مشابه معروف به مسئله ناوبری^{۳۳} به

^{۳۲}Zermelo navigation

^{۳۳}Navigation Problem.



شکل ۳.۲: شاخص یا مکان هندسی نقاطی که در یک واحد زمان طی می شود با وجود نیروی W .

صفحه ۲۰ از کتاب [۴۲] مراجعه فرمائید.

۴.۵.۲ بدست آوردن تابع اساسی فینسلری به روش اوکوبو

یکی از روش های بدست آوردن متریک فینسلری به روش اوکوبو معروف است که در این بخش به مطالعه آن می پردازیم. از روش اوکوبو^{۳۴} برای بدست آوردن تابع اساسی فینسلری از روی معادله ضمنی شاخص^{۳۵} استفاده می کنیم.

فرض کنیم $f(x, y) = 0$ معادله ضمنی یک شاخص باشد، آنگاه با استفاده از این معادله می توان تابع اساسی فینسلری $F(x, y)$ را از رابطه $f(x, y/F) = 0$ بدست آورد. در حقیقت اگر فرض کنیم $f(x, y/F(x, y)) = 0$ معادله ضمنی تابع اساسی F باشد و اگر قرار دهیم $1 = F(x, y)$ آنگاه معادله شاخص یعنی $f(x, y) = 0$ بدست می آید زیرا $I_x = \{y \in T_x M | F(x, y) = 1\}$ از طرف دیگر F همگن از درجه یک نسبت به y است، اگر به جای y عبارت λy قرار دهیم داریم $f(x, \lambda y/F(x, \lambda y)) = 0$ و از طرف دیگر $f(x, \lambda y/\lambda F(x, y)) = f(x, y/F(x, y)) = 0$ لذا $f(x, \lambda y/F(x, \lambda y)) = 0$ دیگر $f(x, \lambda y/\lambda F(x, y)) = 0$ حال باید $F(x, y)$ را در $f(x, y/F) = 0$ طوری انتخاب

^{۳۴}Okubo

^{۳۵}indicatrix

کنیم که در شرایط تابع اساسی برای $F(x, y)$ صدق کند. این روش بدست آوردن F از روی $f(x, y) = 0$ را روش اوکوبو می‌نامیم.

مثال ۳.۵.۲. فرض کنید معادله شاخص را داشته باشیم و بخواهیم از روی آن متریک فینسلری بدست آوریم. اگر معادله شاخص در مختصات قطبی به صورت $r = 3 + \cos \theta$ داده شده باشد (لیماسون)، می‌خواهیم تابع فینسلر مربوطه را حساب کنیم. (شکل ۳.۵.۲ در صفحه ۳۵ را ببینید). می‌دانیم که شاخص در فضای مماس بر فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^2$ یعنی $T_x \mathbb{R}^2$ با مختصات (y^1, y^2) قرار دارد.

توجه نمایید که شاخص $s := \{(y^1, y^2) \in T_x \mathbb{R}^2 \mid F(y^1, y^2) = 1\}$ یک منحنی هموار بسته، اکیداً محدب است که در اطراف مبدأ مختصات تعریف شده ولی هرگز از آن نمی‌گذرد. لذا در هر نقطه $x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$ بردار $y = (y^1, y^2) \in T_x \mathbb{R}^2$ به صورت $y = y^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + y^2 \frac{\partial}{\partial x^2}$ نوشته می‌شود. حال چون شاخص $r = 3 + \cos \theta$ در صفحه مماس قرار دارد معادله آن را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} y^1 = r \cos \theta \\ y^2 = r \sin \theta \end{cases}$$

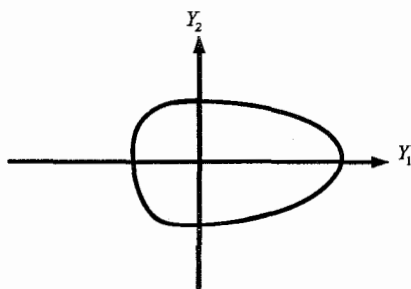
حال با روش اوکوبو تابع مینکوفسکی F را بدست می‌آوریم. با حذف r, θ از معادلات بالا داریم $(y^1)^2 + (y^2)^2 = 3\sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2} + y^1$ حال y^i/F را جایگزین y^i می‌کنیم.

$$(y^1/F)^2 + (y^2/F)^2 = 3\sqrt{(y^1/F)^2 + (y^2/F)^2} + y^1/F$$

از آنجا با ساده کردن داریم:

$$F(y^1, y^2) = \frac{(y^1)^2 + (y^2)^2}{3\sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2} + y^1}$$

می‌توان بررسی نمود که F یک نرم مینکوفسکی روی $T_x \mathbb{R}^2$ است. برای اثبات تحدب قوی به کتاب [۱۶] صفحه ۴۷ مراجعه شود. با فرض $\alpha = \sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2}$ و $\beta = y^1$



شکل ۴.۲: لیماسون به عنوان شاخص یک متریک فینسلری.

می‌توان معادله F را به صورت زیر نوشت:

$$F(y) = \frac{\alpha^2}{3\alpha + \beta}$$

این نوع متریک را که یک (α, β) -متریک نیز می‌گویند به نام متریک ماتسوموتو مشهور است. ([۱۶] ص. ۴۷)

مثال ۴.۵.۲. فرض کنیم معادله یک شاخص یا ایندیکاتوریکس داده شده باشد. می‌خواهیم از روی آن یک متریک فینسلری بدست آوریم. اگر $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ فضای اقلیدسی یا صفحه مخدوف $\mathbb{R}^2$ و با مختصات (x, y) باشد فرض می‌کنیم که در هر نقطه دلخواه $p(x, y)$ از صفحه $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ شاخص I_p مکان نقاطی به مرکز مبدا p و شعاع $\sqrt{e(x, y) + 1}$ باشد. (شکل ۵.۲ در صفحه ۳۶ را ببینید). در این معادله $e(x, y)$ یک تابع حقیقی با مقدار مثبت است که مقدار آن در نقطه (x, y) ثابت است. آنگاه شاخص I_p در مختصات (u, v) با معادله زیر داده می‌شود. باید توجه داشت که شاخص و مختصات (u, v) در صفحه مماس

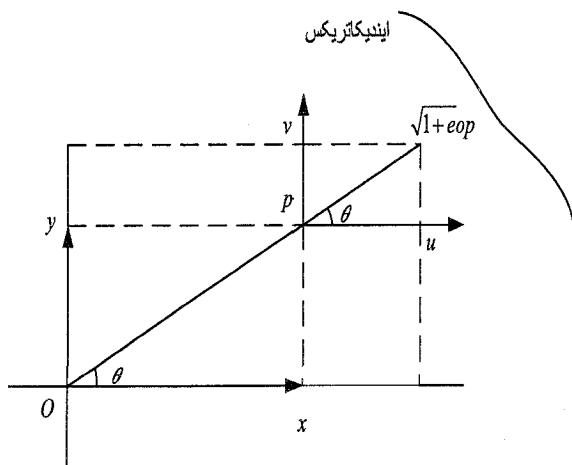
قرار دارند.

$$u = r \cos \theta = \sqrt{(1+e)} op \cos \theta = \sqrt{(1+e)} x$$

$$v = r \sin \theta = \sqrt{(1+e)} op \sin \theta = \sqrt{(1+e)} y$$

$$u^2 + v^2 = (1+e)(x^2 + y^2)$$

$T_p \mathbb{R}^2$ فضای مماس در نقطه p از $\mathbb{R}^2$ را می‌توان با $\mathbb{R}^2$ یکی در نظر گرفت. حال اگر



شکل ۵.۲: شاخص یا ایندیکاتریکس در صفحه مماس $T_p \mathbb{R}^2$ در نقطه p از $\mathbb{R}^2$ قرار دارد.

در هر نقطه $X + (x, y)$ بردار مماس $W = (\dot{x}, \dot{y})$ اثر کندآنگاه تغییر متغیر $\{u = x + \dot{x}, v = y + \dot{y}\}$ را در نظر می‌گیریم. با جایگذاری (u, v) در رابطه (۱) داریم:

$$e(x^2 + y^2) - 2(x\dot{x} + y\dot{y}) - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 0$$

حال از روش اکوبو استفاده می‌کنیم و $(\frac{\dot{x}}{F}, \frac{\dot{y}}{F})$ را جایگزین $(\dot{x}, \dot{y})$ می‌کنیم. از آنجا داریم:

$$e(x^2 + y^2)F^2 - 2(x\dot{x} + y\dot{y})F - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 0$$

که یک معادله درجه دوم نسبت به F است که دو جواب دارد و ما فقط جواب مثبت آن را در نظر می‌گیریم.

$$F = \frac{x\dot{x} + y\dot{y} \pm \sqrt{(x\dot{x} + y\dot{y})^2 + e(x^2 + y^2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}}{e(x^2 + y^2)}$$

$$= \frac{1}{e}(\sqrt{\lambda^2 + e\rho^2} + \lambda)$$

که در آن

$$\lambda = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{x^2 + y^2} \quad \rho^2 = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{x^2 + y^2}$$

می‌توان نشان داد که F در شرایط تابع مینکوفسکی صدق نمی‌کند و در نتیجه یک متریک فینسلری از نوع راندرزی است.

مثال ۵.۵.۲. در اینجا مثال دیگری از متریک راندرز در صفحه $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ با استفاده از مشخصه مفروضی که به صورت زیر تعریف شده است می‌آوریم. فرض کنیم در هر نقطه $p(x, y)$ شاخص I_p یک منحنی از مقاطع مخروطی با کانون P بوده و فاصله دوری از مرکز^{۳۶} $e(x, y)$ باشد. می‌دانیم مقدار e برای دایره $e = 0$ برای بیضی $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ و برای سهمی $e = 1$ و برای هذلولی $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ می‌باشد. یک مقطع مخروطی با خط هادی در مبدا O و کانون در $(p, 0)$ و خروج از مرکز $e > 0$ دارای معادله دکارتی زیر است:

$$y^2 + (1 - e^2)x^2 - 2px + p^2 = 0.$$

با حذف p در معادله بالا داریم:

$$y^2 + (1 - e^2)x^2 - \frac{2a(1 - e^2)}{e}x^2 + \frac{a^2(1 - e^2)^2}{e^2} = 0.$$

^{۳۶}eccentricity

معادله مقاطع مخروطی در مختصات قطبی به شکل $r = \frac{pe}{1-p \cos \theta}$ نوشته می‌شود که p فاصله کانون از مبدا است. در دستگاه مختصات (u, v) می‌توان معادله مقاطع مخروطی یا شاخص را به صورت زیر نوشت:

$$\sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2} = \frac{e(xu + yv)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

در حالتی که $e > 0$ ، I_p در سمت مثبت $xu + yv$ قرار می‌گیرد. اگر فضای مماس بر $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ را با خودش یکی در نظر بگیریم و فرض کنیم که در هر نقطه علاوه بر بردار موقعیت (x, y) بردار دیگری مانند $(\dot{x}, \dot{y})$ نیز دارد، آنگاه از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

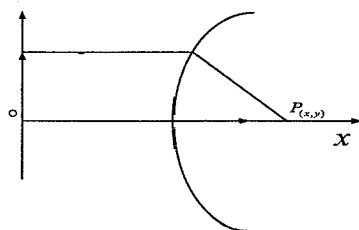
$$\begin{cases} u = x + \dot{x} \\ v = y + \dot{y} \end{cases}$$

با جایگذاری در رابطه بالا داریم:

$$\sqrt{(x^2 + y^2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)} = e(x^2 + y^2 + x\dot{x} + y\dot{y})$$

با استفاده از روش اکوبو یعنی با تقسیم بردار $W = (\dot{x}, \dot{y})$ بر F و جایگزینی W/F داریم

$$F = \frac{\sqrt{(x^2 + y^2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)} - e(x\dot{x} + y\dot{y})}{e(x^2 + y^2)} = \frac{1}{e}\rho - \lambda$$



شکل ۶.۲: سهمی به عنوان شاخص یک متر فینسلر.

۶.۲ مسیرهای بهینه در مسائل کاربردی

فرض کنیم U بازی از $\mathbb{R}^n$ با مختصات (x^i) باشد، تابع حقیقی $f(x, y)$ را در نظر می‌گیریم:

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x^i, y^i) \rightarrow \mathbb{R}$$

حال اگر C یک منحنی روی U باشد $C : [a, b] \rightarrow U$ که توسط $x^i = x^i(t)$ داده می‌شود را منحنی قابل قبول گوئیم اگر مؤلفه‌های x^i از کلاس C^1 باشند، خانواده این منحنی‌ها از نقاط ثابت $x^i(a)$ و $x^i(b)$ می‌گذرند. حال انتگرال زیر را در نظر می‌گیریم:

$$J(c) = \int_a^b f(x(t), \dot{x}(t)) dt \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

به راحتی در حساب تغییرات نشان می‌دهند برای آنکه انتگرال فوق مینیمم باشد باید در شرط زیر موسوم به شرط اولر صدق کند:

$$E_i(c) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial y^i} \right) - \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0$$

اگر در معادله تابع f نسبت به y همگن درجه یک باشد آنگاه با فرض $f_i = \frac{\partial f}{\partial y^i}$ و $f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^i \partial y^j}$ ، معادله اولر به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f_{ij} \left(\frac{dy^j}{dt} \right) + \frac{\partial f_i}{\partial x^j} y^j - \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0$$

حال اگر یک منحنی در شرط اولر صدق کند آنگاه آن منحنی کوتاه‌ترین خم بین نقطه $c(a)$ و $c(b)$ است که آن را ژئودزیک می‌نامیم.

حال اگر در دو مثال قبل، بخواهیم معادله ژئودزیک‌ها را بدست آوریم به صورت زیر عمل می‌کنیم

در مختصات قطبی (r, θ) داریم

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

اگر قرار دهیم $\theta = v$ و $u = \dot{r}$ آنگاه از معادله اولر نتیجه می‌شود:

$$F_{rv} - F_{\theta v} + (u\dot{v} - v\dot{u})\left(\frac{F_{uv}}{v^2}\right) = 0$$

که در آن $F_u = \frac{\partial F}{\partial u}$ و $F_v = \frac{\partial F}{\partial v}$ و $F_r = \frac{\partial F}{\partial r}$ این معادله در مثال‌های قبل کوتاه‌ترین مسیریها را نتیجه می‌دهد.

تمرین ۱۰.۶.۲. فرض کنیم جسمی به جرم m را با سرعت اولیه $V.km/h$ پرتاب می‌کنیم. با توجه به آنچه از حرکت پرتابی در ریاضیات مقدماتی می‌دانیم مسیر حرکت را می‌توان به دست آورد. در این مسئله به روش اکوبو متریک مربوط به آن را به دست آورید. نشان دهید هندسه حرکت پرتابی از نوع راندزی است.

راهنمایی: ابتدا مسئله را با مشابه آنچه در حرکت پرتابی می‌دانیم حل کنید. یعنی نیروی جاذبه را مانند نیروی باد به عنوان نیرویی که مزاحم حرکت مستقیم است، در نظر گرفته، شاخص حرکت را بدست بیاورید. از روی شاخص به روش اکوبو متریک یا هندسه حرکت پرتابی را محاسبه نمایید.

التصاق خطی و التصاق ریمانی^۱

برای آنکه بتوان هندسه یک فضا را مطالعه نمود باید ببینیم خط راست را چگونه می توان روی آن فضا تعریف کرد. اگر آن فضا خمیدگی داشته باشد ممکن است آن چیزی که ما آن را با تعبیر اقلیدس خط راست می نامیم دیگر وجود نداشته باشد. همچنین ممکن است اصول موضوعه اقلیدس برای آن فضا برقرار نباشد.

برای تعمیم مفهوم خط راست روی منیفلد ها - که آن را ژئودزی می نامیم - باید از خواص خط راست استفاده کنیم. بارزترین خاصیت خط راست، طبیعت کوتاه ترین فاصله

^۱Linear connection and Riemannian connection

بین دو نقطه بودن آن است، که استفاده از آن کمی پیچیده به نظر می رسد، لذا، از خاصیت خط راست به عنوان یک منحنی باشتاب صفر، استفاده می کنیم. استفاده از این خاصیت خط راست روی منیفلد ها احتیاج به مقدماتی از جمله تعریف یک نوع مشتق گیری موسوم به عمل مشتق گیری همگرد دارد. مشتق گیری کواریان یا همگرد^۲ تعمیمی است از مشتق گیری سویی یا مشتق گیری جهتی از یک تابع مانند f در راستای میدان برداری X ، که در ریاضیات عمومی با آن آشنا شده ایم. به عبارت دقیقتر مشتق سویی $X.f$ میزان تغییرات تابع f در سوی بردار X را ارزیابی می کند، در صورتی که مشتق گیری همگرد نه تنها میزان تغییرات توابع، بلکه میزان تغییرات میدان های برداری، افرم ها و یا به طور کلی یک میدان تانسوری را در سوی میدان برداری X محاسبه می نماید. برای تعریف مفهوم مشتق گیری همگرد، احتیاج به مفهوم التصاق داریم. حال ببینیم التصاق چیست و به چه منظور بکار می رود.

التصاق چیست. برای تعمیم یک تعریف از فضای $\mathbb{R}^n$ به روی منیفلدها باید به دو موضوع توجه داشت اول خاصیت خوش تعریف بودن به این معنی که آن مفهوم روی منیفلدها قابل بیان باشد. دوم آنکه اگر این تعریف به دستگاه مختصات موضعی یعنی کارت ها بستگی نداشته باشد. در این صورت میگوییم این تعریف، یک تعریف سرتاسری است که آن را ذاتی^۳ نیز می نامند. برای روشن شدن مورد اول فرض کنیم که $C(t)$ یک منحنی روی منیفلد M باشد. اگر شتاب این منحنی یعنی $C'''(t)$ را با رابطه

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{C'(t + \Delta t) - C'(t)}{\Delta t}$$

تعریف کنیم انگاه این تعریف بی معنی است زیرا صورت کسر از تفاضل دو بردار در دو فضای برداری مختلف یعنی $TC(t)M$ و $TC(t+\Delta t)M$ تشکیل شده است و نمی توان دو بردار از دو فضای برداری مختلف را از یکدیگر کم کرد. اما همینطور که می دانیم این اشکال

^۲covariant derivative

^۳intrinsic

در IR^n پدید نمی آید و به راحتی مفهوم مشتق تعریف می شود. (چرا؟)^۴

لذا برای آنکه بتوانیم مفهوم شتاب یک منحنی روی یک منیفلد را تعریف کنیم لازم است راهی پیدا کنیم که بتوان بدون توجه به مختصات از بردارها (یا میدان های برداری) در طول یک منحنی مشتق گیری نماییم. به بیان ساده تر باید بتوانیم مقادیر دو بردار از دو فضای برداری مجاور و متفاوت را با یکدیگر مقایسه نماییم یا به عبارت دیگر دو فضای برداری مجاور را توسط یک مشتق گیری به یکدیگر "التصاق" نماییم. در اینجا است که کلمه "التصاق" مفهوم پیدا کرده موضوع بحث این فصل ما خواهد بود. اما قبل از اینکه وارد بحث التصاق شویم باید ابتدا یک نوع مشتق گیری بنام مشتق گیری همگرد تعریف کنیم که بستگی به مختصات نداشته و بتوان بردار شتاب را توسط آن تعریف نمود. سپس این مشتق گیری وقتی کامل می شود که به متریک ریمانی روی M بستگی داشته باشد. این موضوع اولین بار توسط لوی چی ویتا^۵ دانشمند ایتالیایی در سال ۱۹۱۷ مورد مطالعه قرار گرفت [۵۸].

۱.۳ التصاق خطی و مشتق گیری همگرد

فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر و $\mathcal{X}(M)$ مجموعه میدان های برداری دیفرانسیل پذیر روی آن باشد.

تعریف ۱.۱.۳. فرض کنیم عملگر ∇ قانونی باشد که به هر میدان برداری X از $\mathcal{X}(M)$ ، یک نگاشت ∇_X با فرض $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ مربوط می سازد که در

^۴ این فضاها ی برداری بر یکدیگر منطبق میشوند و می توان آن بردارها را با هم جمع یا تفریق نمود

^۵Levi-Civita, T.

شرایط زیر صدق می کند:

$$\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ, \quad (1.3)$$

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_XY + (Xf)Y, \quad (2.3)$$

که در آن $f, g \in C^\infty(M)$ و $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$. اگر f یک تابع روی M باشد آنگاه اثر ∇_X را توسط $\nabla_X f = Xf$ تعریف می کنیم. در این صورت ∇ را یک التصاق خطی یا التصاق آفین^۶ روی M نامیده و عملگر ∇_X را مشتق گیری همگرد^۷ نسبت به X می نامیم.

باید در نظر داشت که ∇_X در شرایطی که قبلا برای یک عملگر مشتق گیری بیان نمودیم صدق می کند. مشتق همگرد ∇_X روی منیفلد M را می توان به صورت موضعی زیرنوشت.

لم ۲.۱.۳. فرض کنیم (x, U) یک کارت در همسایگی نقطه p روی منیفلد n -بعدی M همراه با التصاق آفین ∇ باشد. آنگاه $\nabla_X Y$ در این مختصات را می توان به صورت گسترده زیر نوشت.

$$\nabla_X Y = (X.Y^i + \Gamma_{jk}^i X^j Y^k) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

فرمول موضعی مشتق گیری همگرد.

که در آن فرض کرده ایم ضرایب Γ_{ij}^k توابعی حقیقی روی M هستند. در اینجا از قاعده جمع بندی استفاده شده است و i, j, k مقادیر ۱، ۲، ۳، ...، n را اختیار می کنند.

^۶ Affine or Linear connection

^۷ Covariant derivative

اثبات. در همسایگی هر نقطه $p \in M$ یک کارت موضعی (x, U) در نظر می‌گیریم که به هر نقطه p مختصات $(x_1(p), \dots, x_n(p))$ را وابسته می‌کند. فرض کنیم $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)_{(p)}$ پایه‌ای برای $T_p M$ روی کارت موضعی (x, U) باشد. اگر $X = X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ و $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}$ آنگاه چون $\frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{X}(M)$ می‌توان فرض کرد که

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (3.3)$$

که در آن فرض کرده‌ایم ضرایب Γ_{ij}^k توابعی حقیقی روی M هستند. از آنجا داریم:

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_X \left(Y^i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = Y^i \nabla_X \frac{\partial}{\partial x_i} + X(Y^i) \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= Y^i X^j \Gamma_{ji}^k \frac{\partial}{\partial x_k} + X(Y^i) \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= (X(Y^k) + \Gamma_{ji}^k Y^i X^j) \frac{\partial}{\partial x_k} \end{aligned}$$

یا به صورت گسترده می‌توانیم فرمول مشتق‌گیری همگرد را به صورت زیر بنویسیم:

$$\nabla_X Y = \left(X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x_i} + \Gamma_{ij}^k Y^i X^j \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (4.3)$$

□ در اینجا Γ_{ij}^k ها را ضرایب التصاق یا علائم کریستوفل می‌نامیم.

تمرین ۳.۱.۳. فرض کنیم X یک میدان برداری در طول منحنی $C(t) : [a, b] \rightarrow M$ روی منیفلد M همراه با التصاق آفین ∇ باشد. اگر تعریف کنیم $\frac{D}{dt} X = \nabla_{C'(t)} X$ ، نشان دهید $\frac{D}{dt} X$ در روابط زیر صدق می‌کند.

$$\forall X, Y \in T_{C(t)} M \quad \frac{D}{dt}(X + Y) = \frac{D}{dt}(X) + \frac{D}{dt}(Y) \bullet$$

$$\frac{D}{dt}(fX) = \frac{df}{dt}(X) + f \frac{D}{dt}(Y) \bullet \quad \text{که در آن } f \text{ یک تابع دیفرانسیل پذیر حقیقی روی } [a, b] \text{ است.}$$

۲.۳ تعبیر هندسی مشتق‌گیری همگرد در طول یک منحنی

فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر همراه با التصاق آفین ∇ بوده و $C(t) : [a, b] \rightarrow M$ یک منحنی دیفرانسیل پذیر روی منیفلد M باشد. می‌توان نشان داد که به هر میدان برداری X در طول $C(t)$ یک و تنها یک میدان برداری $\nabla_{C'(t)} X$ وابسته می‌گردد. (تمرین ۳.۱.۳ در صفحه ۴۵ را ببینید.) این میدان برداری را مشتق‌گیری همگرد در طول منحنی C می‌نامیم و آن را با نماد ساده $\frac{D}{dt} X$ نمایش می‌دهیم.

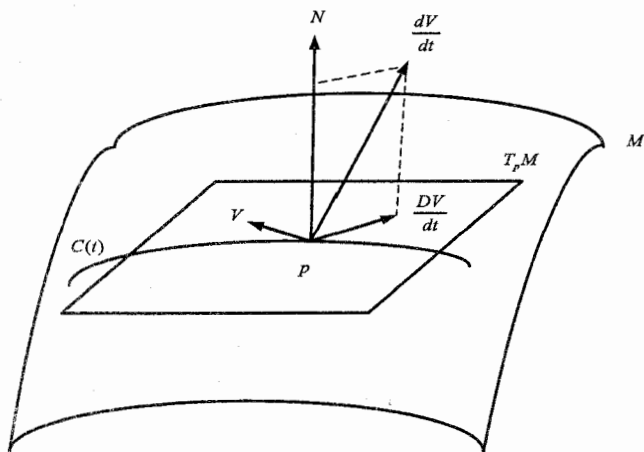
تعبیر هندسی مشتق‌گیری همگرد. فرض کنیم $C(t)$ یک منحنی روی منیفلد M باشد. اگر بردار مماس در نقطه $p = C(t_0)$ را با $T_p M$ نمایش دهیم ممکن است بردار شتاب یعنی $\frac{d^2 C}{dt^2} \big|_{t=t_0}$ در نقطه p به $T_p M$ تعلق نداشته باشد و نتوان آن را بر اساس اعضای پایه $T_p M$ نوشت. لذا مفهوم مشتق‌گیری از یک بردار به شکل معمول یک خاصیت طبیعی یا ذاتی نیست. لذا برای رفع این مشکل بردار $\frac{d^2 C}{dt^2}$ را به دو مولفه شتاب قائم و مولفه شتاب مماسی طوری تجزیه می‌کنیم که بردار شتاب مماسی در روی $T_p M$ قرار داشته باشد. حال بردار شتاب مماسی در روی $T_p M$ را با $\frac{DV}{dt} \big|_t$ نمایش داده آن را $\frac{dV}{dt}$ روی $T_p M$ را به عنوان بردار شتاب منحنی C در نظر گرفته آن را مشتق‌گیری همگرد در طول منحنی C می‌نامیم. (شکل ۱.۳ در صفحه ۴۷ را ببینید.) از نظر فیزیکی مولفه شتاب قائم باعث می‌شود که جسم مورد نظر هنگام حرکت بر روی منحنی C قرار داشته از منیفلد M خارج نشود.

تعریف ۱.۲.۳. فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر با التصاق خطی ∇ باشد. میدان برداری V را در طول منحنی $C : I \rightarrow M$ موازی^۸ گوئیم، اگر به ازای هر $t \in I$ داشته باشیم $\frac{DV}{dt} = 0$. بعلاوه اگر $V(t_0) = V$ آنگاه میدان برداری V را انتقال موازی^۹ V در طول C می‌نامیم.

^۸parallel

^۹transport parallel

$\frac{DV}{dt}$ مولفه مماسی شتاب
 N بردار قائم



شکل ۱.۳: تعبیر هندسی مشتق گیری همگرد $\frac{DV}{dt}$ به عنوان مولفه شتاب مماسی.

در این بخش و در ادامه کتاب برای سادگی در نگارش، فرض می کنیم $\frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i$ و هرگاه احتمال اشتباه نرود با استفاده از دستور جمع بندی انیشتن از نوشتن علامت زیگما خودداری می کنیم.

گزاره ۲.۲.۳. فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر با التصاق خطی ∇ و $C: I \rightarrow M$ یک منحنی دیفرانسیل پذیر روی M باشد. اگر $V \in T_{C(t)} M$ بردار مماس بر M در نقطه $C(t)$ باشد آنگاه یک میدان برداری موازی یکتا V در طول منحنی C موجود است به طوریکه $V(t) = V$.

توجه شود که الزاما بردار V مماس بر منحنی C نیست.

اثبات. ابتدا ثابت می کنیم که اگر گزاره روی یک کارث موضعی M برقرار باشد آنگاه می توان از آن نتیجه گرفت که گزاره روی کل M برقرار است. فرض کنیم گزاره برای حالتی که منحنی C زیر مجموعه یک کارت موضعی است برقرار باشد. سپس می توان به شرح

زیر نشان داد که گزاره روی کل M برقرار است. از فشردگی I نتیجه می شود که برای هر $t_1 \in I$ قطعه $C([t_0, t_1])$ نیز فشرده بوده (چون C پیوسته است) و آن را می توان به وسیله تعداد متناهی از کارت های موضعی پوشاند. طبق فرض V را می توان روی هر یک از این کارتها به طور یکتا تعریف نمود. از فرض یکتایی میدان برداری V در طول منحنی C نتیجه می شود که این میدان های برداری هنگامی که اشتراک کارت ها ناتهی است بر یکدیگر منطبق می شوند، بنابراین V در تمام نقاط در طول بازه $[t_0, t_1]$ تعریف می شود و در نتیجه V در کل بازه I به طور یکتا تعریف می شود. لذا کافیس گزاره را در حالتی که C زیر مجموعه یک کارت موضعی (x, U) است ثابت کنیم.

فرض کنیم که میدان برداری V در همسایگی U موجود بوده به طوریکه در طول $C(t)$ موازی و در شرط $V(t_0) = V$ صدق کند. اگر $V = \sum_j v^j \partial_j$ آنگاه بنا بر قرارداد $C^i = x(C^i(t)) = x_i$ داریم

$$\frac{D\partial_j}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} \partial_j = \nabla_{\frac{dC^i}{dt} \partial_i} \partial_j = \frac{dC^i}{dt} \nabla_{\partial_i} \partial_j$$

لذا داریم

$$0 = \frac{DV}{dt} = \frac{D(v^j \partial_j)}{dt} = \frac{dv^j}{dt} \partial_j + v^j \frac{D\partial_j}{dt} = \frac{dv^j}{dt} \partial_j + v^j \frac{dC^i}{dt} \nabla_{\partial_i} \partial_j.$$

با جایگذاری رابطه (۳.۳) و تعویض زیرنویس j با k در جمله اول داریم

$$\frac{DV}{dt} = \left\{ \frac{dv^k}{dt} + v^j \frac{dC^i}{dt} \Gamma_{ij}^k \right\} \partial_k = 0.$$

از این رابطه یک دستگاه n معادله دیفرانسیل درجه اول خطی نسبت به $v^k(t)$ به ازاء $k = 1 \dots n$ بدست می آید.

$$\frac{dv^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k \frac{dC^i}{dt} v^j = 0. \quad (5.3)$$

بر اساس قضیه وجود و یکتایی جواب در معادلات دیفرانسیل، این معادله با شرط اولیه $v^k(t_0) = v_0^k$ دارای یک جواب یکتاست. از طرف دیگر چون دستگاه خطی است به ازاء

هر $t \in I$ جواب های آن موجود بوده و به طور یکتا تعریف می شود، از آن وجود و یکتایی یک میدان برداری موازی یکتا V با شرط اولیه فوق نتیجه می گردد.

از اثبات گزاره فوق همچنین فرمول مشتق گیری همگرد در طول منحنی C از میدان برداری دلخواه $X = X^k \partial_k$ بدست می آید.

$$\frac{DX}{dt} = \left\{ \frac{dX^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k \frac{dC^i}{dt} X^j \right\} \partial_k.$$

مشتق گیری همگرد در طول یک منحنی.

۳.۳ التصاق ریمانی و قضیه اساسی هندسه ریمانی

در تعریف التصاق خطی ملاحظه نمودید که برای متریک ریمانی منیفلد M شرطی قائل نشدیم. حال اگر شرایط زیر را به تعریف فوق اضافه نماییم، تعریف جدید زیر حاصل می شود.

تعریف ۱.۳.۳. اگر یک التصاق خطی ∇ روی منیفلد ریمانی (M, g) در شرایط زیر صدق کند، آن را التصاق ریمانی^۱ می نامند.

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \quad (۶.۳)$$

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad (۷.۳)$$

که در آن $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

^۱Reimannian connection.

التصاق ریمانی را التصاق لوی-چی ویتا^{۱۱} نیز می‌گویند. رابطه (۶.۳) را شرط تاب آزادی^{۱۲} و رابطه (۷.۳) را شرط سازگاری با متریک^{۱۳} می‌نامند. به عبارت دیگر اگر تانسور تاب یک التصاق را به صورت زیر تعریف کنیم.

$$T : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$$

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (۸.۳)$$

آنگاه شرط (۶.۳) معادل $T(X, Y) = 0$ است. می‌توان نشان داد که شرط (۷.۳) معادل عبارت $\forall X \in \mathcal{X}(M), \nabla_X g = 0$ است. (تمرین ۴.۷.۳ در صفحه ۷۵ را ببینید).

گزاره ۲.۳.۳. فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی باشد. التصاق خطی ∇ با متریک g سازگار است اگر و تنها اگر بازاء هر میدان برداری V, W در طول هر منحنی $C(t)$ روی M داشته باشیم

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \langle \frac{DV}{dt}, W \rangle + \langle V, \frac{DW}{dt} \rangle, \quad \forall t \in I = [a, b] \quad (۹.۳)$$

اثبات. فرض کنیم که رابطه (۹.۳) برقرار باشد واضح است که این رابطه بازاء هر میدان برداری V, W در طول هر منحنی $C(t)$ روی M معادل است با رابطه (۷.۳). لذا رابطه (۹.۳) سازگاری با متریک را برای التصاق ∇ نتیجه می‌دهد.

بالعکس: فرض کنیم التصاق خطی ∇ با متریک g سازگار باشد. یک پایه یکه قائم $P_1(t), \dots, P_n(t)$ از $T_{C(t)}M$ ($t \in I$) در نظر می‌گیریم، با استفاده از گزاره ۲.۲.۳ ما می‌توانیم بردارهای $P_i(t)$ به ازاء $i = 1, \dots, n$ را به طور موازی در طول C انتقال دهیم. چون التصاق با متریک سازگار است $P_1(t), \dots, P_n(t)$ یک پایه یکه قائم برای

^{۱۱}Levi-Civita Connection

^{۱۲}Torsion freeness

^{۱۳}Metric compatibility

$T_{C(t)}M$ به ازاء هر $t \in I$ تشکیل می دهد. (تمرین ۳.۳.۳ در صفحه ۵۱ را ببینید.)
بنابراین می توانیم بنویسیم:

$$V = \sum_i v^i P_i, \quad W = \sum_i w^i P_i, \quad i = 1, \dots, n$$

که در آن v^i, w^i توابع دیفرانسیل پذیری هستند که به ازاء هر $t \in I$ در طول منحنی C تعریف می شوند. لذا چون P_i ها به طور موازی انتقال پیدا کرده اند داریم

$$\frac{DV}{dt} = \frac{D(\sum_i v^i P_i)}{dt} = \sum_i \frac{D(v^i P_i)}{dt} = \frac{dv^i}{dt} P_i + v^i \frac{DP_i}{dt} = \frac{dv^i}{dt} P_i.$$

به طریق مشابه داریم $\frac{DW}{dt} = \frac{dw^i}{dt} P_i$. از آنجا

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle &= \left\langle \sum_i \frac{dv^i}{dt} P_i, \sum_j w^j P_j \right\rangle \\ &= \sum_{i,j} \frac{dv^i}{dt} w^j \langle P_i, P_j \rangle \\ &= \sum_{i,j} \frac{dv^i}{dt} w^j \delta_j^i \\ &= \sum_i w^i \frac{dv^i}{dt}. \end{aligned}$$

به طریق مشابه داریم $\left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle = \sum_i v^i \frac{dw^i}{dt}$. از جمع دو رابطه اخذ داریم

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle &= \sum_i \left(\frac{dv^i}{dt} w^i + v^i \frac{dw^i}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \sum_i v^i w^i \\ &= \frac{d}{dt} \langle V, W \rangle. \end{aligned}$$

□ لذا به ازاء هر $t \in I$ رابطه حکم برقرار است.

تمرین ۳.۳.۳. یک پایه دلخواه یکه قائم $\{X^i\}_{i=1 \dots n}$ از $T_p M$ در نظر گرفته آن را در طول منحنی C به طور موازی انتقال دهید. سپس با استفاده از فرض سازگاری با متریک نشان

دهید که این پایه در طول منحنی C یکه قائم باقی می ماند.

راهنمایی. از فرض سازگاری با متریک (۷.۳) و خاصیت $\nabla_{C'(t)} X^i = 0$ استفاده نموده نشان دهید $\frac{d}{dt} \langle X^i, X^j \rangle = 0$.

قضیه ۴.۳.۳. (قضیه اساسی هندسه ریمانی) روی هر منیفلد ریمانی (M, g) یک و تنها یک التصاق ریمانی وجود دارد.

اثبات. (اثبات وجود) فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی بوده و X و Y دو میدان برداری روی M باشند. عملگر $\nabla_X Y : (X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$ را توسط رابطه زیر تعریف نموده نشان می دهیم که بازاء هر میدان برداری دلخواه Z یک التصاق ریمانی روی M است.

$$\begin{aligned} 2 \langle \nabla_X Y, Z \rangle &= X \langle Y, Z \rangle + Y \langle X, Z \rangle - Z \langle X, Y \rangle \\ &+ \langle [X, Y], Z \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle, \end{aligned} \quad (10.3)$$

به راحتی می توان نشان داد که عملگر $\nabla_X Y$ در شرایط التصاق خطی یعنی روابط (۱۰.۳) ، (۲.۳) و رابطه تاب آزادی (۶.۳) صدق می کند. (تمرین ۵.۳.۳ در صفحه ۵۲ را ببینید.) اثبات یکتایی. برای اثبات یکتایی کافی است توجه کنیم که سمت راست رابطه تعریف ∇ یعنی رابطه (۱۰.۳) به ∇ بستگی ندارد و هر عملگر دیگری مانند ∇' که توسط این رابطه تعریف شود با ∇ برابر است. $\square$

تمرین ۵.۳.۳. نشان دهید که عملگر ∇ تعریف شده توسط رابطه (۱۰.۳) در صفحه ۵۲ در شرایط زیر صدق می کند.

• الف) شرایط التصاق خطی.

• ب) شرط تاب آزادی.

• ج) شرط سازگاری با متریک.

راهنمایی. برای آنکه نشان دهیم ∇ با متریک سازگار است کافی است در سمت راست رابطه (۷.۳) مقادیر مناسب را از رابطه (۱۰.۳) جایگذاری کنیم.

تمرین ۶.۳.۳. با استفاده از شرط سازگاری متریک در التصاق ریمان رابطه (۱۰.۳) در صفحه ۵۲ را بدست آورید.

راهنمایی: از تغییر دوری X, Y, Z در رابطه (۷.۳)، جمع دو رابطه اول و تفاضل رابطه سوم، مشابه روش کریستوفل در اثبات لم موضعی ۸.۳.۳ در صفحه ۵۳ عمل کنید.

تمرین ۷.۳.۳. هرگاه ∇ یک التصاق خطی روی M و T تانسور تاب باشد. ثابت کنید: الف) T یک میدان تانسوری از نوع $\binom{1}{2}$ است.

ب) می‌گوییم التصاق ∇ متقارن است اگر تاب آن برابر صفر باشد. نشان دهید ∇ متقارن است اگر و تنها اگر علائم کریستوفل آن وابسته به هر قاب مختصاتی متقارن باشد یعنی

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k.$$

راهنمایی. جواب خود را با حل این تمرین در فصل آخر مقایسه کنید.

۱.۳.۳ صورت موضعی قضیه اساسی و مشتق‌گیری همگرد

قضیه اساسی هندسه ریمانی برای اولین بار به صورت موضعی توسط لوی-چی ویتا بیان و به روشی موسوم به روش کریستوفل اثبات گردید. از آنجا که حل مسائل هندسه به روش موضعی به طور گسترده توسط فیزیکدانان استفاده می‌شود و فراگیری آن برای انجام عملیات حسابان تانسوری بسیار مفید است، در اینجا به بیان اثبات کلاسیک قضیه اساسی هندسه ریمانی می‌پردازیم. سپس روابط مشتق‌گیری همگرد را به روش موضعی مطالعه می‌کنیم. در این بخش نیزمانند سایر فصول، چنانچه احتمال اشتباه نرود، برای سادگی در نگارش از قرارداد جمع بندی انیشتن و نماد $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ استفاده می‌نمائیم.

لم ۸.۳.۳. یک خانواده یکتا از علائم کریستوفل وجود دارد که التصاق ریمانی وابسته به آن در شرایط تاب آزادی و سازگاری با متریک صدق می کنند.

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right)$$

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right)$$

که در آن $\Gamma_{ijk} = \Gamma_{ij}^l g_{lk}$. در این صورت آن ها به ترتیب علائم کریستوفل نوع اول و نوع دوم نامیده می شوند.

اثبات. با استفاده از شرط (۶.۳) التصاق ریمانی داریم:

$$0 = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_k (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \frac{\partial}{\partial x^k} \quad i, j, k = 1, \dots, n$$

چون $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$ این رابطه نشان می دهد که Γ_{ij}^k ها نسبت به دو اندیس پایین متقارن هستند.

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k. \quad (11.2)$$

حال از شرط سازگاری با متریک یا رابطه (۷.۳) داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left\langle \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle = \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial x^j}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle \quad (12.3)$$

با استفاده از $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ و تعریف ضرب داخلی g_{jk} داریم:

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \left\langle \sum_l \Gamma_{ij}^l \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial x^j}, \sum_l \Gamma_{ik}^l \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle$$

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \sum_l \Gamma_{ij}^l \left\langle \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle + \sum_l \Gamma_{ik}^l \left\langle \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle$$

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \sum_l (\Gamma_{ij}^l g_{lk} + \Gamma_{ik}^l g_{jl})$$

با استفاده از ماتریس معکوس g_{ij} ، می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{ikj}$$

با تغییر دوری اندیس هاسه عبارت مشابه بدست می‌آوریم که با جمع دو عبارت اول و دوم و کم کردن عبارت سوم، رابطه حکم حاصل می‌شود. این شیوه بدست آوردن علائم کریستوفل را روش کریستوفل^{۱۴} می‌نامند. از این معادله دیفرانسیل و قضیه وجود و یکتایی جواب معادلات دیفرانسیل اثبات کامل می‌شود. $\square$

تمرین ۹.۳.۳. فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر و (x, U) و (x', U') دو کارت در همسایگی یک نقطه دلخواه p باشند.

- الف) نشان دهید پس از تغییر مختصات (x^i) به (x'^i) مولفه های تانسور ریمان g_{ij} در رابطه $g_{ij} = g_{i'j'} \frac{\partial x'^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x'^{j'}}{\partial x^j}$ صدق می‌کنند لذا تانسوری از نوع $(\dot{})$ است.
- ب) نشان دهید علائم کریستوفل نوع اول و دوم تانسور $(\dot{})$ یا $(\ddot{})$ نیستند.
- ج) نشان دهید اگر چه علائم کریستوفل نوع دوم تانسور $(\dot{})$ نیستند اما تفاضل

$$T_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i - \Gamma_{jk}^i$$

یک تانسور $(\dot{})$ است که همان مولفه های تانسور تاب هستند.

تمرین ۱۰.۳.۳. نشان دهید که اگر $Y \in \mathcal{X}(M)$ یک میدان تانسوری از نوع $(\dot{})$ روی M باشد، آنگاه مشتق همگرد $\nabla_X Y$ در راستای $X \in \mathcal{X}(M)$ یک میدان تانسوری از نوع $(\dot{})$ روی M است که مولفه های آن توسط رابطه زیر داده می‌شوند.

$$\nabla_X Y = X^j \nabla_j Y^k \quad (13.3)$$

^{۱۴}Cristoffel trick

$$\nabla_X Y = X^j (\partial_j Y^k + \Gamma_{ij}^k Y^i) \partial_k.$$

مشتق همگرد موضعی از یک میدان برداری.

رابطه اخیر را مشتق گیری همگرد میدان برداری Y (صورت موضعی) در راستای X می نامیم.

راهنمایی. رابطه (۴.۳) را با استفاده از $X^j = d(x^j)(X)$ به صورت ضربی از $\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes d(x^j)$ بنویسید.

۴.۳ ژئودزیک به عنوان تعمیم خط راست روی منیفلد

اساس تعاریف و اصول موضوعه در هر هندسه در تعریف خط راست در آن هندسه نهفته است. از آنجا که این خطوط مسیرهای بهینه (کوتاهترین مسیرها) نیز هستند بیشترین کاربرد هندسه در مهندسی و علوم در یافتن این مسیرها است که ما آن را ژئودزیک می نامیم. اما ببینیم از کدامین خاصیت خط راست در $\mathbb{R}^n$ می توان استفاده نمود و این مفهوم را برای منیفلدها تعمیم داد. ساده ترین خاصیتی که در اولین بررسی ها به آن می رسیم خاصیت صفر بودن بردار شتاب خط راست است. در این مورد می توان دو دیدگاه را در نظر گرفت.

الف. استفاده از خواص ژئودزیک رویه ها. همانطور که میدانیم در روی یک رویه در $\mathbb{R}^3$ ، منحنی $C(s)$ ، که در آن s پارامتر طول قوس است، یک ژئودزیک است اگر شتاب آن شتاب صفر باشد. یعنی $C'''(s)$ بر سطح رویه عمود باشد یا از دیدگاه تعبیر هندسی مشتق همگرد، تصویر $C'''(s)$ روی صفحه مماس بر رویه در طول C ، یا $D_t C'(s) = 0$ صفر

باشد. این ویژگی برای رویه های محدب در سال ۱۶۹۸ توسط جوهان برنولی^{۱۵} ثابت شد، و معادله ژئودزیکها برای رویه های به فرم $f(x, y, z) = 0$ توسط لئونارد اولر^{۱۶} در سال ۱۷۳۲ بدست آمد. این معادله از مینیم سازی طول کلیه منحنی های واصل بین دو نقطه یعنی انتگرال $L = \int \sqrt{\langle C''(t), C'(t) \rangle} dt$ نتیجه می شود. در این مورد قبلا نیز در بخش متریک های فینسلری صحبت کرده ایم.

ب. اگر $C(t)$ بردار موضع یک منحنی در $\mathbb{R}^n$ باشد یا روی یک منیفلد M ، مشتق اول آن که همان بردار سرعت است به یک شکل محاسبه می شود، $C''(t) = \frac{dC}{dt}$ اما مشتق دوم آن که در حقیقت مشتق اول بردار سرعت است در $\mathbb{R}^n$ و در روی منیفلد M به ترتیب با $C''(t) = \frac{dC'}{dt}$ و $\nabla_{C'(t)} C'(t)$ نمایش داده می شود. لذا در روی منیفلدها برای تعریف خطوط راست از رابطه $\nabla_{C'(t)} C'(t) = 0$ استفاده می کنیم.

تعریف ۱.۴.۳. منحنی $C(t)$ روی منیفلد ریمانی (M, g) را ژئودزیک گوئیم اگر بردار سرعت آن درامتداد خودش موازی باشد. به عبارت دیگر اگر $\frac{DC'}{dt} = \nabla_{C'(t)} C'(t) = 0$ یا $\frac{DC'}{dt} = 0$.

با توجه به رابطه (۶.۳) معادله ژئودزیک ها را می توان به صورت زیر بدست آورد. فرض کنیم s پارامتر طول قوس منحنی $C = (C^i(s))$ باشد، در این صورت بردار مماس dC/ds یک بردار یکه است و معادله ژئودزیک ها با توجه به پارامتر طول قوس عبارت است از

$$\frac{d^2 C^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dC^i}{ds} \frac{dC^j}{ds} = 0. \quad (۱۴.۳)$$

^{۱۵} Johan Bernoulli جوهان برنولی عضوی از یک فامیل بلژیکی الاصل ساکن سوئیس، متشکل از ریاضیدانان بزرگ قرن هفده و هیجده میلادی. وی که در زمان لایبنیتز در سنه ۱۶۶۷-۱۷۴۸ می زیسته است تحقیقات زیادی در زمینه انتگرال گیری از توابع گویا و ژئودزیک ها دارد.

^{۱۶} Leonard Euler ریاضیدان، فیزیکدان و مهندس سوئسی بزرگ تاریخ که در سنه ۱۷۰۷-۱۷۸۳ می زیسته است.

مثال ۲.۴.۳. فرض کنیم $M = \mathbb{R}^n$ باشد. ژئودزیکهای $\mathbb{R}^n$ با متریک اقلیدسی و التصاق ریمانی مربوطه خطوط راست هستند، زیرا می دانیم در $\mathbb{R}^n$ همواره مولفه های $g_{ij} = \delta_{ij}$ و از آنجا $\Gamma_{ij}^k = 0$. لذا رابطه (۱۴.۳) به صورت $\frac{d^2 C^k}{ds^2} = 0$ نوشته می شود. از آنجا با حل دستگاه معادلات دیفرانسیل $\frac{dC^k}{ds} = a^k$ معادله پارامتری خط راست در $\mathbb{R}^n$ ، $C^k(s) = b^k s + a^k$ بدست می آید.

گزاره ۳.۴.۳. وجود و یکتایی ژئودزیکها. فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر با التصاق خطی ∇ باشد. به ازای هر نقطه $p \in M$ و هر بردار مماس $V_p \in T_p M$ یک ژئودزیک یکتای $C: I \rightarrow M$ روی M وجود دارد که در شرط $C(t_0) = p$ و $C'(t_0) = V_p$ صدق کند.

اثبات. فرض کنیم $t_0 \in I$ و $V_p \in T_p M$ یک همسایگی باز شامل t_0 باشد. بنا بر گزاره ۲.۲.۳ یک میدان برداری موازی یکتا V در طول هر منحنی C موجود است به طوری که $V(t_0) = V_p$. فرض کنیم V میدان برداری انتگرال منحنی C باشد، یعنی در هر نقطه بر C مماس باشد. چون میدان برداری V در امتداد C موازی است بنا بر تعریف داریم $\frac{DV}{dt} = 0$ و در نتیجه C ژئودزیک است و چون V یکتاست C نیز یکتاست. $\square$

ژئودزیک ها دارای خواص جالبی هستند که در فصول بعد مورد مطالعه قرار می گیرند.

تمرین ۴.۴.۳. نیم صفحه بالایی^{۱۷} $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$ را با متریک زیر در نظر بگیرید:

$$g_{11} = g_{22} = \frac{1}{y^2}, \quad g_{12} = 0$$

این متریک را متریک پوانکاره^{۱۸} یا متریک لوباجوفسکی^{۱۹} می نامند.

^{۱۷}Upper half plane

^{۱۸}Poincare'

^{۱۹}Lobachovski

(الف) نشان دهید علائم کریستوفل در فضای پوانکاره عبارتند از:

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y}, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y}$$

(ب) معادله ژئودزیک های فضای پوانکاره را بنویسید.

۱.۴.۳ ژئودزیک های کره S^2

مثال ۵.۴.۳. فرض کنید $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ یک رویه در $\mathbb{R}^3$ با متریک ریمانی القایی باشد، همچنین فرض کنید $C: I \rightarrow M$ یک منحنی دیفرانسیل پذیر روی M و V یک میدان برداری مماس بر M در طول C باشد. نشان دهید

(الف): میدان برداری V موازی است اگر و تنها اگر $\frac{dV}{dt}$ بر $T_{C(t)}M \subset \mathbb{R}^3$ عمود باشد که در آن مشتق گیری عادی از $V: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ است.

(ب): اگر $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ کره واحد $\mathbb{R}^3$ باشد، نشان دهید میدان برداری سرعت در طول دایره عظیمه، که بر حسب طول قوس پارامتری شده باشند، یک میدان موازی است.

(ج): نشان دهید دایره عظیمه ژئودزیک های کره هستند. عکس این موضوع در مثال ۶.۴.۳ ثابت می شود.

اثبات. (الف): بنا بر آنچه در تعبیر هندسی مشتق همگرد دیدیم $\frac{DV}{dt}$ تصویر بردار $\frac{dV}{dt}$ روی صفحه مماس $T_{C(t)}M$ است. لذا اگر $\frac{dV}{dt}$ بر $T_{C(t)}M$ عمود باشد، آنگاه تصویر آن روی این صفحه صفر شده و در نتیجه V یک بردار موازی است. عکس مسئله نیز به همین صورت برقرار است.

(ب): معادله یک دایره عظیمه، که بر حسب پارامتر طول قوس پارامتری شده باشد، روی کره S^2 به شکل $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ است. (مؤلفه صفر می تواند در جایگاه اول یا دوم نیز قرار گیرد) بنابراین داریم

$$\frac{dV}{dt} = (-\cos t, -\sin t, 0) = -\gamma(t). \quad (15.3)$$

$$V(t) = \gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 0). \quad (۱۶.۳)$$

از طرف دیگر می‌دانیم بردار مکان $\overrightarrow{\gamma(t)}$ شعاعی از کره است و شعاع نیز بر مماس عمود است پس اگر X برداری در $T_{\gamma(t)}S^2$ با نقطه شروع $\gamma(t)$ باشد $\overrightarrow{\gamma(t)}$ بر X عمود خواهد بود در نتیجه $\frac{dV}{dt} = -\gamma(t)$ نیز بر X عمود است و با توجه به دلخواه بودن X ، $\frac{dV}{dt}$ بر $T_{\gamma(t)}S^2$ عمود است و بنابر قسمت (الف) V در طول γ موازی است. (ج): بنا بر قسمت ب میدان برداری مماس بر دایره عظیمه، در تمام نقاط موازی است. لذا دایره عظیمه خطوط خود موازی بوده و در نتیجه ژئودزیک های کره هستند. $\square$

مثال ۶.۴.۳. در کره S^2 ، ژئودزیک ها دایره عظیمه اند. این دایره از سطح مقطع کره S^2 با صفحاتی که از مبدا مختصات می‌گذرند تشکیل می‌شوند. اثبات این موضوع در زیر به دو روش آورده شده است.

روش اول، استفاده از خاصیت بهینه بودن ژئودزیک ها. فرض کنیم p_1 و p_2 دو نقطه دلخواه از کره باشند. ثابت می‌کنیم که کوتاه ترین منحنی واصل بین این دو نقطه دایره عظیمه‌ای است که از این دو نقطه می‌گذرد. مختصات کروی (θ, Φ) را در نظر گرفته بدون آنکه اشکالی در کلیت مسئله ایجاد شود، مختصات این دو نقطه را با (θ_1, Φ_1) و (θ_2, Φ_2) نمایش می‌دهیم. فرض کنیم $\Phi = \Phi(\theta)$ یک منحنی دلخواه روی کره باشد که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند.

$$\Phi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow S^2,$$

$$\theta \longrightarrow (\sin \theta \cos \Phi(\theta), \sin \theta \sin \Phi(\theta), \cos \theta).$$

طول این منحنی برابر است با

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} |\Phi'(\theta)| d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{1 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\Phi}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

تابع L وقتی مینیمم می شود که عبارت زیر رادیکال مینیمم باشد. یعنی $\frac{d\Phi}{d\theta} = 0$ یا $\Phi = \Phi_0$. این به آن معنی است که منحنی $\Phi = \Phi(\theta)$ روی دایره عظیمه $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ و $\Phi = \Phi_0$ قرار داشته باشد.

روش دوم، حل معادله دیفرانسیل ژئودزیک ها، که در مختصات کروی (θ, Φ) دارای متریک ریمانی زیر است.

$$g = d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\Phi \otimes d\Phi.$$

علائم کریستوفل عبارتند از $\Gamma_{\theta\Phi}^{\theta} = -\sin \theta \cos \theta$ و $\Gamma_{\theta\Phi}^{\Phi} = \cot \theta$ و معادله ژئودزیک ها عبارت است از

$$\begin{cases} \frac{d^2 \theta}{ds^2} - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\Phi}{ds}\right)^2 = 0, \\ \frac{d^2 \Phi}{ds^2} + 2 \cot \theta \frac{d\theta}{ds} \frac{d\Phi}{ds} = 0. \end{cases} \quad (17.3)$$

با محاسبه مقادیر $\frac{d^2 \theta}{ds^2}$ و $\frac{d\theta}{ds}$ داریم

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{d\Phi} \frac{d\Phi}{ds}, \quad \frac{d^2 \theta}{ds^2} = \frac{d^2 \theta}{d\Phi^2} \left(\frac{d\Phi}{ds}\right)^2 + \frac{d\theta}{d\Phi} \frac{d^2 \Phi}{ds^2}.$$

از آنجا با جایگذاری در رابطه اول (17.3) داریم

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \theta}{d\Phi^2} \left(\frac{d\Phi}{ds}\right)^2 + \frac{d\theta}{d\Phi} \frac{d^2 \Phi}{ds^2} - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\theta}{d\Phi}\right)^2 &= 0, \\ \frac{d^2 \theta}{d\Phi^2} - 2 \cot \theta \left(\frac{d\theta}{d\Phi}\right)^2 - \sin \theta \cos \theta &= 0. \end{aligned} \quad (18.3)$$

با فرض $f(\theta) = \cot \theta$ رابطه (۱۸.۳) به صورت زیر نوشته می شود.

$$\frac{d^2 f}{d\Phi^2} + f = 0.$$

معادله ژئودزیک های کره.

جواب های این معادله عبارتند از

$$f(\theta) = A \cos \Phi + B \sin \Phi.$$

با جایگذاری $f(\theta) = \cot \theta$ در جواب فوق داریم

$$A \sin \theta \cos \Phi + B \sin \theta \sin \Phi - \cos \theta = 0.$$

برای به دست آوردن یک تعبیر هندسی برای این رابطه فرض می کنیم $x = \sin \theta \cos \Phi$ ، $y = \sin \theta \sin \Phi$ و $z = -\cos \theta$. لذا داریم $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. از آنجا جواب های معادله دیفرانسیل ژئودزیک های کره از تقاطع صفحه $Ax + By - z = 0$ با کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ به دست می آیند. این منحنی ها همان دایره عظیمه هستند که در صفحه ای با بردار قائم $(A, B, -1)$ قرار دارند. لذا منحنی $\theta = \theta(\Phi)$ یک ژئودزیک است.

تمرین ۷.۴.۳. در کره S^n میدان برداری شعاعی X با طول واحد را در نظر می گیریم.

• نشان دهید X در هر نقطه بر سطح کره عمود است.

• نشان دهید که در روی کره S^n معادله دیفرانسیل زیر برقرار است.

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + X = 0.$$

• تحت چه شرایطی X بردار موضع یک دایره عظیمه کره S^n است.

• تحت چه شرایطی X بردار موضع یک ژئودزیک کره S^n است.

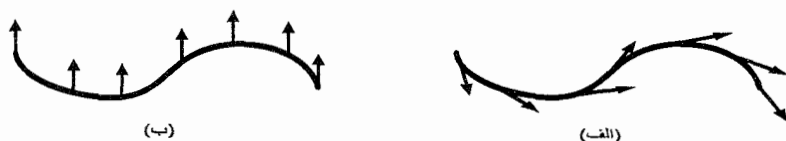
راهنمایی. فرض کنید C یک منحنی روی کره S^n باشد به طوری که بردار موضع آن میدان برداری شعاعی X باشد. بردار سرعت و شتاب C را به عنوان یک منحنی در $\mathbb{R}^{n+1}$ مطالعه کنید.

۵.۳ تعبیر هندسی کلمه موازی و انتقال موازی روی منیفلدها

در حالت کلی انتقال موازی در امتداد یک منحنی نسبت به یک التصاق به معنی ارائه یک ایزومورفیسم یا یک یکریختی بین فضاهاى برداری مماس در امتداد منحنی است. اگر این التصاق از نوع لوی چی ویتا باشد آنگاه این یکریختی ضرب داخلی تعریف شده روی فضاهاى برداری مماس را حفظ می کند. یک کاربرد این خاصیت این است که اگر یک پایه متعامد یکه در روی فضای مماس در یک نقطه از منحنی ژئودزیک تعریف شود آنگاه می توان آن را در امتداد منحنی به طور موازی انتقال داد. به عبارت دیگر این پایه متعامد یکه در امتداد آن منحنی ژئودزیک متعامد یکه باقی می ماند. کاربرد این خاصیت مهم آن است که می توان نتایج موضعی یعنی در همسایگی یک نقطه را به کل منیفلد سرایت داد. تمرین ۳.۳.۳ در صفحه ۵۱ را ببینید.

انتقال موازی کاربردهای دیگری در درک تفاوت های اساسی بین مفاهیم تعریف شده روی یک منیفلد با فضای اقلیدسی دارد. به عنوان مثال تفاوت مفهوم کلمه موازی در فضای اقلیدسی و مفهوم کلمه موازی در روی یک منیفلد را می توان با استفاده از انتقال موازی بیان نمود. اگر بخواهیم به زبانی ساده این موضوع را بیان کنیم باید بگوئیم در روی فضای مماس بر منیفلدها مفهوم موازی به دو گونه عنوان می شود، یکی مشابه با فضای اقلیدسی که با آن آشنایی داریم و دیگری مفهوم موازی به معنی مماس بودن در روی ژئودزیک. شکل ۲.۳ در

صفحه ۶۴ را ببینید. حال بینیم چگونه انتقال موازی یک میدان برداری Y در امتداد یک

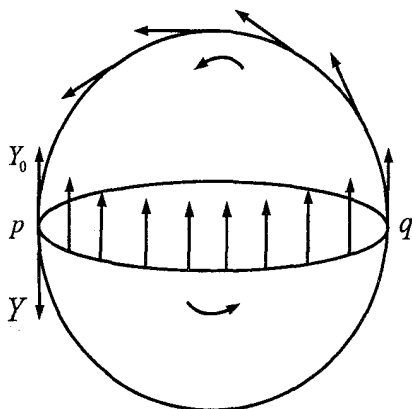


شکل ۲.۳: انتقال موازی یک بردار در طول یک منحنی در دو حالت مختلف: الف. انتقال موازی میدان برداری مماس بر ژئودزیک. ب. انتقال موازی میدان برداری دلخواه.

منحنی در روی منیفلد M با انتقال موازی آن در امتداد همان منحنی به عنوان زیرمجموعه IR^n تفاوت دارد. فرض کنیم میدان برداری Y از نقطه p تا نقطه q در امتداد دایره عظیمه افقی به طور موازی انتقال داده شود. سپس از نقطه q تا نقطه p در امتداد دایره عظیمه عمودی به طور مماسی انتقال موازی داده شود آنگاه در نقطه p جهت آن با جهت اولیه Y ، به اندازه 180° درجه اختلاف دارد، در صورتیکه اگر انتقال موازی Y در امتداد همان منحنی به عنوان زیرمجموعه IR^n انجام می شد، Y بر Y منطبق می شد. شکل ۳.۳ در صفحه ۶۵ را ببینید. این موضوع یعنی تفاوت بین انتقال موازی یک بردار در امتداد یک ژئودزیک در روی منیفلد M با انتقال موازی آن بردار در امتداد همان منحنی به عنوان زیرمجموعه ای از IR^n که به طور جبری تغییرات Y در امتداد میدان برداری انتگرال X آن منحنی $\nabla_X Y$ است منجر به پیدایش تعریفی در هندسه به نام انحنا گردید. این مفهوم در فصل بعد مورد مطالعه قرار می گیرد.

تمرین ۱.۵.۳. در فضای اقلیدسی، انتقال موازی یک بردار بین دو نقطه، به منحنی که آن دو نقطه را به هم وصل می کند بستگی ندارد. با یک مثال نشان دهید که این مسئله ممکن است در حالت کلی برای یک منیفلد ریمانی دلخواه برقرار نباشد.

مثال ۲.۵.۳. نشان دهید که هر انتقال موازی در طول یک منحنی پاره ای هموار روی یک منیفلد ریمانی یک ایزومتري است.



شکل ۳.۳: تفاوت انتقال موازی یک بردار در امتداد یک منحنی در روی منیفلد M با انتقال موازی آن در امتداد همان منحنی به عنوان زیرمجموعه $\mathbb{R}^n$.

اثبات. فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی بوده و $C : I \rightarrow M$ یک منحنی پاره ای هموار روی آن باشد. اگر $P : T_{C(t)}M \rightarrow T_{C(t)}M$ ، یک انتقال موازی در طول ژئودزیک C باشد، آنگاه انتقال موازی در طول C به این صورت تعریف می شود.

$$P_* : T_{C(t)}M \rightarrow T_{C(t)}M,$$

$$P_* V \mapsto V.$$

که در آن $P_* V \in T_{C(t)}M$ برداری باشد که توسط انتقال موازی V روی C بدست آمده است. یعنی اگر X میدان برداری انتگرال C باشد، $\nabla_X V = 0$.

فرض کنیم که $\{e_i(t)\}$ یک پایه متعامد یکه برای $T_{C(t)}M$ باشد. در این صورت $g(e_i(t), e_j(t)) = \delta_{ij}$ سپس $\{e_i(t)\}$ را به طور موازی در طول منحنی C انتقال داده نشان می دهیم که به ازای هر t ، $\{e_i(t) = P_* e_i(t)\}$ نیز یک پایه متعامد یکه برای

$T_{e(t)}M$ است. بنابر خاصیت سازگاری با متریک چون $\nabla_X P_* e_i(t.) = 0$ داریم

$$\begin{aligned}\nabla_X g(e_i(t), e_j(t)) &= \nabla_X g(P_* e_i(t.), P_* e_j(t.)), \\ &= g(\nabla_X P_* e_i(t.), P_* e_j(t.)) + g(P_* e_i(t.), \nabla_X P_* e_j(t.)) = \\ & \text{لذا با توجه به شرط اولیه } \delta_{ij}, g(e_i(t.), e_j(t.)) = \delta_{ij} \text{ به ازای هر } t, \text{ داریم} \\ & \delta_{ij}. \text{ از آنجا هر بردار } V \text{ در طول } C \text{ را می توان به صورت } V = v^i e_i \text{ نوشت، که در آن} \\ & e_i(t) = P_* e_i(t.). \text{ حال نداشت } P \text{ را در نظر می گیریم و شرط ایزومتري بودن آن را} \\ & \text{تحقیق می کنیم.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g_{C(t.)}(P_* V., P_* W.) &= g_{C(t.)}(P_* v^i e_i(t.), P_* w^j e_j(t.)) \\ &= g_{C(t.)}(v^i P_* e_i(t.), w^j P_* e_j(t.)), \\ &= g_{P(C(t.))}(v^i e_i(t), w^j e_j(t)) = g_{P(C(t.))}(V, W).\end{aligned}$$

□ لذا انتقال موازی P یک ایزومتري است.

از مثال فوق همچنین می توان تمرین زیر را نتیجه گرفت.

تمرین ۳.۵.۳. فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی باشد. نشان دهید اگر یک پایه یکه قائم را به طور موازی در طول یک منحنی ژئودزیک انتقال دهیم آنگاه این پایه همچنان یکه و قائم باقی می ماند.

راهنمایی. این تمرین بیان دیگری از مثال ۲.۵.۳ است. کافی است مشابه مثال فوق نشان دهیم که حاصلضرب هر زوج از اعضای پایه در طول این منحنی برابر δ_{ij} است.

تمرین زیر قضیه ای مشهور در هندسه است.

تمرین ۴.۵.۳. فرض کنیم M یک منیفلد ریمانی و φ و ψ دو ایزومتري از M به خودش باشد. اگر $p \in M$ موجود باشد بقسمی که $\psi(p) = \varphi(p)$ و $d\psi(p) = d\varphi(p)$ آنگاه

$$\psi \equiv \varphi$$

راهنمایی. از معادلات دیفرانسیل جزئی درجه اول به شرح زیر استفاده کنید. برای هر میدان برداری دلخواه $X \in \mathcal{X}(M)$ داریم

$$\begin{cases} d\varphi(X) = X\varphi, \\ d\psi(X) = X\psi, \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \frac{\partial \psi}{\partial x^i}. \quad (19.3)$$

تمرین ۵.۵.۳. در تمرین ۴.۴.۳ در صفحه ۵۸ با نیم صفحه بالایی و فضای پوانکاره آشنا شدیم. حال فرض کنید $V. = (0, 1)$ یک بردار مماس در نقطه $(0, 1)$ از $\mathbb{R}_+^2$ باشد. $V. = (0, 1)$ یک بردار یکه روی محور y ها با مبدأ در $(0, 1)$ است. فرض کنید $V(t)$ انتقال موازی $V.$ در طول منحنی $x = t, y = 1$ باشد. نشان دهید $V(t)$ با محور y ها زاویه t می سازد. (در جهت ساعتگرد)

راهنمایی. کافی است از خاصیت موازی بودن $V(t)$ در طول $\gamma(t) = (t, 1)$ استفاده کنیم. چنانچه موفق به حل کامل تمرین نشدید، به فصل پایانی کتاب مراجعه کنید.

۶.۳ مشتق همگرد میدان های تانسوری

با استفاده از تعریف مشتق گیری همگرد یک میدان برداری، به شرح زیر، تعریف مشتق همگرد ۱-فرم $\omega \in \Omega^1(M)$ در راستای $X \in \mathcal{X}(M)$ را بدست می آوریم. می دانیم اثر ω بر Y یعنی $\omega(Y) = \omega_i Y^i$ یک تابع حقیقی روی M است، لذا با استفاده از تعریف $\nabla_X f = Xf$ و دستور لایبنیتز برای $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$ و $\forall \omega \in \Omega^1(M)$ داریم

$$\nabla_X(\omega(Y)) = X.(\omega(Y)) = \nabla_X \omega(Y) + \omega(\nabla_X Y).$$

از آنجا مقدار $\nabla_X \omega$ را بدست آورده آن را به عنوان تعریف مشتق همگرد میدان ۱-فرم ω به صورت زیر بیان می کنیم.

تعریف ۱.۶.۳. فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر و (x, U) یک کارت در همسایگی نقطه p باشد. اگر $\omega = \omega_i(dx^i)$ یک میدان ۱-فرم روی M باشد، آنگاه مشتق همگرد ω در راستای $X \in \mathcal{X}(M)$ را با $\nabla_X \omega$ نمایش داده به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\nabla_X \omega(Y) = X.(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y), \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M), \omega \in \Omega^1(M). \quad (20.3)$$

در اینجا ω یک میدان ۱-فرم $(\cdot)$ روی M است و $\nabla_X \omega$ یک میدان تانسوری $(\dot{\cdot})$ روی M است که مولفه‌ها و صورت موضعی آن به ترتیب توسط روابط زیر داده می‌شوند.

$$\nabla_i \omega_k = \partial_i \omega_k - \Gamma_{ik}^j \omega_j,$$

$$\nabla_X \omega = X^i (\partial_i \omega_k - \Gamma_{ik}^j \omega_j) dx^k.$$

مشتق همگرد یک ۱-فرم.

رابطه اخیر را مشتق همگرد ω (صورت موضعی) در راستای X می‌نامیم. اگر فرض را بر آن بگذاریم که ∇_X در دستور لایبنتیزی حاصلضرب تانسوری دو تانسور از درجه دلخواه T, S به شرح زیر صدق می‌کند،

$$\nabla_X (T \otimes S) = \nabla_X T \otimes S + T \otimes \nabla_X S, \quad \forall X \in \mathcal{X}(M), \forall T, S \in \bigotimes_q^l (M). \quad (21.3)$$

آنگاه با استفاده از این خاصیت می توان تعریف مشتق همگرد هر تانسور از درجه دلخواه در راستای X را بدست آورد.

تعریف ۲.۶.۳. فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر و (x, U) یک کارت در همسایگی یک نقطه از M باشد. اگر S یک میدان تانسوری از نوع $\binom{l}{q}$ روی M باشد، آنگاه مشتق همگرد $\nabla_X S$ در راستای $X \in \mathcal{X}(M)$ یک میدان تانسوری از نوع $\binom{l}{q+1}$ است که $\forall Y_i \in \mathcal{X}(M)$ و $\forall \omega^i \in \Omega^1(M)$ توسط رابطه زیر تعریف می شود.

$$\begin{aligned} (\nabla_X S)(\omega^1, \dots, \omega^l, Y_1 \dots Y_q) &= X(S(\omega^1, \dots, \omega^l, Y_1 \dots Y_q)) \\ &+ \sum_{j=1}^l S(\omega^1, \dots, \nabla_X \omega^j, \dots, \omega^l, Y_1 \dots Y_q) \\ &- \sum_{i=1}^q S(\omega^1, \dots, \omega^l, Y_1, \dots, \nabla_X Y_i, \dots, Y_q) \end{aligned} \quad (22.3)$$

اگر مشتق گیری همگرد در طول یک منحنی باشد آنگاه فرمول بالا به صورت زیر نوشته می شود.

$$\begin{aligned} \left(\frac{DS}{dt}\right)(\omega^1, \dots, \omega^l, Y_1 \dots Y_q) &= \frac{d}{dt}(S(\omega^1, \dots, \omega^l, Y_1 \dots Y_q)) \\ &+ \sum_{j=1}^l S(\omega^1, \dots, \frac{D\omega^j}{dt}, \dots, \omega^l, Y_1 \dots Y_q) \\ &- \sum_{i=1}^q S(\omega^1, \dots, \omega^l, Y_1, \dots, \frac{DY_i}{dt}, \dots, Y_q) \end{aligned} \quad (23.3)$$

مثال ۳.۶.۳. اگر S یک میدان تانسوری از نوع $\binom{0}{2}$ باشد، آنگاه مشتق همگرد $\nabla_X S$ در راستای $X \in \mathcal{X}(M)$ یک میدان تانسوری از نوع $\binom{0}{3}$ است که به ازای هر $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ توسط رابطه زیر تعریف می شود.

$$(\nabla_X S)(Y, Z) = X.S(Y, Z) - S(\nabla_X Y, Z) - S(Y, \nabla_X Z).$$

برای مشاهده مثالی دیگر از مشتق گیری همگرد از یک میدان تانسوری یا کاربردی از فرمول های ۲۲.۳ یا ۲۳.۳ می توانید مثال ۸.۱۰۴ در صفحه ۹۰ را ببینید.

اگر S یک میدان تانسوری از نوع $\binom{l}{q}$ باشد، آنگاه مشتق همگرد $\nabla_X S$ در راستای $X \in \mathcal{X}(M)$ در مختصات موضعی (x, U) به صورت زیر داده می شود.

$$\begin{aligned} \nabla_k S_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_l} = & \partial_k S_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_l} + \Gamma_{kt}^{a_1} S_{b_1 \dots b_q}^{ta_2 \dots a_l} + \dots + \Gamma_{kt}^{a_l} S_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_{p-1} t} \\ & - \Gamma_{kb_1}^t S_{tb_2 \dots b_q}^{a_1 \dots a_l} - \dots - \Gamma_{kb_q}^t S_{b_1 \dots b_{q-1} t}^{a_1 \dots a_l} \end{aligned} \quad (24.3)$$

۱.۶.۳ یکرختی موسیقیای

ارتباط بین یک تانسور و دوگان آن توسط یک یکرختی برقرار می گردد که آن را یکرختی موسیقیای می نامیم. در درس منیفلد ۱ در بخش تانسور ها دیدیم که هر تانسور از نوع $\binom{l}{p}$ مانند $t: E \times \dots \times E \times E^* \rightarrow \mathbb{R}$ می توان توسط یک نگاشت چند خطی مانند $\tilde{t}$ معرفی نمود، که در آن $\tilde{t}: E \times \dots \times E \rightarrow E$ و بر عکس. (بخش ۴.۴ از کتاب منیفلد ۱ را ببینید [۲]). ارتباط t به $\tilde{t}$ و عکس آن توسط دو یکرختی موسوم به یکرختی موسیقیایی^{۲۰} برقرار می گردد. علت استفاده از این نام گذاری شباهت عمل این یکرختی ها با علائم موسیقی شارپ (دیز)^{۲۱} یا فلات (بمول)^{۲۲} و خاصیت آنها است در زیر و بم کردن صدا در نوت های موسیقی، که در اینجا به مفهوم بالا و پایین بردن زیرنویسها، از این نام ها استفاده می شود. این دو یکرختی را به ترتیب با علائم $\sharp$ و $\flat$ نمایش می دهند.

در روی منیفلدهای ریمانی، وجود متریک ریمانی موجب می گردد تا وجود چنین ارتباطی بین هر بردار و دوگان آن همیشه برقرار گردد. به عنوان مثال می دانیم به هر میدان ۱- فرم $\omega = \omega_i dx^i$ یک میدان برداری دوگان X وابسته می گردد که ارتباط آنها توسط

^{۲۰} musical(musiqual) isomorphism

^{۲۱}sharp(dieze)

^{۲۲}flat(berñol)

$\omega_i = g_{ij} X^j$ معرفی می گردد. این عمل یعنی $\omega : X \rightarrow X^b = \omega$ به وضوح یک یکرختی است. لذا یکرختی b اندیس هارا پایین می آورد و یکرختی معکوس آن یعنی $\omega^\# : \omega \rightarrow \omega^\# = X$ اندیس هارا بالا می برد. مولفه های $\omega^\#$ در مختصات موضعی عبارتند از،

$$(\omega^\#)^i = X^i = g^{ij} \omega_j. \quad (25.3)$$

تمرین ۴.۶.۳. فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی همراه با التصاق لوی چپ ویتا ∇ باشد.

الف. نشان دهید که یکرختی های موسیقایی $\#$ و b با التصاق لوی چپ ویتا جابجا^{۲۳} می شوند، یعنی نشان دهید همواره داریم، $\nabla b = b \nabla$ و $\nabla \# = \# \nabla$. راهنمایی. از خاصیت سازگاری با متریک ∇ استفاده کنید.

ب. نشان دهید که یکرختی $\#$ یک ضرب داخلی روی $T_p^* M$ به صورت زیر تعریف میکند^{۲۴}

$$\langle \omega, \pi \rangle = g^{ij} \omega_i \pi_j.$$

راهنمایی. از رابطه ۲۵.۳ و مولفه های معکوس متریک g استفاده کنید.

۲.۶.۳ مشتق همگرد کل

توضیحی که در مورد یکرختی موسیقایی داده شد، شرایط لازم برای مطرح نمودن تعریف مشتق همگرد کل را فراهم می آورد.

^{۲۳}commute with Riemannian connection.

^{۲۴}صفحه ۷۵ از [۴۶] را ببینید.

تعریف ۵.۶.۳. فرض کنیم ∇ یک التصاق خطی و S یک میدان تانسوری از نوع $\binom{l}{q}$ روی منیفلد دیفرانسیل پذیر M باشد. آنگاه نداشت ∇S که $\forall Y_i, X \in \mathcal{X}(M)$ و $\forall \omega^i \in \Omega^1(M)$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$\nabla S : \overbrace{\Omega^1(M) \times \dots \times \Omega^1(M)}^{l\text{-times}} \times \overbrace{\mathcal{X}(M) \times \dots \times \mathcal{X}(M)}^{(q+1)\text{-times}} \rightarrow C^\infty(M)$$

$$\nabla S(\omega^1, \dots, \omega^l, Y_1 \dots Y_q, X) = \nabla_X S(\omega^1, \dots, \omega^l, Y_1 \dots Y_q),$$

یک میدان تانسوری از نوع $\binom{l}{q+1}$ است که آن را مشتق همگرد کل^{۲۵} می نامند.

توضیح ۶.۶.۳. مشتق همگرد کل در اینجا همان نقش دیفرانسیل کل در $\mathbb{R}^n$ را دارد. به عنوان مثال اگر f یک تابع حقیقی باشد، مشتق همگرد کل آن یک ۱-فرم است.

توضیح ۷.۶.۳. فرض کنیم $f \in C^\infty(M)$ یک تابع حقیقی یا یک تانسور از نوع $\binom{0}{1}$ باشد، آنگاه مشتق همگرد کل، یک درجه به آن اضافه می کند، به عبارت دیگر ∇f یک میدان تانسوری از نوع $\binom{0}{2}$ است.

مثال ۸.۶.۳. الف) اگر $f \in C^\infty(M)$ باشد، ∇f همان df است. در حقیقت

$$\nabla f(X) := \nabla_X f = Xf = df(X)$$

که یک میدان تانسوری از نوع $\binom{0}{1}$ است.

ب) فرض کنیم $Y = Y^i \partial_i$ یک میدان برداری یا در حالت کلی یک میدان تانسوری از نوع $\binom{1}{0}$ باشد، آنگاه ∇Y یک میدان تانسوری از نوع $\binom{1}{1}$ است. زیرا بنا بر تعریف

$$\nabla Y = \nabla_X Y = (X^i \partial_i Y^k + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k) \partial_k = (\partial_i Y^k + Y^j \Gamma_{ij}^k) \partial_k \otimes dx^i.$$

برای اینکه احتمال اشتباه نرود مشتق کل را در مختصات موضعی با “;” نمایش می دهیم. به این معنی که اگر Y^i مولفه های یک میدان برداری یا در حالت کلی یک میدان تانسوری

^{۲۵}total covariant derivative

از نوع $\binom{1}{\cdot}$ باشد، آنگاه ∇Y دارای مولفه های $Y_{;i}^k$ است. در حقیقت

$$\nabla Y = Y_{;i}^k \partial_k \otimes dx^i$$

$$Y_{;i}^k = \partial_i Y^k + Y^j \Gamma_{ij}^k$$

تعریف ۹.۶.۳. مشتق کل دوم یک میدان تانسوری از نوع $\binom{1}{\cdot}$ یک میدان تانسوری از

نوع $\binom{2}{\cdot}$ است که آن را هسین همگرد یا هسین^{۲۶} می نامند و با نماد $\nabla^2 f = \nabla \nabla f$ نمایش می دهند.

تمرین ۱۰.۶.۳. نشان دهید که هسین هر تابع $f \in C^\infty(M)$ به ازای هر $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ در رابطه زیر صدق می کند.

$$\nabla^2 f(X, Y) = Y(Xf) - (\nabla_Y X)f.$$

راهنمایی. دو بار از تعریف استفاده کنید. چنانچه موفق نشدید به فصل آخر این کتاب مراجعه نمایید.

تمرین ۱۱.۶.۳. هرگاه ∇ یک التصاق خطی روی M و T تانسور تاب باشد. ثابت کنید ∇ متقارن است اگر و تنها اگر هسیان همگرد $\nabla^2 f$ از هر تابع هموار $f \in C^\infty(M)$ یک ۲-تانسور متقارن باشد.

راهنمایی. از تعریف التصاق خطی متقارن استفاده کنید. چنانچه موفق نشدید به فصل آخر این کتاب مراجعه نمایید.

۷.۳ مشتق لی و میدان های برداری همدیس و متجانس

در درس منیفلد ۱ با مفهوم مشتق لی، تعبیر هندسی و قضایای مربوطه کاملاً آشنا شده ایم. در این بخش رابطه بین مشتق لی و مشتق همگرد را مورد مطالعه قرار می دهیم. برای

^{۲۶}covariant Hessian

جزئیات بیشتر می توانید به مراجع [۲]، [۴۶] [۵۶] و [۷۷] مراجعه کنید.

تعریف ۱۰.۷.۳. فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی و $X, X_i \in \mathcal{X}(M)$ باشند.

- الف) اگر S یک میدان تانسوری از نوع $\binom{p}{p}$ باشد، آنگاه مشتق لی S در امتداد یک میدان برداری X به صورت زیرتعریف می شود.

$$(\mathcal{L}_X S)(X_1, \dots, X_p) = (\nabla_X S)(X_1, \dots, X_p) + \sum_{i=1}^p S(X_1, \dots, X_{i-1}, \nabla_{X_i} X, \dots, X_p). \quad (26.3)$$

- ب) میدان برداری X را میدان همدیس کیلینگ، میدان همدیس یا تبدیل بینهایت کوچک همدیس^{۲۷} گوئیم اگر $\mathcal{L}_X g = 2\rho g$ که در آن $\rho \in C^\infty(M)$.

- ج) میدان برداری X را میدان متجانس کیلینگ، میدان متجانس یا تبدیل بینهایت کوچک متجانس^{۲۸} گوئیم اگر در رابطه $\mathcal{L}_X g = 2\rho g$ تابع ρ ثابت باشد.

- د) میدان برداری X را میدان کیلینگ یا ایزومتري^{۲۹} گوئیم اگر $\mathcal{L}_X g = 0$.
لذا می توان گفت که یک میدان برداری X کیلینگ نامیده می شود اگر به ازای هر $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ نگاشت مربوط به گروه موضعی ۱-پارامتری وابسته به آن $\varphi(t.): U \subset M \rightarrow M$ ایزومتري باشد.

اگر S یک میدان تانسوری از نوع $\binom{q}{p}$ باشد، آنگاه مشتق لی S در امتداد یک میدان برداری X در کارت (x, U) به صورت موضعی زیر نوشته می شود. برای جزئیات بیشتر

^{۲۷}conformal killing, conformal vector field or infinitesimal conformal transformation

^{۲۸}homothetic killing, homothetic vector field or infinitesimal homothetic transformation

^{۲۹}killing vector field, isometric vector field or infinitesimal isometry

می توانید به مراجع [۲]، [۲۵]، [۲۹]، [۶۳] و [۷۷] مراجعه کنید.

$$(\mathcal{L}_X S)_{b_1 \dots b_p}^{a_1 \dots a_q} = X^i \partial_i S_{b_1 \dots b_p}^{a_1 \dots a_q} + \sum_{t=1}^p S_{b_1 \dots i \dots b_p}^{a_1 \dots a_q} \partial_{b_t} X^i - \sum_{t=1}^q S_{b_1 \dots b_p}^{a_1 \dots i \dots a_q} \partial_i X^{a_t}. \quad (27.3)$$

مثال ۲.۷.۳. اگر S یک میدان تانسوری از نوع $(\dot{p})$ باشد، آنگاه مشتق لی $\mathcal{L}_X S$ در راستای $X \in \mathcal{X}(M)$ یک میدان تانسوری از همان نوع یعنی $(\dot{p})$ است که مولفه های آن توسط رابطه زیر داده می شوند.

$$(\mathcal{L}_X S)_{ji}^h = X^k \partial_k S_{ji}^h + S_{ti}^h \partial_j X^t + S_{jt}^h \partial_i X^t - S_{ji}^t \partial_t X^h.$$

تمرین ۳.۷.۳. با ذکر یک مثال $Y \in \mathcal{X}(M)$ نشان دهید که اگر چه همواره $\nabla_Y g = 0$.

تمرین ۴.۷.۳. فرض کنیم (x, U) یک کارت در همسایگی نقطه p و g تانسور متریک ریمان روی M باشد.

• الف) نشان دهید فرمول مشتق گیری همگرد g را می توان به صورت زیر نوشت.

$$\nabla_X g(Y, Z) = X.g(Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z).$$

مشتق گیری همگرد از متریک.

• ب) نشان دهید که در همسایگی نقطه p با کارت موضعی (x, U) این فرمول را می توان به صورت موضعی زیر نوشت.

$$\nabla_k g_{ji} = \partial_k g_{ji} - \Gamma_{kj}^t g_{ti} - \Gamma_{ki}^t g_{jt}. \quad (28.3)$$

• (ج) نشان دهید که سازگاری با متریک معادل است با $\nabla_X g = 0$.

تمرین ۵.۷.۳. اگر $C(t)$ یک منحنی دلخواه و $\omega = \omega_i(dx^i)$ یک ۱-فرم روی M باشد، نشان دهید فرمول مشتق گیری همگرد را می توان در همسایگی نقطه p با کارت موضعی (x, U) به صورت گسترده زیر نوشت.

$$\frac{D\omega}{dt} = \left(\frac{d\omega_i}{dt} - \Gamma_{jk}^i \omega_j \frac{dx^k}{dt} \right) dx^i.$$

مشتق گیری همگرد از یک ۱-فرم در طول منحنی.

تمرین ۶.۷.۳. فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی باشد.

الف) نشان دهید

$$(\mathcal{L}_X g)(Y, Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

(۲۹.۳)

ب) رابطه اخیر را به صورت موضعی بنویسید.

(ج) نشان دهید میدان برداری X یک میدان کیلینگ است اگر و تنها اگر گروه موضعی یک پارامتری وابسته به آن، از تبدیلات ایزومتري موضعی تشکیل شده باشد.

(د) کره S^2 با متریک القایی $\mathbb{R}^3$ را در نظر گرفته نشان دهید میدان های برداری $x^i \partial_j - x^j \partial_i$ به ازای مقادیر $i, j = 1, 2$ میدان های کیلینگ هستند.

تمرین ۷.۷.۳. فرض کنیم X یک میدان برداری کیلینگ روی منیفلد ریمانی همبند M

باشد. فرض کنید نقطه $q \in M$ موجود باشد بقسمی که $X(q) = 0$ و $\nabla_Y X(q) = 0$

برای هر $Y(q) \in T_p M$ ثابت کنید $X \equiv 0$.

راهنمایی. از این خاصیت که گروه موضعی ۱- پارامتری از دیفئومورفیسم های $\{\varphi_t\}$ وابسته به X ایزومتري هستند. استفاده کرده نشان دهید $\left. \frac{d}{dt}(\varphi_t(q)) \right|_{t=s} = 0$. با استفاده از فرض و خاصیت تاب آزادی ثابت کنید $d\varphi_t$ به t بستگی ندارد. سپس از تمرین ۴.۵.۳ استفاده کنید. سعی کنید این تمرین را با اطلاعات داده شده حل کنید. چنانچه مشکل ادامه یافت به فصل آخر کتاب مراجعه کنید.

تمرین ۸.۷.۳. فرض کنید (M, g) یک منیفلد ریمانی و $X \in \mathcal{X}(M)$ باشد. همچنین فرض کنید $p \in M$ و $U \subset M$ یک همسایگی p و نیز $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times U \rightarrow M$ گروه موضعی ۱- پارامتری وابسته به میدان برداری X باشد. (یعنی یک نگاشت دیفرانسیل پذیر باشد به طوری که به ازای هر $q \in U$ منحنی $t \rightarrow \varphi(t, q)$ مسیر منحنی انتگرال X گذرنده از q در $t = 0$ باشد.)

الف) آنگاه یک میدان برداری خطی روی $\mathbb{R}^m$ ، که توسط یک ماتریس A تعریف می شود ، کیلینگ است اگر و تنها اگر A پادمتقارن باشد.

ب) فرض کنید X یک میدان برداری دیفرانسیل پذیر روی M و $f : M \rightarrow N$ یک ایزومتري باشد. فرض کنید Y یک میدان برداری روی N باشد که با ضابطه

$$Y(f(p)) = df_p(X(p)), p \in M$$

تعریف شده است. آنگاه میدان Y یک میدان برداری کیلینگ است اگر و تنها اگر میدان X یک میدان برداری کیلینگ باشد.

ج) X کیلینگ است اگر و تنها اگر

$$\forall Y, Z \in \mathcal{X}(M), \quad \langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle \nabla_Z X, Y \rangle = 0$$

د) فرض کنید X یک میدان کیلینگ روی M باشد که $X(q) \neq 0, q \in M$.

آنگاه یک دستگاه مختصات $(x_1, \dots, x_n)$ در یک همسایگی از q وجود دارد به طوری که ضرایب g_{ij} در این دستگاه مختصات به x_n بستگی ندارند.

راهنمایی. چنانچه در حل کامل این تمرین دچار مشکل شدید، می توانید به فصل آخر این کتاب مراجعه کنید.

تمرین ۹.۷.۳. فرض کنیم X یک میدان برداری کیلینگ روی منیفلد ریمانی M باشد و نگاشت $A_X : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ بصورت زیر تعریف شود

$$Z \in \mathcal{X}(M) \quad A_X(Z) = \nabla_Z X.$$

تابع $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ را توسط رابطه زیر تعریف می کنیم

$$q \in (M) \quad f(q) = \langle X, X \rangle_q.$$

هرگاه $p \in M$ یک نقطه بحرانی f باشد یعنی $df_p = 0$ در اینصورت برای هر $Z \in \mathcal{X}(M)$ و در نقطه p ثابت کنید:

(الف)

$$\langle A_X(Z), X \rangle(p) = 0.$$

$$\langle A_X(Z), A_X(Z) \rangle(p) = \frac{1}{4} Z_p(Z \langle X, X \rangle) - \langle R(X, Z)X, Z \rangle(p) \quad \text{ب)}$$

راهنمایی. چنانچه در حل این تمرین دچار مشکل شدید، می توانید به فصل آخر این کتاب مراجعه کنید.

انحنای ریمان

در این فصل به بیان روش هایی می پردازیم که تفاوت بین یک منیفلد M با فضای اقلیدسی را آشکار می کند. یکی از بهترین روشها برای تعیین این تفاوت آن است که ببینیم آیا M می تواند بطور موضعی با $\mathbb{R}^n$ ایزومتریک باشد؟ و یا اینکه ببینیم چه نگاشت های تحت ایزومتري ها پایا هستند. اولین کسی که یک چنین کمیت با ارزشی را در هندسه کشف کرد گاوس^۱ بود. این نگاشت بعدها به نام انحنای گاوسی معروف گردید. پس از او یکی دیگر

^۱Gauss Friedrich Carl ریاضیدان، فیزیکدان و منجم آلمانی ۱۷۷۷-۱۸۵۵.

از نگاشت های پایا تحت ایزومتري ها توسط ريمان^۲ تعريف گرديد. اين نگاشت بعدها به نام تانسور انحناي ريمان مشهور شد.

وجود ايزومتريهائي که يك منیفلد را پایا نگاه می دارد بحث جالب روز، در مرزهای دانش هندسه است. اين مبحث را در بخش ۵.۴ در صفحه ۱۰۹ از همین فصل بخوانید.

در مقدمه اين فصل قصد داریم به بيان اين دو کميت مهم در هندسه پرداخته روند طبیعی پيدایش آن رامورد مطالعه قرار دهيم. اين عمل می تواند الگویی در ذهن خواننده بيافريند که راهگشای پیشرفت تحقیقات در هندسه باشد و کمترین بهره آن اين است که بدانيم چرا اين مفاهيم نسبتا پیچیده را در کلاس درس می آموزيم.

الف. انحناي گاوس. در دروس حسابان مقدماتی فراگرفتيم که انحنا منحنی چیست و چگونه تعريف می شود. مرحله بعد تعريف انحناي رویه است که با استفاده از انحنا منحنی به صورت زیر بيان می شود. انحناي یک رویه در هر نقطه در درس هندسه دیفرانسیل توسط دو عدد معرفی می شود که آنها را **انحنای اصلی**^۳ می نامند. ما در اینجا یک دستورالعمل غیررسمی برای محاسبه آنها بکار می بریم. فرض کنید S رویه ای در $\mathbb{R}^3$ باشد، $p \in S$ و N یک بردار یکه قائم بر S در نقطه p باشد.

۱. صفحه ای مانند π که نقطه p گذشته و شامل N باشد در نظر می گیریم، اشتراک π و S یک منحنی مسطح γ است که از نقطه p می گذرد.

۲. انحناي علامت دار k_N در نقطه $p \in \gamma$ را محاسبه می کنیم.

۳. اين کار را برای تمام صفحات قائم π تکرار می کنیم.

انحنای اصلی در نقطه p عبارتست از مینیم و ماگزیم انحنای علامت دار که آنها را k_1 و k_2 نمایش می دهیم.

^۲Riemann Bernhard Friedrich Georg ریاضیدان آلمانی ۱۸۲۶-۱۸۶۶.

^۳principle curvatures

به عنوان مثال انحنای اصلی صفحه عبارتند از $k_1 = 0$, $k_2 = 0$ و انحنای اصلی نیم استوانه $k_1 = 0$, $k_2 = 1$ است. مثال دیگر کره‌ای به شعاع R است هر صفحه قائم که شامل N باشد کره را در دایره عظیمه قطع می‌نماید و دارای انحنای $\pm \frac{1}{R}$ است (علامت آن مربوط است به انتخاب بردار قائم N که به سمت داخل یا خارج کره باشد) لذا انحنای اصلی کره به هر حال برابر $k_1 = k_2 = \pm \frac{1}{R}$ می‌باشد.

اگرچه انحنای اصلی خواص زیادی از رویه S را برای ما مشخص می‌کند، اما بطور مستقیم جواب مورد نظر ما را در مورد اینکه چه خواصی از رویه ذاتی هستند نمی‌دهد. یک خاصیت رویه را خاصیت ذاتی^۴ گوئیم اگر توسط نگاشت های ایزومتری پایا باشد. اگر بخواهیم ایزومتری ها را به طور شهودی معرفی کنیم باید بگوئیم نگاشت هایی هستند که مانند تغییر شکل یک برگ کاغذ عمل می کنند یعنی نمی توان آن را مانند ورقه لاستیکی کش داد و یا قیچی کرد.

برای اینکه ببینیم که انحنای اصلی دارای خاصیت ذاتی نیستند، یعنی تحت ایزومتری ها تغییر می کنند، رویه های S_1 و S_2 را در $\mathbb{R}^3$ به صورت زیر در نظر می گیریم:

S_1 بخشی از صفحه xy است به طول π که در آن $-\frac{\pi}{4} < y < +\frac{\pi}{4}$ و S_2 نیمه استوانه زیر است.

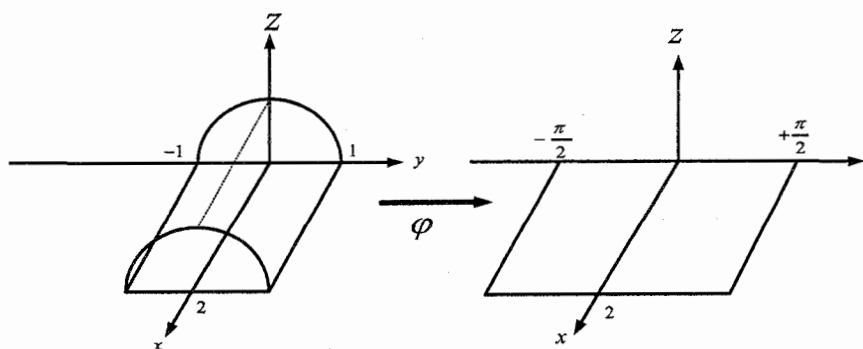
$$S_2 = \{(x, y, z) : y^2 + z^2 = 1, z > 0, -1 < y < 1, 0 < x < 2\}$$

در مورد رویه S_1 انحنای اصلی $k_1 = k_2 = 0$ ، زیرا منحنی های مورد نظر خطوط راست هستند. در مورد رویه S_2 به راحتی می توان دید که انحنای اصلی S_2 عبارتند از $k_1 = 0$ و $k_2 = 1$. اگرچه نگاشت دیفئومورفیسم φ که به صورت زیر تعریف می شود ایزومتری بوده، و طول منحنی ها را ثابت نگاه داشته است. این نگاشت نیم-صفحه S_1 را به روی نیم-استوانه S_2 منطبق می کند.

$$\varphi: (x, y, 0) \rightarrow (x, \cos y, \sin y)$$

^۴ intrinsic property

بنابراین انحناهای اصلی دارای خاصیت ذاتی نیستند. اگر چه انحناهای اصلی دارای خاصیت ذاتی نیستند، اما گاوس در سال ۱۸۲۷ کشف جالبی نمود مبنی بر اینکه ترکیبی از انحناهای گاوسی دارای خاصیت ذاتی است. او ثابت کرد $K = k_1 \cdot k_2$ دارای خاصیت ذاتی است. برای او این خاصیت بسیار متحیرکننده بود که آن را قضیه باهیت کلی^۵ نامید. از آن پس حاصلضرب انحناهای اصلی یعنی K را /انحنای گاوسی رویه نامیدند. به عنوان مثال انحنای گاوسی صفحه $K = k_1 k_2 = 0$ و انحنای گاوسی نیم استوانه $K = k_1 k_2 = 0$ است. مثال دیگر کره‌ای به شعاع R دارای انحناهای اصلی $\pm \frac{1}{R}$ است لذا انحنای گاوسی کره به هر حال برابر $K = \frac{1}{R^2}$ می‌باشد که همواره مثبت است.



شکل ۱.۴: انحنای گاوسی یک خاصیت ذاتی است که توسط ایزومتري φ پایا است.

رویه‌های مدل^۶ در نظریه رویه‌ها، رویه‌هایی هستند که دارای انحنای گاوسی ثابت هستند مانند صفحه، کره و هذلولی.^۷

- رویه‌های کاسه‌ای شکل و گنبدی شکل دارای انحنای گاوسی مثبت هستند.

^۵theorema Egregium

^۶Model space of surfaces

^۷plane or hyperbolic

• صفحه دارای انحنای گاوسی صفر است.

• رویه‌های زینی یا هذلولوی شکل دارای انحنای گاوسی منفی هستند.

ب. انحنای ریمان. ریمان برای تعریف یکی دیگر از نگاشت‌های پایا تحت ایزومتري‌ها از تفاوت خاصیت تعویض ترتیب مشتق‌گیری دوم همگرد در $\mathbb{R}^n$ و M استفاده نمود. به عبارت ساده در $\mathbb{R}^n$ اگر تابعی از کلاس C^2 باشد می‌توانیم ترتیب مشتق‌گیری دوم آن تابع را تعویض کنیم، بدون آنکه مقدار مشتق دوم تغییر کند. در حالی که خواهیم دید در روی منیفلد‌ها اینطور نیست. در حقیقت علت انتخاب مشتق دوم برای روشن شدن این تفاوت در خاصیت مهم صفر بودن مشتق دوم خط راست در $\mathbb{R}^n$ است. این تفاوت در تعویض ترتیب مشتق‌گیری میزان انحراف M را از مسطح بودن^۸ یا اصطلاحاً انحنای M را تعیین می‌کند. حال ببینیم چگونه این اتفاق برای یک تابع یا یک میدان برداری روی $\mathbb{R}^n$ می‌افتد.

فرض کنیم $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ تابعی با مقدار حقیقی روی $\mathbb{R}^n$ باشد. آنگاه ترتیب مشتق‌گیری دوم همگرد آن را تعویض می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\nabla_X \nabla_Y f - \nabla_Y \nabla_X f &= \nabla_X(Yf) - \nabla_Y(Xf) \\ &= X(Yf) - Y(Xf) = [X, Y]f = \nabla_{[X, Y]}f\end{aligned}$$

براحتی مشاهده می‌شود که رابطه فوق برای میدان‌های برداری Z روی $\mathbb{R}^n$ نیز برقرار است، زیرا در $\mathbb{R}^n$ علائم کریستوفل صفر بوده و $\nabla_X Y = X(Y)$. لذا داریم

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z = 0 \quad (۱.۴)$$

از آنجا که مقدار این عبارت عموماً روی منیفلدها صفر نمی‌شود، ریمان به این نتیجه رسید که صفر شدن این عبارت معیاری برای تفاوت بین یک منیفلد M با فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ است، و آن را تانسور انحنای نامید.

^۸flatness

۱.۴ انحنای ریمان

در این بخش به تعریف تانسورهای نوع اول و دوم ریمان پرداخته خواص آن را بررسی می کنیم.

تعریف ۱.۱.۴. فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی همراه با التصاق لوی چی ویتا ∇ باشد. نگاشت

$$R: \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M),$$

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \quad (2.4)$$

را انحنای ریمان یا تانسور انحنای ریمان^۹ می نامیم.

به راحتی می توان بررسی نمود که انحنای ریمان یک میدان تانسوری از نوع $\binom{1}{3}$ است که نسبت به دو متغیر اول پاد متقارن است. تمرین ۲.۱.۴ و رابطه (۸.۴) را ببینید.

تمرین ۲.۱.۴. الف. نشان دهید انحنای ریمان یک میدان تانسوری از نوع $\binom{1}{3}$ است. راهنمایی. کافیت نشان دهیم که R روی توابع $C^\infty(M)$ نسبت به هر سه متغیر X, Y, Z خطی $C^\infty(M)$ است. یعنی در شرایط $R(fX, Y)Z = fR(X, Y)Z$ و $R(X + X', Y)Z = R(X, Y)Z + R(X', Y)Z$ صدق می کند.

ب. نشان دهید تانسور انحنای ریمان $R(X, Y)Z$ نسبت به دو متغیر اول پاد متقارن است.

راهنمایی. کافیت با استفاده از تعریف نشان دهیم $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$.

تانسور انحنای ریمان را می توان به صورت یک میدان تانسوری $\binom{2}{4}$ نیز تعریف نمود.

^۹Riemann curvature tensor

تعریف ۳.۱.۴. فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی باشد. حاصلضرب داخلی تانسور انحنای ریمان را با R_m نمایش داده آن را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$R_m(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle, \quad \forall X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M).$$

R_m را تانسور انحنای ریمان نوع دوم^{۱۰} یا برای سادگی در بیان، انحنای ریمان نیز می نامیم.

گزاره ۴.۱.۴. (خواص انحنای ریمان) فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی و R_m تانسور انحنای ریمان (نوع دوم) آن باشد. آنگاه $\forall X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M)$ داریم.

$$R_m(X, Y, Z, W) = -R_m(Y, X, Z, W), \quad \bullet \text{ الف.}$$

$$R_m(X, Y, Z, W) = -R_m(X, Y, W, Z), \quad \bullet \text{ ب.}$$

$$R_m(X, Y, Z, W) = R_m(Z, W, X, Y), \quad \bullet \text{ ج.}$$

$$R_m(X, Y, Z, W) + R_m(Y, Z, X, W) + R_m(Z, X, Y, W) = 0. \quad \bullet \text{ د.}$$

رابطهٔ اخیر را اتحاد اول بیانچی می نامیم.^{۱۱}

اثبات. الف. با استفاده از تعریف داریم

$$R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$$

از آنجا چون $R_m(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle$ اثبات حکم الف کامل می شود.

ب. کافی است $\forall Z \in \mathcal{X}(M)$ نشان دهیم $R_m(X, Y, Z, Z) = 0$ ، از آنجا با تجزیه

^{۱۰}Riemann curvature of second kind

^{۱۱}Bianchi identity

عبارت $\bullet = R_m(X, Y, Z + W, Z + W)$ به جمع چهار عبارت، دو عبارت آن صفر شده رابطه ب از آن نتیجه می شود. اما برای اثبات $\bullet = R_m(X, Y, Z, Z)$ از سازگاری با متریک استفاده نموده و عملیات مقدماتی زیر را انجام می دهیم.

$$X \langle Y, Z \rangle = \nabla_X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle,$$

$$\begin{aligned} Y|Z|^2 &= Y \langle Z, Z \rangle = \langle \nabla_Y Z, Z \rangle + \langle Z, \nabla_Y Z \rangle \\ &= 2 \langle \nabla_Y Z, Z \rangle. \end{aligned}$$

با اثر X روی عبارت اخیر داریم

$$\begin{aligned} X.Y|Z|^2 &= 2X \langle \nabla_Y Z, Z \rangle \\ &= 2 \langle \nabla_X \nabla_Y Z, Z \rangle + 2 \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z \rangle, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} Y.X|Z|^2 &= 2Y \langle \nabla_X Z, Z \rangle \\ &= 2 \langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z \rangle + 2 \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z \rangle, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$[X, Y]|Z|^2 = 2 \langle \nabla_{[X, Y]} Z, Z \rangle. \quad (5.4)$$

از ضرب ۱- در رابطه (۴.۴) و (۵.۴) و جمع آنها با رابطه (۳.۴) سمت چپ تساوی برابر صفر شده و سمت راست تساوی برابر تانسور انحنای نوع دوم $\bullet = R_m(X, Y, Z, W)$ است. با استفاده از این رابطه اثبات حکم ب کامل می شود.

ج. ابتدا حکم د. را اثبات می کنیم. سه بار از رابطه تعریف (۲.۴) به شکل دوری استفاده نموده آنها را با هم جمع می کنیم. با انجام عملیات مقدماتی داریم

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y \\ = [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = \bullet. \end{aligned} \quad (6.4)$$

تساوی دوم در رابطه (۶.۴) را اتحاد ژاکوبی می نامیم. (رجوع شود به کتاب مینفلد ۱ [۲].) با استفاده از رابطه (۶.۴) و ضرب داخلی W اثبات حکم د کامل می شود. ج. ابتدا با تغییر دوری X, Y, Z, W در رابطه د. چهار رابطه بدست می آید که با جمع آنها و استفاده از الف. و ب. با انجام عملیات مقدماتی داریم

$${}_2R_m(X, Z, W, Y) + {}_2R_m(Y, W, X, Z) = 0.$$

از این رابطه اثبات حکم ج. کامل می شود. $\square$

۱.۱.۴ انحنا در مختصات موضعی.

صورت موضعی قضیه بالا را می توان به شکل زیر بیان نموده انحنای ریمان را بدست آورد.

نتیجه ۵.۱.۴. اگر مولفه های تانسور انحنا نوع دوم R_m را با R_{ijkl} نمایش دهیم، آنگاه از الف. و ب. نتیجه می شود که مولفه های تانسور R_m نسبت به زیرنویس های اول و دوم و همچنین نسبت به زیرنویس های سوم و چهارم پادمتقارن هستند. از ج. نتیجه می شود تعویض دو زیرنویس اول و دوم با دو زیرنویس سوم و چهارم تاثیری در مولفه های تانسور R_m ندارد. بالاخره رابطه د. که به اتحاد بیانچی مشهور است بیان می دارد که جمع حاصل از تغییر دوری سه مولفه اول اول تانسور R_m برابر صفر است. این خواص تانسور انحنا ریمان را می توان در مولفه های آن نیز مشاهده کرد.

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} \quad \bullet \text{ الف.}$$

$$R_{ijkl} = -R_{ijlk} \quad \bullet \text{ ب.}$$

$$R_{ijkl} = R_{klij} \quad \bullet \text{ ج.}$$

$$R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0 \quad \bullet \text{ د. (اتحاد اول بیانچی یا اتحاد ریچی)}$$

اگر مولفه های تانسور انحناى نوع اول را با R_{ijk}^s نمایش دهیم، آنگاه ارتباط آن با مولفه های تانسور انحناى نوع دوم با توجه به تعریف توسط $R_{ijkl} = g_{ls} R_{ijk}^s$ بیان می گردد. هنگام نگارش تانسورانحنا به صورت موضعی باید توجه داشت که ترتیب قرار گرفتن اندیس هاو بالا یا پائین بودن آنها مهم است و می تواند در کتب مختلف با یک علامت منفی متفاوت باشد. این تفاوت ناشی از ترتیب قرار گرفتن میدان های برداری در تعریف R_m است.

لم ۶.۱.۴. فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی همراه باضرایب التصاق لوی چی ویتا Γ_{ij}^k باشد. آنگاه R_{ijkl} مولفه های تانسور انحناى R_m رامی توان به صورت زیر نوشت.

$$R_{ijk}^t = (\partial_i \Gamma_{jk}^t + \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^t - \partial_j \Gamma_{ik}^t - \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^t), \quad (۷.۴)$$

$$R_{ijkl} = g_{tl} R_{ijk}^t.$$

اثبات. اگر $\{\partial_i\}$ پایه ای برای $T_p M$ باشد، داریم $X = X^i \partial_i, Y = Y^i \partial_i$. حال به دلیل خطی بودن R_m کافی است مقدار $R_m(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l)$ را محاسبه کنیم.

$$\begin{aligned} < R(\partial_i, \partial_j) \partial_k, \partial_l > = < \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} \partial_k - \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i} \partial_k - \nabla_{[\partial_i, \partial_j]} \partial_k, \partial_l >, \\ &= < \nabla_{\partial_i} (\Gamma_{jk}^s \partial_s) - \nabla_{\partial_j} (\Gamma_{ik}^s \partial_s), \partial_l >, \\ &= < (\nabla_{\partial_i} \Gamma_{jk}^s \partial_s + \Gamma_{jk}^s \nabla_{\partial_i} \partial_s) - (\nabla_{\partial_j} \Gamma_{ik}^s \partial_s + \Gamma_{ik}^s \nabla_{\partial_j} \partial_s), \partial_l >, \\ &= < (\partial_i \Gamma_{jk}^s \partial_s + \Gamma_{jk}^t \Gamma_{is}^t \partial_t) - (\partial_j \Gamma_{ik}^s \partial_s + \Gamma_{ik}^t \Gamma_{js}^t \partial_t), \partial_l >. \end{aligned}$$

حال با یکسان سازی پایه ها داریم:

$$R_{ijkl} = < R(\partial_i, \partial_j) \partial_k, \partial_l >$$

$$= < (\partial_i \Gamma_{jk}^t + \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^t - \partial_j \Gamma_{ik}^t - \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^t) \partial_t, \partial_l > .$$

حال با توجه به $R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R_{ijk}^l \partial_l$ و $R_{ijkl} = g_{tl} R_{ijk}^t$ ، $\langle \partial_l, \partial_t \rangle = g_{tl}$ مولفه های تانسور انحنای نوع اول بدست می آید.

$$R_{ijk}^t = (\partial_i \Gamma_{jk}^t + \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^t - \partial_j \Gamma_{ik}^t - \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^t)$$

□

مولفه های تانسور انحنای نوع اول را می توان با استفاده از یک کارت موضعی و همریختی های موسیقایی به صورت زیر نوشت.

$$R(X_1, X_2, X_3, X_4^\#) = R_{ijk}^l dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \partial_l(X_1, X_2, X_3, X_4^\#), \quad (۸.۴)$$

که در آن $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathcal{X}(M)$ و $X_4^\#$ دوگان میدان برداری X_4 است. ضرایب R_{ijk}^l یا مولفه های تانسور ریمان نیز طبق معمول تعریف تانسورها با جایگذاری اعضای پایه $R_{ijk}^l = R(\partial_i, \partial_j, \partial_k, dx^l)$ بدست می آیند. انحنای نوع دوم R_m یک میدان تانسوری از نوع $\binom{1}{4}$ است که نسبت به دو متغیر اول پاد متقارن بوده مولفه های این تانسور را می توان با استفاده از یک کارت موضعی به صورت $R_{ijkl} = g_{lt} R_{ijk}^t$ نوشت. این عبارت در حقیقت صورت موضعی ضرب داخلی در تعریف انحنای نوع دوم است.

۲.۱.۴ منیفلد مسطح

گفتیم که ریمان یک تانسور انحنای معرفتی کرد که تحت ایزومتري هاپایا است. این تانسور تعیین کننده آن است که تا چه اندازه یک منیفلد می تواند خمیده باشد یا به عبارت دیگر چه اندازه به $\mathbb{R}^n$ از نظر ایزومتريک بودن نزدیک است. منیفلد ریمانی (M, g) را **مسطح** یا **تخت** می گوئیم اگر به طور موضعی با $\mathbb{R}^n$ ایزومتريک باشد.

حال فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی مسطح باشد. بنا بر تعریف یک ایزومتري

موضعی مانند φ بین M و $\mathbb{R}^n$ وجود دارد.

$$\varphi : (M, g) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \bar{g}), \quad \varphi^* \bar{g} = g$$

در رابطه (۱۰۴) دیدیم که در $\mathbb{R}^n$ تانسور انحنا ی ریمان صفر است و از انجا تانسور انحنا ی نوع اول و نوع دوم ریمان صفر می شود. لذا اگر M مسطح باشد تانسور انحنا ی ریمان آن برابر صفر می شود. می توان نشان داد که عکس این موضوع نیز صحت دارد. قضیه ۷.۱۰۴. یک منیفلد ریمانی مسطح است اگر و تنها اگر تانسور انحنا ی ریمان آن برابر صفر باشد.

اثبات. برای اثبات [۵۶] صفحه ۱۱۹ را ببینید.

در مثال زیر با نحوه مشتق گیری همگرد از تانسورها و خصوصا تانسور انحنا بیشتر آشنا می شویم.

مثال ۸.۱۰۴. فرض کنیم که M یک منیفلد ریمانی و R_m تانسور انحنا ی آن باشد. فرض کنیم که منحنی $M \rightarrow [0, l] : \gamma$ یک ژئودزیک روی M و $X \in \mathcal{X}(M)$ یک میدان برداری باشد بقسمی که $X(\gamma(\cdot)) = 0$.

الف) نشان دهید مشتق همگرد تانسور انحنا ی $R_m(\gamma', X, \gamma', Z)$ برای هر $V \in \mathcal{X}(M)$ به صورت زیر نوشته می شود.

$$\begin{aligned} (\nabla_V R_m)(\gamma', X, \gamma', Z) = & V.R_m(\gamma', X, \gamma', Z) - \\ & R_m(\gamma', \nabla_V X, \gamma', Z) - R_m(\gamma', X, \gamma', \nabla_V Z). \end{aligned} \quad (9.4)$$

ب) نشان دهید

$$\nabla_{\gamma'}(R(\gamma', X)\gamma')(\cdot) = (R(\gamma', \frac{D}{dt}X)\gamma')(\cdot). \quad (10.4)$$

اثبات. الف) کافی است مشتق همگرد $\nabla_V R_m$ را برای هر $V \in \mathcal{X}(M)$ از رابطه (۲۲.۳) در صفحه ۶۹ محاسبه کنیم.

$$\begin{aligned} (\nabla_V R_m)(\gamma', X, \gamma', Z) &= V.R_m(\gamma', X, \gamma', Z) - R_m(\nabla_V \gamma', X, \gamma', Z) \\ &\quad - R_m(\gamma', \nabla_V X, \gamma', Z) - R_m(\gamma', X, \nabla_V \gamma', Z) \\ &\quad - R_m(\gamma', X, \gamma', \nabla_V Z). \end{aligned}$$

اگر مقدار عبارت $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$ را که برای ژئودزیک ها برقرار است در رابطه فوق جایگزین کنیم، رابطه (۹.۴) نتیجه می شود.

ب) برای هر $Z \in \mathcal{X}(M)$ چون در $t = 0$ داریم $X(\gamma(0)) = 0$ می توان نوشت

$$(\nabla_{\gamma'} R)(\gamma', X, \gamma', Z) = 0.$$

حال از رابطه (۹.۴) استفاده می کنیم. برای هر $Z \in \mathcal{X}(M)$ می توان نوشت

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_{\gamma'} R_m)(\gamma', X, \gamma', Z) \\ &= \gamma'.R_m(\gamma', X, \gamma', Z) - R_m(\gamma', \nabla_{\gamma'} X, \gamma', Z) - R_m(\gamma', X, \gamma', \nabla_{\gamma'} Z). \end{aligned}$$

با فرض $X' = \frac{D}{dt} X$ و استفاده از تعریف تانسور انحنای برای $R_m(\gamma', X, \gamma', Z)$ داریم

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \langle R(\gamma', X) \gamma', Z \rangle - \langle R(\gamma', X') \gamma', Z \rangle \\ &\quad - \langle R(\gamma', X) \gamma', Z' \rangle. \end{aligned} \quad (11.4)$$

از طرف دیگر داریم

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle R(\gamma', X) \gamma', Z \rangle &= \langle \nabla_{\gamma'} (R(\gamma', X) \gamma'), Z \rangle \\ &\quad + \langle R(\gamma', X) \gamma', Z' \rangle. \end{aligned}$$

با جایگذاری این مقدار در رابطه (۱۱.۴) در نقطه $t = 0$ نتیجه می شود

$$\langle \nabla_{\gamma'}(R(\gamma', X)\gamma'), Z \rangle = \langle R(\gamma', X')\gamma', Z \rangle.$$

چون این رابطه برای هر $Z \in \mathcal{X}(M)$ دلخواه برقرار است در نتیجه داریم

$$\nabla_{\gamma'}(R(\gamma', X)\gamma') = (R(\gamma', X')\gamma').$$

لذا در نقطه $t = 0$ رابطه حکم برقرار است. $\square$

۲.۴ انحناى برشی^{۱۲}

مقدمه. دیدیم که انحناى گاوس خواص جالبی دارد و برای تعیین خصوصیات یک رویه ۲-بعدی شاخص بسیار جالبی است. حال ببینیم چگونه می توان انحناى گاوس را برای منیفلدهای با ابعاد بالاتر تعریف نمود. فرض کنیم M یک منیفلد n بعدی، $p \in M$ و π یک زیرفضای ۲-بعدی از $T_p M$ باشد. می توان نشان داد که خانواده ژئودزیک های گذرنده از نقطه $p \in M$ و مماس بر زیرفضای ۲-بعدی π تشکیل یک رویه ۲-بعدی می دهد. انحناى گاوسی این رویه ۲-بعدی به انتخاب پایه $X, Y \in T_p M$ برای صفحه π بستگی ندارد و یک خاصیت ذاتی است. (لم ۲.۲.۴ را ببینید.) لذا انحناى گاوسی این رویه ۲-بعدی را انحناى برشی منیفلد M در نقطه $p \in M$ می نامیم و آن را با $K(\pi)$ نمایش می دهیم.

در لم شور^{۱۳} ثابت می شود که اگر انحناى گاوسی به صفحه π بستگی نداشته باشد آنگاه در تمام نقاط ثابت است. اثبات لم شور با استفاده از مختصات نرمال امکان پذیر است و در فصل زیر منیفلدها آورده شده است.

^{۱۲}Sectional curvature

^{۱۳}Schur

اهمیت انحنای برشی در منیفلدها مانند اهمیت انحنای گاوسی در رویه ها به منظور یافتن تعبیر هندسی آنها است. همچنین اهمیت دیگر انحنای برشی در منیفلدها آن است که انحنای برشی یک منیفلد کاملاً انحنای ریمانی آن را نتیجه می دهد. (لم ۳.۲.۴ در صفحه ۹۴ و تمرین ۴.۲.۴ در صفحه ۹۶ را ببینید.)

تعریف ۱.۲.۴. فرض کنیم M یک منیفلد n بعدی، $p \in M$ و $X, Y \in T_p M$ پایه هایی دلخواه از یک زیرفضای ۲-بعدی π از $T_p M$ باشد. آنگاه عدد

$$K(\pi) = K(X, Y) = \frac{R_m(X, Y, Y, X)}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2}. \quad (12.4)$$

را انحنای برشی یا انحنای مقطعی π در نقطه p می نامیم.

اگر $\{X, Y\}$ پایه متعامد یک باشد آنگاه $\langle X, Y \rangle = 0$ و $\langle X, X \rangle = \langle Y, Y \rangle = 1$ لذا داریم

$$K(\pi) = K(X, Y) = R_m(X, Y, Y, X).$$

انحنای برشی در فرم موضعی به صورت زیر نوشته می شود.

$$K(X, Y) = \frac{R_{ijkl} X^i Y^j Y^k X^l}{g_{ij} X^i X^j g_{ij} Y^i Y^j - (g_{ij} X^i Y^j)^2}.$$

لم ۲.۲.۴. فرض کنید π یک زیرفضای ۲-بعدی از فضای مماس $T_p M$ باشد و $X, Y \in \pi$ دو بردار مستقل خطی باشند آنگاه انحنای برشی $K(X, Y)$ مستقل از انتخاب بردارهای $X, Y \in \pi$ است.

اثبات. می دانیم هر پایه $\{X', Y'\}$ از π را می توانیم بر حسب ترکیب خطی از پایه $\{X, Y\}$ از π بنویسیم. به عنوان مثال ترکیب خطی $X' = X + \lambda Y$ و $Y' = Y$ را در نظر گرفته گزاره را برای آن ثابت می کنیم ترکیبات خطی دیگر نیز به شکل مشابه بررسی

می شود. با توجه به خواص خطی انحنا و ضرب خارجی داریم

$$\begin{aligned} K(X', Y') &= \frac{R(X + \lambda Y, Y, Y, X + \lambda Y)}{\langle X + \lambda Y, X + \lambda Y \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X + \lambda Y, Y \rangle^2} \\ &= K(X, Y). \end{aligned}$$

□ به آسانی مشاهده میکنیم که K توسط این تبدیلات خطی ثابت می ماند.

می خواهیم در لم زیر نشان دهیم که انحنا برشی یک منیفلد کاملاً انحنا ریمانی آن را نتیجه می دهد.

لم ۳.۲.۴. فرض کنید V یک فضای برداری به بعد $n \geq 2$ با ضرب داخلی $\langle, \rangle$ باشد. فرض کنید R_m و $R_{m'}$ دو تانسور $(\ddot{)}_2$ باشند که در شرایط تقارن الف، ب، ج، د. از گزاره ۴.۱.۴ صدق کنند. اگر برای هر زوج از بردارهای مستقل خطی $X, Y \in V$ داشته باشیم

$$\frac{R_m(X, Y, Y, X)}{|X|^2 |Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2} = \frac{R_{m'}(X, Y, Y, X)}{|X|^2 |Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2},$$

آنگاه $R_m = R_{m'}$.

اثبات. با توجه به فرض مشاهده میکنیم که $R_m(X, Y, Y, X) = R_{m'}(X, Y, Y, X)$ برای هر $X, Y \in V$. باید نشان دهیم که به ازای هر $X, Y, Z, W \in V$ داریم $R_m(X, Y, Z, W) = R_{m'}(X, Y, Z, W)$. فرض کنیم به ازای هر $X, Y, Z, W \in V$ بنا بر فرض به ازای هر $\mathcal{R} = R_m(X, Y, Z, W) - R_{m'}(X, Y, Z, W)$ ، $\mathcal{R}(X, Y, Y, X) = 0$ داریم $X, Y \in V$ برای اثبات کافی است نشان دهیم که به ازای هر $X, Y, Z, W \in V$ داریم $\mathcal{R} = 0$. به ازای هر $X, Y, Z \in V$ چون R نیز

دارای خواص تقارن است داریم

$$\begin{aligned} \bullet &= \mathcal{R}(X+Y, Z, Z, X+Y) \\ &= \mathcal{R}(X, Z, Z, X) + \mathcal{R}(X, Z, Z, Y) \\ &\quad + \mathcal{R}(Y, Z, Z, X) + \mathcal{R}(Y, Z, Z, Y) \\ &= 2\mathcal{R}(X, Z, Z, Y). \end{aligned}$$

با توجه به رابطه $\bullet = \mathcal{R}(X, Z, Z, Y)$ داریم

$$\begin{aligned} \bullet &= \mathcal{R}(X, Z+W, Z+W, Y) \\ &= \mathcal{R}(X, Z, Z, Y) + \mathcal{R}(X, Z, W, Y) \\ &\quad + \mathcal{R}(X, W, Z, Y) + \mathcal{R}(Z, W, W, Y) \\ &= \mathcal{R}(X, Z, W, Y) + \mathcal{R}(X, W, Z, Y). \end{aligned}$$

از آنجا نتیجه می شود $\mathcal{R}(X, Z, W, Y) = -\mathcal{R}(X, W, Z, Y)$. لذا نسبت به هر زوج از اندیسهای همجوار پادمتقارن است. حال با توجه به خاصیت د. یا اتحاد بیانچی داریم

$$\begin{aligned} \bullet &= \mathcal{R}(X, Y, Z, W) + \mathcal{R}(Y, Z, X, W) + \mathcal{R}(Z, X, Y, W) \\ &= \mathcal{R}(X, Y, Z, W) - \mathcal{R}(Y, X, Z, W) - \mathcal{R}(X, Z, Y, W) \\ &= 3\mathcal{R}(X, Y, Z, W). \end{aligned}$$

از آنجا به ازای هر $X, Y, Z, W \in V$ داریم

$$R_m(X, Y, Z, W) = R_{m'}(X, Y, Z, W).$$

لم بالا را می توان به صورت تمرین زیر نیز بیان نمود.

تمرین ۴.۲.۴. نشان دهید که انحنای ریمانی یک منیفلد رامی توان بر حسب انحنای برشی آن به صورت زیر نوشت.

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle =$$

$$\begin{aligned} & K(X + W, Y + Z) - K(X + W, Y) - K(X + W, Z) \\ & - K(X, Y + Z) - K(W, Y + Z) + K(X, Z) + K(W, Y) \\ & - K(Y + W, X + Z) + K(Y + W, X) + K(Y + W, Z) \\ & + K(Y, X + Z) + K(W, X + Z) - K(Y, Z) - K(W, X). \end{aligned}$$

لذا انحنای ریمانی یک منیفلد می تواند انحنای برشی آن را به طور کامل ارائه نماید. راهنمایی. با جایگذاری مستقیم از تعریف انحنای برشی و استفاده از گزاره ۴.۱.۴ نتیجه حاصل می شود.

تعریف ۵.۲.۴. فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی باشد. می گوئیم M با انحنای ثابت است اگر انحنای برشی K در تمام نقاط $p \in M$ ثابت باشد.

ثابت می شود که کره S^n با متریک القایی از $\mathbb{R}^n$ یک فضای با انحنای ثابت $K = 1$ است.

لم ۶.۲.۴. فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی با انحنای ریمانی R_m باشد. به ازای هر $p \in M$ و $X, Y, Z, W \in T_p M$ تانسور R'_m از نوع $(\ddagger)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$R'_m(X, Y, Z, W) = \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle Y, W \rangle \langle X, Z \rangle,$$

آنگاه M دارای انحنای برشی ثابت K است اگر و تنها اگر $R_m = K \cdot R'_m$.

اثبات. فرض کنیم $\forall X, Y, Z, W \in T_p M$ داشته باشیم

$$R_m(X, Y, Z, W) = K \cdot R'_m(X, Y, Z, W).$$

اگر در رابطه اخیر به جای میدان های Z و W به ترتیب میدان های Y و X را قرار دهیم بنا بر تعریف R'_m داریم

$$R_m(X, Y, Y, X) = K \cdot (< X, X > < Y, Y > - < X, Y >^2).$$

اگر این رابطه را بر عبارت $< X, X > < Y, Y > - < X, Y >^2$ تقسیم کنیم بنا بر تعریف انحنای برشی داریم $K = K$.

برای اثبات عکس لم فرض کنیم به ازای هر صفحه $\pi \subset T_p M$ در $p \in M$ دارای انحنای برشی ثابت $K(p, \pi) = K$ باشد. به راحتی مشاهده می شود که R'_m در شرایط گزاره ۴.۱.۴ در صفحه ۸۵ صدق می کند. از طرف دیگر به ازای هر زوج $X, Y \in T_p M$ داریم

$$R'_m(X, Y, Y, X) = < X, X > < Y, Y > - < X, Y >^2$$

لذا با جایگذاری در رابطه تعریف (۱۲.۴) داریم

$$R_m(X, Y, Y, X) K = K \cdot R'_m(X, Y, Y, X) \quad \forall X, Y \in T_p M.$$

از رابطه اخیر بنابر گزاره ۳.۲.۴ در صفحه ۹۴ رابطه حکم نتیجه می شود.

$$R_m(X, Y, Z, W) = K \cdot R'_m(X, Y, Z, W) \quad \forall X, Y, Z, W \in T_p M.$$

□

نتیجه ۷.۲.۴. منیفلد ریمانی (M, g) با انحنای برشی ثابت K است اگر و تنها اگر تانسور انحنای ریمان در عبارت زیر صدق کند.

$$R_m(X, Y, Z, W) = K \cdot (< X, W > < Y, Z > - < Y, W > < X, Z >)$$

در این حالت، مولفه های تانسور انحنا ی ریمان روی کارت های موضعی عبارت است از

$$R_{ijkl} = K \cdot (g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}).$$

(۱۳.۴)

شرط لازم و کافی برای آنکه انحنا ی برشی ثابت باشد.

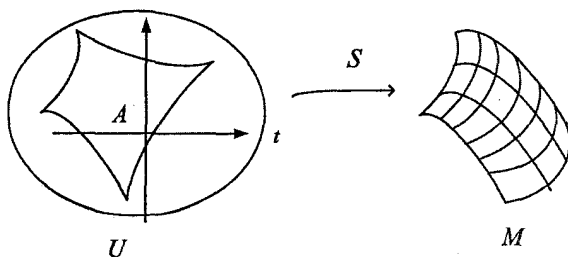
اثبات. رابطه اول مستقیماً از لم فوق نتیجه می شود و رابطه دوم با جایگذاری $\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l$ به ترتیب به جای X, Y, Z, W بدست می آید. □

فرض کنیم A یک زیر مجموعه همبند $\mathbb{R}^2$ بوده و مرز آن از یک منحنی پاره ای هموار تشکیل شده باشد. اگر یک همسایگی باز شامل A وجود داشته باشد که نگاشت S روی آن دیفرانسیل پذیر باشد، آنگاه نگاشت دیفرانسیل پذیر $M \rightarrow A \subset \mathbb{R}^2 : S$ را یک رویه پارامتری دیفرانسیل پذیر یا منتظم می نامیم. میدان برداری V در رویه دیفرانسیل پذیر M ، نگاشتی است که به هر $p \in A$ بردار $V_p \in T_{S(p)}M$ را وابسته می کند. میدان برداری V را دیفرانسیل پذیر گوئیم هر گاه مولفه های آن دیفرانسیل پذیر باشند. شکل ۲.۴ در صفحه ۹۹ را ببینید.

تمرین ۸.۲.۴. ثابت کنید که می توان برای هر میدان برداری V و پارامترهای (t, s) رابطه زیر را نوشت.

$$\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} V - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} V = R\left(\frac{D}{\partial s}, \frac{D}{\partial t}\right)V$$

راهنمایی. یک پایه $\{\partial_i\}$ برای $T_p M$ اختیار کنید. دوبار از فرمول مشتق همگرد و تعریف انحنا ی ریمان در این پایه استفاده نمایید. ریز کامل این محاسبات طولانی را می توانید در صفحه ۹۸ از کتاب [۴۵] بیابید.



شکل ۲.۴: ناحیه A محدود به چند منحنی پاره ای هموار، دامنه رویه پارامتری دیفرانسیل پذیر S را تشکیل می دهد.

۳.۴ انحناى ریچی و انحناى عددی^{۱۴}

تعریف ۱.۳.۴. فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی باشد. تانسور انحناى ریچی به ازای هر $X, Y \in T_p M$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$Ric(X, Y) := g^{il} \langle R(\partial_i, X)Y, \partial_l \rangle. \quad (۱۴.۴)$$

مولفه های تانسور انحناى ریچی که از انقباض^{۱۵} اندیس های اول و آخر (یا اثر ماتریس) تانسور انحناى ریمان بدست می آید، در مختصات موضعی معمولاً با R_{jk} نمایش داده می شود.

$$R_{jk} := g^{il} R_{ijkl}. \quad (۱۵.۴)$$

تمرین ۲.۳.۴. نشان دهید که تانسور انحناى ریچی متقارن بوده و آن رامی توان به صورت زیر نوشت.

$$R_{ij} = R_{kij}{}^k = -R_{ki}{}^k{}_j$$

^{۱۴}Ricci curvature and scalar curvature

^{۱۵}contraction

راهنمایی. از تعریف و نتیجه گزاره ۴.۱.۴ استفاده کنید.

تعریف ۳.۳.۴. فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی باشد. انحنای عددی یک تابع عددی است که برابر اثر تانسور ریچی $S := \text{tr Ric}$ و یا اثر ماتریس مربوط به $R_i^i := S$ است. مولفه های انحنای عددی که از انقباض اندیس های تانسور انحنای ریچی بدست می آید، در مختصات موضعی معمولاً با تابع $S = g^{jk} R_{jk}$ نمایش داده می شود.

اگر در منیفلد ریمانی (M, g) تانسور انحنای ریچی مضربی از تانسور متریک باشد آنگاه آن را منیفلد انیشتن^{۱۶} می‌گوییم. به عبارت دیگر اگر

$$\text{Ric}(X, Y) = \gamma \langle X, Y \rangle, \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M),$$

که در آن $\gamma : M \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع حقیقی مقدار است.

تمرین ۴.۳.۴. نشان دهید تعریف منیفلد های انیشتن را می توان به صورت موضعی $R_{jk} = \frac{S}{n} g_{jk}$ یا به صورت سرتاسری $\text{Ric} = \frac{S}{n} g$ نوشت. راهنمایی. فرض کنید $\text{Ric} = \alpha g$ یا در مختصات موضعی $R_{jk} = \alpha g_{jk}$ ، سپس با ضرب g^{ij} مقدار α را حساب کنید.

تمرین ۵.۳.۴. نشان دهید در منیفلد های انیشتن انحنای اسکالر در رابطه زیر صدق می کند.

$$\nabla_j S = 2 \nabla_i R_j^i \quad (۱۶.۴)$$

راهنمایی. از دومین اتحاد بیانچی استفاده کنید.

گزاره ۶.۳.۴. فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی همبند باشد و $\text{Ric}(X, Y) = \gamma \langle X, Y \rangle$ برای هر $X, Y \in \mathcal{X}(M)$

• الف) اگر (M, g) یک منیفلد انیشتین باشد و $n \geq 3$ ، در اینصورت γ روی M ثابت است.

• ب) اگر منیفلد (M, g) با بعد $n = 3$ یک منیفلد انیشتین باشد در اینصورت دارای انحنای برشی ثابت $\gamma/6$ است.

اثبات. الف) بنا بر فرض (M, g) انیشتین، همبند و از بعد $n \geq 3$ است. در اینصورت $Ric = \gamma g$ یا بعبارت دیگر $R_{ij} = \gamma g_{ij}$ پس داریم:

$$g^{ij} R_{ij} = \gamma g^{ij} g_{ij} \Rightarrow S = \gamma n \Rightarrow \gamma = \frac{S}{n}.$$

از طرفی بنا بر دومین اتحاد بیانچی داریم $\nabla_j S = 2 \nabla_l R_j^l$ در نتیجه

$$\nabla_j S = 2 \nabla_l R_j^l = 2 \nabla_l (g^{ml} \cdot \frac{S}{n} \cdot g_{mj}) = \frac{2}{n} \nabla_l (S \delta_j^l) = \frac{2}{n} \nabla_j S.$$

از آنجا داریم

$$(1 - \frac{2}{n}) \nabla_j S = 0.$$

چون $n \geq 3$ پس $\nabla_j S = 0$ چون M همبند است، S ثابت است و چون $\gamma = \frac{S}{n}$ پس γ نیز ثابت است. لذا فضا با انحنای ثابت است.

اثبات. ب) چون M^3 انیشتین است پس $R_{ij} = \gamma g_{ij}$ و طبق قسمت الف) γ یک تابع ثابت روی M است. از طرفی طبق لم ۶.۲.۴ می دانیم M انحنای برشی ثابت k دارد اگر و تنها اگر $R = k, R' = k$.

$$R_{ij} = R_{kij}^k = \delta_l^k R_{kij}^l = g^{kl} g_{ml} R_{kij}^m = g^{kl} R_{kilj} = \delta^{kl} R_{kilj} = \gamma \delta_{ij}.$$

(۱۷.۴)

از تساوی آخر نتیجه میشود

$$\delta^{kl} \delta_{kl} R_{kilj} = \gamma \delta_{kl} \delta_{ij} \Rightarrow 3 R_{kilj} = \gamma \delta_{kl} \delta_{ij}. \quad (۱۸.۴)$$

به همین روش نشان داده می شود

$${}^3R_{iklj} = \gamma \delta_{il} \delta_{kj}. \quad (19.4)$$

پس ${}^3R_{iklj} = -\gamma \delta_{il} \delta_{kj}$. اما $-R_{iklj} = R_{kijl}$ به این ترتیب خواهیم داشت

$$R_{kijl} = \frac{\gamma}{6} (\delta_{kl} \delta_{ij} - \delta_{il} \delta_{kj}). \quad (20.4)$$

پس طبق لم بالا انحناى برشى مقدار ثابت $\frac{\gamma}{6}$ را دارد و در نتیجه حکم ب ثابت می شود. $\square$

تمرین ۷.۳.۴. اگر منیفلد ریمانی (M, g) با انحناى برشى ثابت K باشد، نشان دهید

• الف. تانسور انحناى ریچی به صورت $Ric = (n - 1)K.g$ و در مختصات

موضعی به صورت $R_{ij} = (n - 1)K.g_{ij}$ نوشته می شود.

• ب. انحناى عددی به صورت $S = n(n - 1)K$ نوشته می شود.

راهنمایی. از رابطه (۱۳.۴) استفاده کنید.

تمرین ۸.۳.۴. منیفلد ریمانی (M, g) را موضعاً متقارن^{۱۷} گوئیم اگر تانسور انحناى ریمان در رابطه $\nabla R = 0$ صدق کند. فضاهای موضعاً متقارن مباحث بسیار جالبی در هندسه هستند، که در اینجا فقط به چند تمرین در مورد آنها اکتفا می کنیم. خوانندگان علاقه مند می توانند به کتاب [۴۹] مراجعه نمایند.

الف) فرض کنید M یک فضای موضعاً متقارن باشد و $\gamma : [0, l] \rightarrow M$ یک ژئودزیک روی M باشد. هرگاه X, Y, Z میدان های برداری موازی در طول خم γ باشند نشان دهید $R(X, Y)Z$ نیز یک میدان برداری موازی در طول γ است.

ب) هرگاه M موضعاً متقارن، همبند و از بعد ۲ باشد نشان دهید M انحناى برشى ثابت دارد.

^{۱۷}locally symmetric

ج) هرگاه M انحناى (برشى) ثابت داشته باشد در اينصورت M يك فضاى موضعاً متقارن است.

راهنمايى. الف) ثابت كنيد. $\nabla_{\gamma'} R(X, Y)Z = 0$. ب) ابتدا از تعريف نتيجه بگيريد انحناى ريمان ثابت است. ج) از رابطه ۱۳.۴ در صفحه ۹۷ استفاده كنيد. جواب هاى خود را با حل اين تمرين در فصل آخر مقايسه كنيد.

۴.۴ متریک های شبه ريمانی و مسئله فضا-زمان انیشتن

۱.۴.۴ متریک های شبه ريمانی

متریک های شبه ريمانی تعميمی از متریک های ريمانی هستند که از حذف شرط مثبت بودن در تعريف متریک های ريمانی پديد می آيند.

تعريف ۱.۴.۴. يك متریک شبه ريمانی روی يك مینفولد دیفرانسیل پذیر M ، در هر نقطه $p \in M$ ، يك فرم دوخطی متقارن ناتبهيگون $\langle \cdot, \cdot \rangle$ روی $T_p M$ است که به طور هموار نسبت به p تغيير می کند. در يك دستگاه مختصاتی مناسب (x, U) روی M می توان يك متریک شبه ريمانی را به صورت موضعی زیر نوشت.

$$g = -(dx^1)^2 - \dots - (dx^r)^2 + (dx^{r+1})^2 + \dots + (dx^n)^2,$$

که در آن عدد صحيح r را اندیس^{۱۸} متریک شبه- ريمانی می نامند.

تعريف ۲.۴.۴. می توان متریک شبه ريمانی را با يك دوتایی (r, q) به نام علامت^{۱۹} آن متریک معرفی کرد. در اينصورت r و q به ترتيب تعداد جملات منفي و تعداد جملات مثبت آن فرم دوخطی است. اگر مجموع اين دو عدد r و q از عدد n کمتر باشد، آنگاه

^{۱۸}index

^{۱۹}signature

فرم دوخطی را نیمه معین^{۲۰} می نامند. یک فرم دوخطی n متغیره را نیمه معین مثبت (به ترتیب منفی)^{۲۱} گوئیم اگر علامت آن $(r, 0)$ (به ترتیب $(0, r)$) باشد و $1 \leq r < n$ باشد.

متریک لورنتس یک متریک شبه ریمانی است که اندیس آن برابر یک است. متریک لورنتس مهمترین متریک شبه ریمانی است که در فیزیک کاربردهای زیادی دارد. تقریباً همه تعاریفی که تا کنون برای متریک های ریمانی آورده شده است برای یک متریک شبه ریمانی نیز به کار می روند، به جز تعاریفی که نیاز به مثبت معین بودن متریک $\langle \cdot, \cdot \rangle$ دارند. از بهترین کتاب هایی که در مورد متریک های شبه ریمانی نوشته شده است کتاب [۶۴] است که خوانندگان علاقه مند به این بحث را به آن ارجاع می دهیم. مشابه آنچه در قضیه اساسی هندسه ریمانی، مانند التصاق خطی، تاب آزادی، سازگاری با متریک و غیره دیدیم، در هندسه شبه ریمانی نیز قابل تعریف و اثبات است. قضیه اساسی هندسه شبه ریمانی به صورت زیر بیان شده، و به راحتی مشابه آنچه در روش به کار برده شده در اثبات قضیه اساسی هندسه ریمانی بیان گردید، قابل بررسی است.

گزاره ۳.۴.۴. یک متریک شبه ریمانی یکتا روی M وجود دارد که تاب آزاد و سازگار با متریک است.

اثبات. فرض کنیم $\langle \cdot, \cdot \rangle$ یک متریک شبه ریمانی روی منیفلد M باشد. $\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ تعریف می کنیم

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X Y, Z \rangle = & X \langle Y, Z \rangle + Y \langle X, Z \rangle - Z \langle X, Y \rangle \\ & + \langle [X, Y], Z \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle. \end{aligned}$$

^{۲۰} semidefinite

^{۲۱} semidefinite positive(negative)

با استفاده از این تعریف به آسانی روابط زیر به دست می آیند:

$$\langle \nabla_X fY - f\nabla_X Y - (X.f)Y, Z \rangle = 0.$$

$$\langle \nabla_{fX+gY} W - f\nabla_X W - g\nabla_Y W, Z \rangle = 0.$$

$$\langle \nabla_{fX} Y - f\nabla_X Y, Z \rangle = 0.$$

$$\langle \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], Z \rangle = 0.$$

با توجه به ناتبهاگون بودن متریک شبه ریمانی داریم:

$$\langle V, Z \rangle = 0, \forall Z \in \mathcal{X}(M) \iff V = 0.$$

بنابراین مشابه حالت التصاق ریمانی از روابط فوق نتیجه می شود که ∇ یک التصاق خطی روی M تعریف می کند که دارای تاب صفر است. همچنین با استفاده از نحوه تعریف ∇ دیده می شود که این التصاق به طور یکتا با متریک سازگار است. $\square$

بنابراین قضیه لوی چی ویتا برای التصاق های خطی روی منیفلدهای شبه ریمانی نیز برقرار است. این التصاق را التصاق شبه-ریمانی می نامیم. به همین صورت تقریباً تمام تعاریف و قضایای هندسه ریمانی به جز آنها که به مساله مثبت بودن متریک بستگی دارند، برای متریک های شبه-ریمانی تکرار می شوند.

گزاره ۴.۴.۴. یک متریک لورنتس روی $\mathbb{R}^{n+1}$ در همسایگی هر نقطه $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ در نظر می گیریم.

$$Q(x_0, \dots, x_n) = -(x_0)^2 + (x_1)^2 + \dots + (x_n)^2.$$

نشان دهید انتقال موازی متناظر با التصاق لوی چی ویتای وابسته به این متریک شبه ریمانی با انتقال موازی معمولی $\mathbb{R}^{n+1}$ مطابقت دارد.

اثبات. فرض کنیم $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ یک منحنی در $\mathbb{R}^{n+1}$ و V یک میدان برداری موازی در طول γ با توجه به التصاق لوی چی ویتای وابسته به متریک Q باشد. بنا بر تعریف $\nabla_{\gamma} V = 0$. اگر v^i مولفه های بردار V بوده و $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ ضرایب التصاق مذکور باشند، داریم

$$\frac{dv^k}{dt} + \tilde{\Gamma}_{ij}^k v^i \frac{d\gamma^j}{dt} = 0. \quad (21.4)$$

از طرف دیگر اگر مولفه های متریک Q را با $\tilde{g}_{ij}$ نشان دهیم با توجه به اینکه

$$\tilde{g}_{11} = -1, \quad \tilde{g}_{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad \tilde{g}_{ii} = 1, \quad i = 2 \dots n+1.$$

داریم $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = 0$ و رابطه (21.4) به شکل $\frac{dv^k}{dt} = 0$ نوشته می شود. پس V با در نظر گرفتن التصاق اقلیدسی نیز در طول γ موازی است. $\square$

از آنجا که ادامه این بحث از حوصله این کتاب خارج است، خوانندگان علاقه مند را به کتاب [۶۴] ارجاع می دهیم.

۲.۴.۴ پیدایش متریک انیشتن

منظور ما از طرح مساله متریک های شبه-ریمانی، پیدا کردن ریشه تعریف متریک های انیشتن در هندسه دیفرانسیل است. فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر g یک متریک ریمانی روی M باشد. n -فرم غیر صفر $dV = \sqrt{\det(g)} dx^1 \dots dx^n$ رایک عنصر حجم^{۲۲} روی M می نامیم. خانواده تمام متریک های ریمانی روی M با یک حجم مشخص را در نظر می گیریم. هیلبرت نشان داد که متریک های انیشتن نقاط بحرانی

^{۲۲} volume element

تابعی به نام انحنای عددی کل^{۲۳} روی فضای متریک های ریمانی با یک حجم مشخص روی M است که به صورت زیر تعریف می شود. کتاب منیفلدهای انیشتن [۲۳] قضیه ۲۱.۴ را ببینید.

$$S(g) = \int_M S dV$$

در اینجا S انحنای اسکالر مربوط به متریک ریمانی g است. از این تعریف همچنین نتیجه می شود که متریک های انیشتن به نوعی متریک های بهینه هستند که در خانواده تمام متریک های ریمانی روی M وجود دارند.

اما نام متریک انیشتن که در نظریه نسبیت عام^{۲۴} در فیزیک از آن یاد می شود مربوط به فضای ۴-بعدی موسوم به فضا-زمان است که در یک منیفلد چهار بعدی با یک متریک شبه ریمانی به نام متریک لورنتس^{۲۵} تعریف می شود. این تعریف با تعریفی که قبلا از فضای انیشتن داشتیم یک تفاوت اساسی دارد که در اینجا به شرح آن می پردازیم.

متریک شبه ریمانی لورنتس را یک متریک انیشتن گویم اگر تانسور ریچی مربوط به آن که از اثر تانسور ریمان بدست می آید در رابطه زیر موسوم به معادلات میدان انیشتن^{۲۶} صدق کند.

$$Ric - \frac{1}{4} Sg = T. \quad (۲۲.۴)$$

در این رابطه T یک تانسور متقارن از نوع $(\dot{)}_2$ است که معرف چگالی^{۲۷}، نیروی

^{۲۳}total scalar curvature

^{۲۴}general relativity

^{۲۵}Lorentz metric

^{۲۶}Einstein field equation

^{۲۷}density

حرکت لحظه ای^{۲۸}، تنش^{۲۹} ماده^{۳۰} و انرژی در هر نقطه از فضا-زمان است. در کتب فیزیک ثابت می شود که رابطه (۲۲.۴) معادله تغییرات یک تابع به نام تابع عمل هیلبرت^{۳۱}، در فضای تمام متریک های لورنتسی روی یک منیفلد ۴-بعدی است. به عنوان مثال می توانید کتاب [۵۰] را ببینید. لذا یک تعبیر واقع گرایانه فیزیکی از نظریه انیشتن را می توان اینطور عنوان نمود که یک متریک انیشتنی باید یک نقطه بحرانی برای تابع عمل هیلبرت در فضای تمام متریک های لورنتسی روی فضا-زمان ۴-بعدی باشد. در حالت خاص اگر $T = 0$ باشد رابطه (۲۲.۴) به رابطه

$$Ric_{ij} - \frac{1}{4} S g_{ij} = 0, \quad (23.4)$$

تبدیل می شود که آنرا معادله انیشتن در خلاء می نامیم. اما این معادله انیشتن در فیزیک یک اشکال اساسی برای ریاضیدانان دارد که نمی توان از آن به عنوان تعریف فضای انیشتن استفاده کرد. در حقیقت اگر طرفین رابطه (۲۳.۴) را در g^{ij} ضرب کنیم چون $n = 4$ است، از رابطه $g^{ij} g_{ik} = \delta^j_k$ نتیجه می شود که $S = 2S$ ، و در نتیجه $S = 0$ و از آنجا $Ric = 0$. در ابعاد دیگر نیز به غیر از حالت $n = 2$ همواره این مشکل تکرار می شود. لذا نمی توان از معادله انیشتن در خلاء برای تعریف فضای انیشتن در ریاضی استفاده نمود. در تمرین های بخش قبل دیدیم که تانسور ریچی در منیفلدهای انیشتنی که در هندسه ریمانی تعریف می شوند، در رابطه $Ric = \frac{S}{n} g$ صدق می کند. از مقایسه این رابطه با رابطه (۲۳.۴) تشابه ظاهری و تفاوت اساسی این دو تعریف مشخص می شود. باید یادآور شد که اهمیت متریک انیشتن در هندسه فقط به خاطر شباهت آن با تعریف فیزیکی فوق نیست، بلکه خاصیت انحنای ثابت بودن آن متریک نیز از خواص مهم آن است.

^{۲۸}momentum

^{۲۹}stress

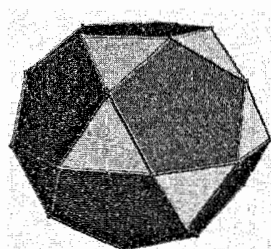
^{۳۰}matter

^{۳۱}Hilbert action functional

همانطور که قبلاً گفته شد هیلبرت ثابت نمود که متریک های انیشتن به نوعی متریک های بهینه هستند. اکبرزاده با استفاده از روش هیلبرت خانواده متریک های تعمیم یافته انیشتنی در فضای فینسلری^{۳۲} را تعریف نموده است. کتاب [۱۵] را ببینید. مطالعه خواص و کاربردهای متریک تعمیم یافته انیشتنی که در فضای فینسلر تعریف شده اند می تواند موضوع جالبی برای انجام تحقیقات به روز در مرزهای دانش باشد.

۵.۴ صلبیت یا استحکام منیفلدها

سؤال مهمی که همیشه در هندسه مطرح بوده و اخیراً نیز به عنوان یک موضوع روز تحقیقاتی بیشتر به چشم می خورد مسئله صلبیت یا استحکام^{۳۳} منیفلدها است. مسئله استحکام قبل از آنکه به عنوان یک مسئله هندسی مطرح شود یک مسئله مهندسی است که اولین بار توسط کوشی در سال ۱۸۱۳ مطرح گردید. وی ثابت می کند که اگر وجوح یک چند وجهی محدب از صفحات فلزی به جای آنکه به یکدیگر جوش داده شوند، توسط لولا به یکدیگر وصل شوند، چند وجهی همچنان استوار یا صلب باقی می ماند. مرجع مقاله کوشی در [۱۷] ذکر شده است.



شکل ۳.۴: استحکام یک چند وجهی محدب.

^{۳۲}generalized Einstein metrics

^{۳۳}rigidity

از نظر هندسی، یک جسم را صلب می نامیم، هرگاه انعطاف پذیر^{۳۴} باشد، یعنی قابلیت خم و راست شدن داشته باشد اما قابلیت ارتجاع^{۳۵} نداشته باشد، یعنی مانند یک ورق لاستیکی قابلیت کش آمدن نداشته باشد. به عبارت دیگر یک جسم را صلب می نامیم هرگاه تحت ایزومتريها پایا^{۳۶} باشد.

به عنوان مثال، در هندسه ریمانی، انحناى برشی^{۳۷} تحت ایزومتريها پایاست؛ یعنی یک فضای با انحناى برشی ثابت مثبت تحت یک ایزومتري به یک فضای با انحناى برشی ثابت مثبت برده می شود.

مسئله استحکام منیفلدها این سؤال را مطرح می کند که تحت چه شرایطی یک منیفلد با فضاهای مدل یعنی فضای اقلیدسی، کروی و یا هذلولوی، به طور موضعی ایزومتريک^{۳۸} است. اگر این ایزومتري به طور سرتاسری باشد،^{۳۹} آن را مسئله استحکام قوی^{۴۰} می نامند. برای بررسی مسئله استحکام یک منیفلد باید توابع یا تانسورهای بیابیم که توسط ایزومتريها یا تبدیلات دیگر پایا باشند. در گذشته با برخی از این گونه تانسورها آشنا شده ایم. به عنوان مثال در قضیه شار در کتاب [۲] دیدیم که هر میدان برداری را می توان در یک دستگاه مختصات موضعی با مولفه های $(0, \dots, 0, 1)$ به صورت $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$ نوشت. لذا می توان گفت که میدان های برداری به طور موضعی با یکدیگر معادلند یا به عبارت دیگر میدان های برداری پایای ایزومتريک هستند. به طور کلی اگر X میدان برداری مماس بر یک منحنی باشد آنگاه آن منحنی به عنوان منیفلد یک بعدی با $\mathbb{R}$ به طور موضعی ایزومتريک است.

^{۳۴} Flexible

^{۳۵} Elasticity

^{۳۶} Invariant

^{۳۷} Sectional curvature

^{۳۸} locally isometric

^{۳۹} globally isometric

^{۴۰} strong rigidity

برای جزئیات بیشتر تمرین ۵.۱.۱ در صفحه ۵ را ببینید. اما مسئله استحکام یک منیفلد در مرزهای دانش در مورد این است که ببینیم تحت چه شرایطی یک منیفلد با فضا های شناخته شده با انحنای برشی مثبت، منفی و یا صفر ایزومتریک است. در مورد مسئله استحکام منیفلدهای ریمانی فشرده موضوع تقریباً روشن شده است، به این معنی که ثابت شده است که منیفلدهای ریمانی فشرده با انحنای ثابت مثبت، منفی و صفر به ترتیب با فضای کروی، هذلولوی و اقلیدسی ایزومتریک هستند. برای اطلاعات دقیقتر در مورد اثبات این قضایا فصول بعدی را ببینید. در مورد استحکام منیفلدهای فینسلری فشرده با انحنای ثابت منفی و صفر به قضیه معروف اکبرزاده در [۱۵] و [۲۰] مراجعه نمایید. مسئله استحکام قوی منیفلدهای فینسلری فشرده با انحنای ثابت مثبت و ایزومتریک بودن آن با یک کره، توسط نگارنده در یک مقاله مشترک انجام شده است. به مراجع [۱۸]، [۲۶] و [۲۸] مراجعه نمایید.

آنالیز روی منیفلد ها

در هندسه برای انجام عملیات حسابان تانسوری روی منیفلد ها به طور طبیعی نیاز به شناخت مباحث آنالیز روی منیفلدها داریم. به عبارت ساده باید ببینیم چگونه می توان قضایای آنالیز روی $\mathbb{R}^n$ را برای منیفلدها تعمیم داد. ابتدا باید ببینیم آیا تعاریف و قضایای مقدماتی آنالیز برای منیفلدها نیز برقرار است؟ و اگر چنین است تحت چه شرایطی می توان آنها را تعریف و اثبات نمود. به عنوان مثال ارتباط بین مفاهیم فشردگی، بسته بودن و کرانداري چیست و یا شرط کامل بودن یک منیفلد چگونه با توجه به متریک و التصاق ریمانی تعریف می شود. این مباحث جالب احتیاج به مقدماتی دارد که در این فصل به آن

۱.۵ وجود و یکتایی ژئودزیک ها

مقدمه. برای مطالعه بهتر ژئودزیکها باید رفتار جمعی آنها را مورد مطالعه قرار دارد. به عنوان مثال سؤال زیر را مطرح نمود: اگر نقطه شروع یا جهت یک ژئودزیک تغییر کند چه تغییراتی در آن ژئودزیک روی می دهد. جواب این سؤال با مطالعه نگاشتهای نمایی که از فضای مماس $T_p M$ در M تعریف می شوند قابل بررسی است، با این کار در حقیقت تمام ژئودزیکهای M را جمع آوری کرده آنها را با یک نگاشت واحد نمایش می دهیم. این نگاشتها از اهمیت خاصی در تعیین رفتار ژئودزیکها و در نتیجه تعیین خواص منیفلدهای ریمانی برخوردارند. از طرف دیگر نگاشت نمایی یک دستگاه مختصات جدید به نام مختصات نرمال روی منیفلد ریمانی (M, g) تعریف می کند. در دستگاه مختصات نرمال مولفه های متریک ریمان عبارتند از $g_{ij} = \delta_{ij}$ و در نتیجه ضرایب کریستوفل همگی صفر می شوند. لذا چنانچه مختصات نرمال روی یک منیفلد وجود داشته باشد آنگاه آن منیفلد بسیاری از خواص $\mathbb{R}^n$ را دارا می باشد.

فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی و $\gamma_v : [0, 1] \rightarrow M$ یک ژئودزیک روی M باشد. بنا بر قضیه اساسی معادلات دیفرانسیل درجه دوم یا قضیه پیکارد-لیندولف^۱، یک جواب یکتا با شرایط اولیه $\gamma(0) = p$ و $\gamma'(0) = v$ برای معادله دیفرانسیل ژئودزیک هابه شرح زیر وجود دارد.

$$\nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t) = \frac{d^2 \gamma^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{d\gamma^j}{dt} \frac{d\gamma^k}{dt} = 0, \quad (1.5)$$

لذا یک ژئودزیک یکتا با نقطه شروع p و بردار سرعت اولیه v وجود دارد که آن را توسط

^۱Picard-Lindolf

$\gamma(t, p, v) = \gamma_v(t)$ نمایش می دهیم. بعلاوه $\gamma_v(t)$ به طور هموار به p و v بستگی دارد. یادآوری می کنیم که اگر $\gamma(t)$ یک جواب معادله دیفرانسیل (۱.۵) باشد آنگاه $\gamma(\lambda t)$ نیز به ازای هر عدد ثابت $\lambda \in \mathbb{R}$ یک جواب این معادله است. لذا به ازای هر $\lambda > 0$ و $t \in [0, \epsilon]$ داریم

$$\gamma_v(t) = \gamma_{\lambda v}\left(\frac{t}{\lambda}\right). \quad (2.5)$$

در این حالت $\gamma_{\lambda v}$ روی $[0, \frac{\epsilon}{\lambda}]$ تعریف می شود. با فرض $\lambda = t$ و با توجه به رابطه (۲.۵) داریم

$$\gamma_v(t) = \gamma_{tv}(1).$$

یا به طور معادل داریم

$$\gamma(t, p, v) = \gamma(1, p, tv). \quad (3.5)$$

چون γ_v به عنوان تابعی از v هموار است و دامنه آن یعنی مجموعه

$$Ind = \{v \in T_p M : \|v\| = 1\},$$

فشرده است، به ازای هر بردار $v \in Ind$ ، عددی مانند $\epsilon > 0$ وجود دارد به طوری که γ_v لااقل در بازه $[0, \epsilon]$ تعریف گردد. لذا نتیجه زیر را داریم.

گزاره ۱.۱.۵. فرض کنیم $p \in M$ آنگاه یک مجموعه باز $V \subset M$ شامل $p \in V$ و $\delta > 0$ و $\epsilon_1 > 0$ و یک نگاشت $\gamma : (-\delta, \delta) \times U \rightarrow M$ ، C^∞ آن $U = \{(q, v) | q \in V, v \in T_q M, |v| < \epsilon_1\}$ وجود دارند به طوری که منحنی $\gamma(t, q, v)$ به ازای هر $t \in (-\delta, \delta)$ ، تنها ژئودزیک M است که در لحظه $t = 0$ از q در جهت v می گذرد. برای هر $q \in V$ و $v \in T_q M$ که $|v| < \epsilon_1$

با توضیحات بالا لم زیر را داریم.

لم ۲.۱.۵. همگنی ژئودزیک ها ^۲ اگر ژئودزیک $\gamma(t, p, v)$ روی $(-\delta, \delta)$ تعریف شده باشد، آنگاه ژئودزیک $\gamma(t, p, av)$ نیز روی فاصله $(-\delta/a, \delta/a)$ تعریف می شود به طوری که $\forall a \in \mathbb{R}^+$

$$\gamma(t, q, av) = \gamma(at, q, v)$$

اثبات. منحنی $h : (-\delta/a, \delta/a) \rightarrow M$ را توسط $h(t) = \gamma(at, p, v)$ تعریف می کنیم. داریم $h(\cdot) = \gamma(\cdot, p, v) = \pi \circ \varphi(\cdot, p, v) = \pi(p, v) = p$

$$\text{و } \frac{dh}{dt} = \frac{d(at)}{dt} \frac{d\gamma}{dt}(at) = a\gamma'(at, p, v)$$

$$\text{پس } \frac{dh}{dt}(\cdot) = a\gamma'(\cdot, p, v) = av$$

داریم $\frac{D}{dt}(\frac{dh}{dt}) = \nabla_{h'(t)}h'(t) = a^2 \nabla_{\gamma'(at, p, v)}\gamma'(at, p, v) = 0$ در تساوی آخر $h'(t)$ را به یک همسایگی $h(t)$ در M گسترش داده ایم. بنابراین h ، ژئودزیکی است که در $t = 0$ از p می گذرد و بردار سرعت اولیه آن av است چون چنین ژئودزیکی با چنین شرایطی یکتاست پس $h(t) = \gamma(t, p, av)$. γ ژئودزیکی است که در $t = 0$ از p می گذرد و بردار سرعت اولیه آن av است. $\square$

نتیجه ۳.۱.۵. به ازای هر بردار $w \in T_p M$ با فرض $\|w\| \leq \epsilon$ یک ژئودزیک یکتا با نقطه شروع p و بردار سرعت اولیه w مانند γ_w وجود دارد که در فاصله $[0, 1]$ تعریف شود. مجموعه تمام این بردارها را با Ω_p نمایش می دهیم.

با استفاده از این لم ما می توانیم سرعت یک ژئودزیک را با کم کردن فاصله تعریف آن، زیاد یا کم کنیم.

^۲homogeneity of geodesics

۱.۱.۵ میدان برداری ژئودزیک یا اسپری

درمورد وجود و یکتایی ژئودزیک های یک منیفلد ریمانی (M, g) با یک التصاق ریمانی در بالا صحبت کردیم. در اینجا به وجود و یکتایی آن در روی کلاف مماس TM می پردازیم. فرض کنیم (x, U) یک کارت روی M و γ ، یک منحنی هموار روی آن باشد. در این صورت منحنی $(\gamma(t), \gamma'(t))$ را در روی TM در نظر می گیریم. با توجه به این که $TU = U \times \mathbb{R}^n$ اگر γ روی M ژئودزیک باشد، منحنی $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ $\gamma : t \rightarrow$ در دستگاه زیر صدق می کند.

$$\frac{dx_k}{dt} = y_k, \quad \frac{dy_k}{dt} = - \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k y_i y_j \quad (k = 1, \dots, n) \quad (۴.۵)$$

قضیه شار موضعی در منیفلد ۱ را یادآوری می کنیم. فصل ۶ از کتاب [۲] را ببینید. قضیه شار موضعی: فرض کنیم X یک میدان برداری C^∞ روی باز V در منیفلد M باشد. آنگاه به ازاء هر نقطه $p \in M$ ، مجموعه ای باز $V_p \subset V$ حول p و عدد $\delta > 0$ و نگاشت $\varphi : (-\delta, \delta) \times V_p \rightarrow V$ C^∞ وجود دارند به طوریکه منحنی $\varphi(t, q)$ $t \rightarrow$ به ازاء هر $q \in V_p$ تنها مسیر X است که در لحظه ی $t = 0$ از q میگذرد و بردار سرعت آن X_q است.

لم ۴.۱.۵. فرض کنیم γ یک ژئودزیک روی M باشد. آنگاه یک میدان برداری یکتا مانند G روی TM وجود دارد به طوری که $(\gamma(t), \gamma'(t)) \rightarrow t$ منحنی انتگرال G روی TM باشد.

اثبات. ابتدا یکتایی G را با فرض وجود آن بررسی می کنیم. کارت (x, U) را روی M در نظر می گیریم. منحنی انتگرال میدان برداری G در TU منحنی هایی به صورت $(\gamma(t), \gamma'(t))$ است که در آن γ یک ژئودزیک روی M است. لذا در معادله (۴.۵) صدق می کند. چون جواب معادله یکتاست پس G یکتاست. با توجه به وجود جواب در

دستگاه فوق وجود G ثابت می شود. یعنی y_k و $\frac{dy_k}{dt}$ ها مولفه های G را تشکیل می دهند. □

تعریف ۵.۱.۵. میدان برداری G در $\mathbb{R}^{2n}$ را یک میدان برداری ژئودزیک یا یک اسپری ژئودزیک روی TM می گویند. شار میدان برداری G را شار ژئودزیک روی TM می نامند.

برای مطالعه اسپری کتاب [۵۴] را ببینید. با توجه به قضیه شار موضعی و لم ۴.۱.۵ داریم

$$\forall p \in M, \forall (x, U) \ni U. \subset TU, \exists \delta > 0, \exists \varphi : (-\delta, \delta) \times U. \longrightarrow TU$$

به طوری که φ ، C^∞ بوده و منحنی $\gamma(t, q, v)$ ، $t \longrightarrow \gamma(t, q, v)$ ، یکتا مسیر G گذرنده از (q, v) در $t = 0$ با بردار سرعت v است که در آن $U. = \{(q, v) | q \in V, v \in T_q M, |v| < \varepsilon_1\}$. حال قرار دهیم $\gamma = \pi \circ \varphi : (-\delta, \delta) \times U. \longrightarrow M$ ، γ دیفرانسیل پذیر است. توجه داریم که نگاشت π همان تابع تصویر است که به هر بردار $v_q \in TM$ ، نقطه q در M را مربوط می کند.

۲.۵ نگاشت نمایی

با استفاده از وجود ویکتایی ژئودزیک ها می توان نگاشت نمایی را به صورت زیر تعریف کرد.

تعریف ۱.۲.۵. فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی، $p \in M$ و $\Omega \subset TM$ بصورت زیر تعریف شود. $\{\gamma_v \text{ در فاصله‌ای شامل } [0, 1] \text{ تعریف شود} \mid v \in T_p M\}$ $\Omega_p =$

نگاشت نمایی در نقطه p را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\begin{aligned}\exp_p : \Omega_p &\longrightarrow M, \\ v &\mapsto \exp v = \gamma_v(1).\end{aligned}$$

تذکره ۱: بنابر آنچه در بالا ذکر شد، حوزه تعریف نگاشت نمایی همواره شامل یک همسایگی کوچک صفر (مبدأ) $0 \in T_p M$ است.

به زبان ساده نگاشت نمایی نگاشتی از فضای مماس TM به روی ژئودزیک های M تعریف می کند که هر بردار v را به نقطه ای از ژئودزیک γ_v در زمان $t = 1$ می برد که آن را توسط $\gamma(1, p, v)$ یا $\gamma_v(1)$ نیز نمایش می دهیم.

مثال ۲.۲.۵. فرض کنیم $M = S^2$ در این صورت نگاشت نمایی در نقطه p به صورت زیر تعریف می شود. به شکل ۱.۵ در صفحه ۱۲۰ توجه کنید.

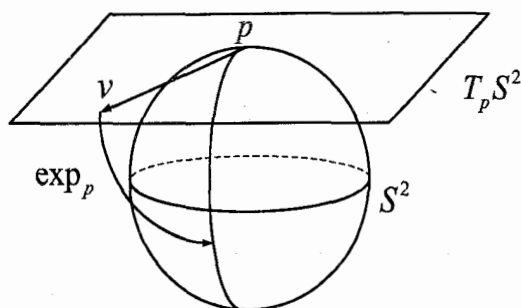
$$\begin{aligned}\exp : TS^2 &\longrightarrow S^2, \\ v &\mapsto \exp v = \gamma_v(1).\end{aligned}$$

نگاشت $\exp_p$ هر بردار مماس v_p را به نقطه $\gamma_v(1)$ در زمان $t = 1$ به روی ژئودزیکی می برد که از نقطه p گذشته و در راستای v_p قرار دارد. شکل ۱.۵ را ببینید.

از نظر هندسی، نگاشت نمایی هر بردار v از $T_p M$ را به روی نقطه ای از ژئودزیک $\gamma_v(t) = \exp_p(v)$ از M که از p در $t = 0$ شروع شده و در راستای $\frac{v}{|v|}$ به اندازه $|v|$ پیش رفته است، تصویر می کند.

۳.۵ روش محاسبه دیفرانسیل یک تابع نمایی

برای محاسبه دیفرانسیل تابع نمایی $(d\exp_p)v$ که در آن v ، یک بردار دلخواه از $T_p M$ است باید یک ژئودزیک روی $T_p M$ مانند $\sigma(t)$ طوری تعریف کنیم که از نقطه $0 \in T_p M$



شکل ۱.۵: نگاشت نمایی هر بردار v از صفحه مماس بر کره را به روی نقطه ای از ژئودزیک کره یا دایره عظیمه ای که از نقطه p شروع و در راستای v به اندازه طول بردار $\|v\|$ پیش رفته است تصویر می کند.

شروع شده و بردار مماس اولیه آن در صفر بردار v باشد. سپس بردار مماس بر منحنی مرکب $\exp_p \circ \sigma(t)$ روی M را به روش زیر محاسبه می کنیم. یادآوری می کنیم که $\sigma(t) = tv$ یک منحنی در روی $T_p M$ که در خواص بالا صدق کند، لذا کافی است برای محاسبه دیفرانسیل یک تابع نمایی بردار مماس بر منحنی $\exp_p(tv)$ را محاسبه نمود.

$$\begin{aligned} (d \exp_p) \circ v &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp_p \circ \sigma(t) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp_p(tv) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \gamma(1, p, tv) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \gamma(t, p, v) \\ &= v \end{aligned}$$

آخرین تساوی برقرار است زیرا که v بردار مماس در صفر است.

قضیه ۱.۳.۵. (موسوم به لم همسایگی نرمال) فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی باشد. برای هر نقطه $p \in M$ ، یک همسایگی $\mathcal{V}$ از $T_p M$ و یک همسایگی $\mathcal{U}$ از $p \in M$ وجود دارد که نگاشت نمایی $\exp_p : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ یک دیفیئومورفیسم باشد.

همسایگی باز U را یک همسایگی نرمال^{*} می نامیم.

اثبات. چون $T_p M$ یک فضای برداری است می توانیم آن را بافضای برداری مماس بر $T_p M$ در $T_p M$ یعنی $\bullet \in T_p M$ $T_p M \approx T.(T_p M)$ یکی در نظربگیریم. لذا مشتق تابع نمایی در نقطه $\bullet \in T_p M$ نگاهی است از $T_p M$ در خودش.

$$(d \exp_p) \cdot v : T_p M \rightarrow T_p M.$$

برای محاسبه $(d \exp_p)v$ که در v ، یک بردار دلخواه از $T_p M$ است یک منحنی روی $T_p M$ طوری تعریف کنیم که از نقطه $\bullet$ شروع شده و بردار مماس اولیه آن در صفر بردار v باشد، لذا فرض می کنیم $\sigma(t) = tv$. حال کافی است که بردار مماس بر منحنی $\exp_p(tv) = \exp_p \circ \sigma(t)$ را محاسبه نمود.

$$(d \exp_p) \cdot v = \frac{d}{dt} \exp_p \circ \sigma(t)|_{t=\bullet} = \frac{d}{dt} \exp_p(tv)|_{t=\bullet}.$$

بنابر تعریف نگاشت نمایی و نتیجه ۳.۱.۵ ژئودزیکی مانند γ وجود دارد به طوری که $\exp_p(tv) = \gamma(\bullet, p, tv)$ لذا داریم

$$\begin{aligned} (d \exp_p) \cdot v &= \frac{d}{dt} \gamma(\bullet, p, tv)|_{t=\bullet} = \frac{d}{dt} \gamma(t, p, v)|_{t=\bullet} \\ &= v. \end{aligned} \quad (5.5)$$

بنابراین مشتق تابع نمایی در همسایگی بردار صفر یک تابع همانی است و ماتریس $(d \exp_p)$ دارای رتبه n است.

$$(d \exp_p) \cdot = Id_{T_p M}.$$

لذا بنا بر قضیه توابع معکوس یک همسایگی از $\bullet \in T_p M$ وجود دارد که تابع نمایی در آن دیفیئومورفیسم باشد. $\square$

^{*}normal neighborhood of p .

از رابطه (۵.۵) همچنین نتیجه می شود که در برش صفر، مشتق نگاشت نمایی، هر بردار دلخواه v را به خودش می برد. از طرف دیگر می دانیم که در توابع حقیقی فقط و فقط تابع نمایی $f(x) = e^x$ دارای خاصیت $df = f$ است. لذا $d \exp_p \cdot v = v$ نام گذاری نگاشت نمایی برای این تابع را توجیه می کند. البته دلایل دیگری نیز برای این نام گذاری ارائه شده است که به دلیل دور بودن مقدمات آن با مطالب این کتاب از ذکر آنها خودداری می گردد. کتاب [۴۶] را ببینید.

۴.۵ مختصات نرمال و شرایط وجود و یکتایی آن

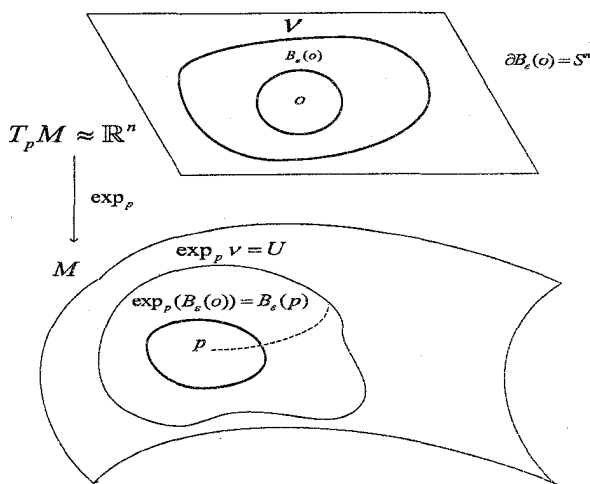
فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی n -بعدی و $p \in M$ باشد. فرض کنیم $e_1, \dots, e_n$ یک پایه برای فضای مماس $T_p M$ بوده که با ضرب داخلی تعریف شده توسط g در روی فضای مماس متعامد یک باشد، به عبارت دیگر $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$. یک نگاشت خطی دوسویی^۵ مانند Φ طوری در نظر می گیریم که این پایه را به پایه کانونی $\mathbb{R}^n$ ببرد. اگر هر بردار $v \in T_p M$ را در این پایه بنویسیم، آنگاه

$$\begin{aligned} \Phi : T_p M &\longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ v = v^i e_i &\mapsto (v^1, \dots, v^n). \end{aligned} \quad (۴.۵)$$

در ادامه این بخش، $T_p M$ را بواسطه نگاشت Φ با $\mathbb{R}^n$ یکی در نظر می گیریم. لذا بنابر قضیه ۱.۳.۵، نگاشت نمایی یک دیفیئومورفیسم از یک همسایگی $\mathcal{U} \subset M$ از p به توی یک همسایگی $\mathcal{V}$ از $\exp_p^{-1} \cdot 0 \in T_p M \simeq \mathbb{R}^n$ تعریف می کند. بنابراین معکوس نگاشت نمایی یک کارت $(\exp_p^{-1}, \mathcal{U})$ در همسایگی $\mathcal{U}$ از نقطه $p \in M$ به $\mathbb{R}^n$ تعریف می کند که در آن $\exp_p^{-1}$ همان $\Phi \circ \exp_p^{-1}$ فرض شده است.

^۵همریختی یا ایزومورفیسم

تعریف ۱.۴.۵. فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی و $p \in M$ باشد. کارت $(\exp_p^{-1}, \mathcal{U})$ را یک دستگاه مختصات نرمال^۶ در همسایگی p می نامیم. در اینجا همسایگی باز $\mathcal{U}$ همان همسایگی نرمال است^۷ که در قضیه ۱.۳.۵ وجود آن بررسی شد.



شکل ۲.۵: اگر $B_\varepsilon(o)$ یک گوی به مرکز $o \in T_p M \approx \mathbb{R}^n$ باشد، $B_\varepsilon(p)$ تصویر آن توسط نگاشت نمایی را گوی نرمال یا گوی ژئودزیک به مرکز p و مرز آن را کره ژئودزیکی یا کره نرمال می‌گوییم. ژئودزیک شعاعی از p شروع شده و بر کره ژئودزیکی به مرکز p عمود است.

مثال ۳.۴.۵. فرض کنید (M, g) یک منیفلد ریمانی و $X \in \mathcal{X}(M)$ باشد. همچنین فرض کنید $p \in M$ و $U \subset M$ یک همسایگی p و نیز $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \rightarrow M$ گروه موضعی یک پارامتری وابسته به میدان برداری X باشد. (یعنی یک نگاشت دیفرانسیل پذیر باشد به طوری که به ازای هر $q \in U$ منحنی $t \rightarrow \varphi(t, q)$ مسیر منحنی انتگرال X گذرنده از q در $t = 0$ باشد.) فرض کنید X یک میدان کیلینگ روی M ، $p \in M$ و U یک همسایگی نرمال p روی M باشد و p تنها نقطه U باشد که در شرط $X(p) = 0$ صدق می‌کند. نشان دهید X در U بر کره های ژئودزیکی به مرکز p مماس است.

حل: فرض می‌کنیم q نقطه ای روی یک کره ژئودزیکی به مرکز p و شعاع ε باشد. در این صورت q تصویر یک بردار $V \in T_p M$ می‌باشد که دارای نقطه شروع $0 \in T_p M$ و

طول آن برابر ϵ است. با توجه به ایزومتري بودن φ_t داریم

$$|d\varphi_t(V)| = \langle d\varphi_t(V), d\varphi_t(V) \rangle^{\frac{1}{2}} = \langle V, V \rangle^{\frac{1}{2}} = |V| = \epsilon.$$

پس طول $d\varphi_t(V)$ برابر طول V (ϵ) است و با توجه به اینکه ماتريس نگاشت $d\varphi_t$ همان ماتريس ژاکوبين φ_t است طول $d\varphi_t(V)$ برابر فاصله $\varphi_t(q)$ از p است. بنابراین $\varphi_t(q)$ روی همان کره ژئودزيکی قرار دارد که q روی آن واقع شده بود و در نتیجه مدارهای میدان برداری X بر کره های ژئودزيکی منطبقند و چون X بر مدارهای خود مماس است بر کره های ژئودزيکی به مرکز p نیز مماس خواهد بود.

۵.۵ کاربرد مختصات نرمال

چون تانسورها توابع چند خطی هستند برای اثبات یک رابطه تانسوري در هر نقطه $p \in M$ کافي است آن رابطه را برای اعضای پایه ای از فضای مماس در آن نقطه ثابت کنیم. با انتخاب مختصات و پایه مناسب حجم عملیات جبری اثبات به میزان زیادی کاهش پیدا می کند، خصوصا اگر مختصات نرمال انتخاب شود با استفاده از خواص مختصات نرمال در قضیه ۱.۵.۵ محاسبات به مراتب ساده تر می گردد. از طرف دیگر با استفاده از تعریف کلاسیک تانسورها در فصل ۴ از کتاب [۲]، چنانچه یک تانسور یا به طور کلی یک عبارت تانسوري در یک نقطه از یک کارت صفر شود نگاه در تمام کارت های دیگر در همسایگی آن نقطه نیز صفر خواهد شد.

قضیه زیر کاربرد اساسی در ارائه راه حل آسان برای بسیاری از قضایای هندسه ریمانی دارد. به عنوان مثال اثبات اتحاد دوم بیانچی در صفحه ۱۲۸ را ببینید.

قضیه ۱.۵.۵. (کاربرد مختصات نرمال). فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی و $p \in M$ باشد. در یک دستگاه مختصات نرمال در همسایگی نقطه p روابط زیر برقرار

است.

$$g_{ij}(p) = g_p(e_i, e_j) = \delta_{ij}, \quad (۷.۵)$$

$$\Gamma_{ij}^k(p) = 0, \quad (۸.۵)$$

$$\partial_k g_{ij}(p) = 0, \quad \forall i, j, k \in 1, \dots, n. \quad (۹.۵)$$

اثبات. یک دستگاه مختصات نرمال $(x, \mathcal{U})$ در همسایگی نقطه p در نظر می گیریم. فرض کنیم $\{e_i\}$ یک پایه برای فضای مماس $T_p M$ بوده که نسبت به ضرب داخلی تعریف شده توسط g_p در روی فضای مماس $T_p M$ متعامد یک به یک باشد، $g_p(e_i, e_j) = \delta_{ij}$. بنابر رابطه (۶.۵) نگاشت $\Phi : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$ پایه $\{e_i\}$ را به یک پایه متعامد یک به نسبت به ضرب داخلی اقلیدسی در $\mathbb{R}^n$ می نگارد. در دستگاه مختصات نرمال $(x, \mathcal{U})$ در همسایگی نقطه p ، مولفه های نگاشت $x = \Phi \circ \exp_p^{-1}$ را با $x = (x^1 \dots x^n)$ نمایش می دهیم. اگر $\{\theta^i\}$ پایه دوگان $\{e_i\}$ باشد، داریم $x^i \circ \exp_p = \theta^i$ زیرا در حقیقت

$$x^i \circ \exp_p(v) = \Phi^i \circ \exp_p^{-1} \circ \exp_p(v) = \Phi^i(v) = v^i = \theta^i(v)$$

بنابراین اگر $\gamma_v(t)$ ژئودزیکی روی M باشد که از نقطه $p = \gamma_v(0)$ گذشته و در راستای $\dot{\gamma}_v(0) = v$ باشد، آنگاه در مختصات $(x, \mathcal{U})$ با استفاده از همگنی ژئودزیک ها داریم

$$x^i(\gamma_v(t)) = x^i(\gamma_{tv}(1)) = x^i(\exp_p(tv)) = \theta^i(tv) = tv^i, \\ \frac{dx^i(\gamma_v(t))}{dt} \Big|_{t=0} = v^i.$$

لذا بردار دلخواه v در مختصات نرمال و در مختصات اقلیدسی دارای یک مولفه است. در نتیجه پایه $\{e_i\}$ بر پایه $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ منطبق می گردد. از آنجا رابطه (۷.۵) نتیجه می شود. برای اثبات رابطه (۸.۵) یادآوری می کنیم که خطوط راست $\sigma(t) = tv$ در $T_p M$ ژئودزیک هستند و لذا در معادله (۱.۵) صدق می کنند. با جایگذاری v و $\frac{d\sigma}{dt} = 0$ در این

رابطه داریم

$$\Gamma_{jk}^i(tv)v^jv^k = 0.$$

لذا به ازای $t = 0$ یعنی در مبدأ، برای هر $v \in T_pM$ داریم $\Gamma_{jk}^i(p)v^jv^k = 0$. چون بردار v دلخواه است، با قرار دادن مقادیر عددی متفاوت برای مولفه های آن (مشابه آنچه در فصل ۴ از کتاب [۲] انجام شد) و استفاده از تقارن $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$ نتیجه می شود $\Gamma_{jk}^i(p) = 0 \quad \forall i, j, k \in 1, \dots, n$.

برای اثبات رابطه (۹.۵) در نقطه $0 \in T_pM$ داریم $0 = g^{il}\{\partial_k g_{jl} + \partial_j g_{kl} - \partial_l g_{jk}\}$. با ضرب g_{im} و استفاده از δ_m^l داریم

$$\{\partial_k g_{jm} + \partial_j g_{km} - \partial_m g_{jk}\} = 0. \quad (10.5)$$

اندیس های رابطه (۱۰.۵) را یک بار تغییر دوری داده و آن را با رابطه (۱۰.۵) جمع می کنیم. با استفاده از خاصیت تقارن در g_{jm} داریم $\partial_j g_{mk} = 0$. این رابطه اثبات قضیه را کامل می کند. $\square$

تذکره ۲. چون علایم کریستوفل تانسور نیستند صفر شدن آنها در مختصات نرمال الزاما صفر شدن آن را در دستگاههای دیگر ایجاب نمی کند. در همسایگی $p \in M$ یک کارت مختصات نرمال $(x, \mathcal{U})$ و اعضای پایه ∂_i را برای T_pM در نظر می گیریم. این اعضای پایه در مختصات نرمال دو خاصیت جالب دارند.

- اول اینکه دارای خاصیت تعویض پذیری ترتیب مشتق گیری همگرد هستند، یعنی چون گروه آنها صفر است، $[\partial_i, \partial_j] = 0$ همواره از تاب آزادی نتیجه می شود $\nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} = \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i}$.

- دوم اینکه مشتق همگرد این اعضای پایه در نقطه p صفر است، زیرا در این نقطه $\nabla_{\partial_i} \partial_j(p) = \Gamma_{ij}^k(p) \partial_k = 0$ لذا $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$.

باید توجه داشت که در این مختصات در نقطه p فقط مشتق همگرد اول صفر است و ممکن است مشتقات مراتب بالاتر $\nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} \partial_k$ در نقطه p صفر نباشند. یکی از کاربردهای فراوان مختصات نرمال را می توان در ارائه اثبات کوتاهی برای اتحاد دوم بیانچی به شرح زیر ملاحظه کرد.

گزاره ۲.۵.۵. (۱ اتحاد دوم بیانچی)^۹ فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی باشد. آنگاه مشتق همگرد کل تانسور انحنا ی ریمان به ازای هر $X, Y, Z, V, W \in \mathcal{X}(M)$ رابطه زیر صدق می کند.

$$\nabla R_m(X, Y, Z, V, W) + \nabla R_m(X, Y, V, W, Z) + \nabla R_m(X, Y, W, Z, V) = \quad (11.5)$$

اثبات. در نقطه $p \in M$ یک کارت مختصات نرمال $(x, \mathcal{U})$ در همسایگی p و اعضای پایه ∂_i را برای $T_p M$ در نظر می گیریم. از خاصیت اعضای این پایه که در بالا ذکر شد و خاصیت سازگاری با متریک داریم

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_t} R_m(\partial_k, \partial_l, \partial_i, \partial_j) &= \nabla_{\partial_t} \langle R(\partial_k, \partial_l) \partial_i, \partial_j \rangle \\ &= \langle \nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_l} \partial_i - \nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_l} \nabla_{\partial_k} \partial_i, \partial_j \rangle. \end{aligned}$$

با دوبار تغییر دوری زیرنویس هانست به سه عضو پایه اول $\partial_t, \partial_k, \partial_l$ و جمع هر سه رابطه

^۹Bianchi second identity

داریم

$$\begin{aligned} & \nabla R_m(\partial_k, \partial_l, \partial_i, \partial_j, \partial_t) + \nabla R_m(\partial_k, \partial_l, \partial_i, \partial_j, \partial_t) + \nabla R_m(\partial_k, \partial_l, \partial_i, \partial_j, \partial_t) \\ & = \langle \nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_l} \partial_i - \nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_l} \nabla_{\partial_k} \partial_j \rangle + \dots \\ & = \langle R(\partial_t, \partial_k) \nabla_{\partial_l} \partial_i + R(\partial_k, \partial_l) \nabla_{\partial_t} \partial_i + R(\partial_l, \partial_t) \nabla_{\partial_k} \partial_i, \partial_j \rangle \end{aligned}$$

اما از آن جا که در نقطه p مشتقات اول همگرد صفر هستند، یعنی در نقطه p ، $\nabla_{\partial_l} \partial_i = 0$ ، $\nabla_{\partial_k} \partial_i = 0$ ، $\nabla_{\partial_t} \partial_i = 0$ جمله آخر در تساوی فوق صفر می شود. لذا بنابر خاصیت تانسورها در تمام نقاط $p \in M$ این عبارت صفر می شود. $\square$

۶.۵ لم گاوس

لم گاوس کاربردهای فراوانی در تعمیم مفاهیم هندسه رویه ها به هندسه منیفلدها دارد. قبل از بیان این لم احتیاج به مقدماتی از ریاضی عمومی به نام منحنی پاره ای هموار، و بحث انتقال موازی یک بردار در طول یک منحنی پاره ای هموار داریم.

تعریف ۱.۶.۵. یک منحنی پاره ای یا قطعه ای هموار، عبارت است از یک نگاشت پیوسته $C : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ به طوری که یک افراز روی بازه $[a, b]$ مانند $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = b$ موجود باشد که تحدید C به هر یک از زیر بازه های $C|_{[t_i, t_{i+1}]}$ ، $i = 0, \dots, k-1$ ، هموار باشد. در این صورت می گوئیم که منحنی C ، $C(a)$ و $C(b)$ را به یکدیگر متصل می کند. هر یک از شکستگی های این منحنی در نقاط $C(t_i)$ ، را راس C می گویند و زاویه بین بردارهای مماس چپ و راست در آن نقطه یعنی $\lim_{t \rightarrow t_i^-} C'(t)$ و $\lim_{t \rightarrow t_i^+} C'(t)$ را زاویه راس در $C(t_i)$ می گوئیم.

لذا زاویه راس در اینجا همان زاویه بین بردارهای مماس بر دو منحنی است. برای دیدن

مثال جالبی از یک مثلث که مجموع زوایای آن صفر است، به مقدمه قضیه گاوس-بونه در صفحه ۳۱۹ مراجعه کنید. از این مثال نتیجه می گیریم که دیگر قضیه تالس - مجموع زوایای مثلث برابر عدد π است - روی منیفلدها برقرار نیست.

بحث انتقال موازی یک بردار در طول یک منحنی هموار را به شکل زیر می توان به منحنی های پاره ای هموار نیز توسیع داد. برای این منظور به طریق زیر عمل می کنیم . فرض کنیم می خواهیم بردار $V. \in T_{c(t)}M$ که در فاصله $t \in [t_i, t_{i+1}]$ تعریف شده است را به طور موازی به فواصل مجاور توسیع دهیم. ابتدا می گوئیم که بردار V را می توان طبق قضایای قبل به یک میدان برداری موازی و یکتای $V(t)$ در فاصله $t \in [t_i, t_{i+1}]$ توسیع داد. به این شکل دو بردار مماس بر منحنی $V(t_i)$ و $V(t_{i+1})$ در ابتدا و انتهای فاصله $t \in [t_i, t_{i+1}]$ به دست می آوریم. حال مجدداً هریک از این بردارها را در روی قطعه منحنی مجاور به طور موازی انتقال می دهیم. به این صورت یک بردار را می توان در طول یک منحنی پاره ای هموار به طور موازی انتقال داد. فرض کنیم M یک منیفلد ریمانی و T_pM فضای مماس در نقطه p باشد. در اینجا و در ادامه بخش فضای مماس بر T_pM در نقطه v را با T_pM یکی در نظر می گیریم زیرا هر دو دارای بعد n هستند. به عبارت دیگر فرض می کنیم $T_pM \simeq T_v(T_pM)$.

لم ۲.۶.۵. (لم گاوس) فرض کنیم $p \in M$ و $v \in T_pM$ طوری در نظر گرفته شوند که نگاشت نمایی $\exp_p v$ تعریف شود. آنگاه

$$\langle (d \exp_p)_v(v), (d \exp_p)_v(w) \rangle_{\exp_p} = \langle v, w \rangle_p. \quad (12.5)$$

تذکر الف. رابطه فوق به این معنی است که نگاشت نمایی به طور موضعی ایزومتری است.

تذکر ب. در اینجا باید توجه داشت که بنا بر قضیه قبل نگاشت نمایی فقط در یک همسایگی از نقطه $0 \in T_pM$ دیفیئومورفیسم است، و در حوزه تعریف خود (حتی به طور موضعی) دیفیئومورفیسم نیست. لذا نمی توان به جای $(d \exp_p)_v(v)$ در رابطه فوق مستقیماً

مقدار v را قرار داد.

اثبات. فرض کنیم هر بردار w را در امتداد دو بردار مماسی و قائم به صورت $w = w_T + w_N$ تجزیه کنیم که در آن مولفه مماسی w_T در امتداد v بوده و مولفه قائم w_N بر v عمود باشد. چون نگاشت $d \exp_p$ خطی است رابطه حکم به صورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{aligned} & \langle (d \exp_p)_v(v), (d \exp_p)_v(w_T) \rangle + \langle d(\exp_p)_v(v), d(\exp_p)_v(w_N) \rangle \\ & = \langle v, w_T \rangle + \langle v, w_N \rangle \end{aligned} \quad (۱۳.۵)$$

برای محاسبه مشتق تابع نمایشی فرض می کنیم که $\gamma(t)$ یک ژئودزیک باشد که از $p \in M$ با سرعت اولیه v می گذرد. بنابراین در معادله (۱۰.۵) یا $\frac{D}{dt} \gamma'(t) = 0$ صدق می کند. از آنجا $\langle \frac{D}{dt} \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = 0$ لذا ضرب داخلی بردارها مقداری ثابت است و داریم $\langle \gamma'(1), \gamma'(1) \rangle = \langle \gamma'(0), \gamma'(0) \rangle = \langle v, v \rangle$. ۱۰.۵.۵، خطی بودن $d \exp$ و با فرض $W_T = \lambda v$ اولین عبارت در سمت چپ معادله (۱۳.۵) به صورت زیر نوشته می شود.

$$\begin{aligned} \langle d(\exp_p)_v v, d(\exp_p)_v w_T \rangle &= \langle \gamma'(1), \lambda \gamma'(1) \rangle \\ &= \lambda \langle \gamma'(1), \gamma'(1) \rangle \\ &= \lambda \langle v, v \rangle \\ &= \langle v, \lambda v \rangle \\ &= \langle v, w_T \rangle \end{aligned}$$

لذا با جایگذاری در (۱۳.۵) رابطه حکم به صورت زیر نوشته می شود.

$$\langle (d \exp_p)_v v, (d \exp_p)_v w_N \rangle = \langle v, w_N \rangle. \quad (۱۴.۵)$$

در اینجا فرض می‌کنیم $w_N \neq 0$ ، زیرا در غیر این صورت w بردار مماسی بوده و حکم به خودی خود برقرار می‌شود. برای اثبات رابطه (۱۴.۵) نشان می‌دهیم که طرفین رابطه همواره صفر هستند. فرض کنیم $\rho: s \in (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \rho(s) \in T_p M$ یک منحنی روی $T_p M$ باشد که در شرایط v $\rho(0) = v$ و $\rho'(0) = w_N$ و ثابت $|v| = 1$ صدق می‌کند. چون طول ثابت فرض شده است همواره بر مشتق خود عمود است یعنی $\langle v, w_N \rangle = 0$ ، بنابراین طرف راست رابطه (۱۴.۵) صفر است. کافی است نشان دهیم که سمت چپ آن نیز صفر می‌شود یا به عبارت معادل تصاویر v و w_N نیز توسط $\exp_p d$ بر هم عمودند.^{۱۰} برای اثبات این موضوع^{۱۱} تابع f روی مربع $A = \{(t, s) | 0 \leq t \leq 1, -\epsilon < s < \epsilon\}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.^{۱۲}

$$f: A \rightarrow M$$

$$f(t, s) = \exp_p t \rho(s).$$

بنابر آنچه در روش محاسبه دیفرانسیل یک تابع نمایی در ابتدای این بخش دیدیم می‌توان با

^{۱۰} در تمام نقاط در طول ژئودزیکی که نگاشت نمایی را تعریف می‌کند.

^{۱۱} این تابع را در فصل حسابان تغییرات یک تغییرات می‌نامیم که نمودار آن رویه‌ای دوبعدی روی M است که با ثابت نگه داشتن t و s منحنی‌های طولی و عرضی روی M تعریف می‌کند. شکل ۴.۵ در صفحه ۱۳۵ را ببینید. جالب است که اگر توجه نماییم با ثابت نگاه داشتن متغیر s منحنی $f(t)$ یک ژئودزیک است.

^{۱۲} $\exp_p t \rho(s)$ تعریف می‌شود، چون $\exp_p$ به ازاء $\rho(0) = v$ تعریف شده است و $-\epsilon \leq s \leq \epsilon$ و

فرض $t = 0, t = 1, s = 0, s = 1$ ، مشتقات جزئی f را در صفر و یک بدست آورد.

$$t = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial s}|_{s=0} = \frac{d}{ds} \exp_p(\cdot)|_{s=0} = \cdot$$

$$t = 1 \implies \frac{\partial f}{\partial s}|_{s=0} = \frac{d}{ds} (\exp_p \rho(s))|_{s=0}$$

$$= (d \exp_p)_v \rho'(\cdot) = (d \exp_p)_v w_N$$

$$s = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial t}|_{t=0} = \frac{d}{dt} (\exp_p t \rho(\cdot))|_{t=0}$$

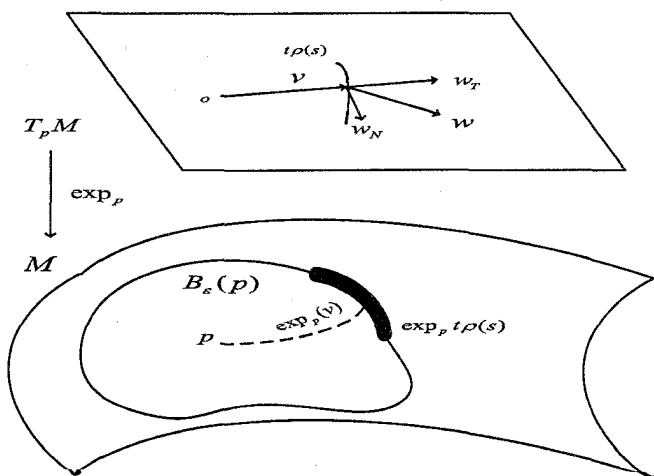
$$= \frac{d}{dt} (\exp_p tv)|_{t=0} = (d \exp_p)_v v$$

$$s = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial t}|_{t=1} = \frac{d}{dt} (\exp_p t \rho(\cdot))|_{t=1}$$

$$= \frac{d}{dt} (\exp_p tv)|_{t=1} = \frac{d}{dt} \gamma(1, p, tv)|_{t=1}$$

$$= \frac{d}{dt} \gamma(t, p, v)|_{t=1} = \gamma'(1) = (d \exp_p)_v v.$$

لذا داریم



شکل ۳.۵: مرزگوی نرمال بر ژئودزیک ها عمود است.

$$\langle (d \exp_p)_v w_N, (d \exp_p)_v v \rangle = \langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle_{(t=1, s=0)}$$

برای اثبات حکم کافی است ثابت کنیم سمت راست تساوی فوق صفر است. از طرف دیگر

می دانیم

$$\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle_{(t=0, s=0)} = 0$$

لذا کافی است نشان دهیم این رابطه به t بستگی ندارد. بنا به خواص سازگاری با متریک در مشتق همگرد در طول یک خم داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle = \langle D_t \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle + \langle \frac{\partial f}{\partial s}, D_t \frac{\partial f}{\partial t} \rangle$$

چون $f(t, s)$ یک ژئودزیک روی M است، معادله آن در رابطه $D_t \frac{\partial f}{\partial t} = 0$ صدق می کند. از طرف دیگر بنا بر خاصیت تعویض پذیری ترتیب مشتق گیری (تمرین ۳.۶.۵ را ببینید) داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle = \langle D_s \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle = 0$$

زیرا از آنجا که $f(t, s)$ ژئودزیک است اندازه بردار مماس آن ثابت بوده و مشتق آن صفر است.

$$0 = D_s \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right|^2 = D_s \langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle = 2 \langle D_s \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle$$

بنابراین مقدار $\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle$ ثابت و برابر صفر است. به این صورت اثبات لم گاوس کامل

□

می گردد.

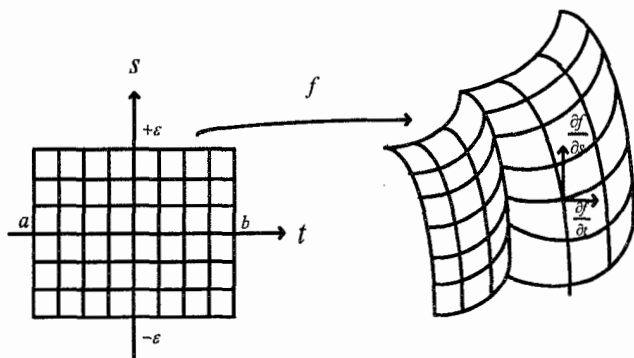
تعبیر هندسی لم گاوس: $B_\varepsilon(p)$ را می توان کره یا دایره فرضی در M

حول p فرض کرد که شعاعهای آن همانطور که در زیر ذکر خواهد شد ژئودزیکهای گذرنده از p هستند. شکل ۳.۵ در صفحه ۱۳۳ را ببینید.

در گوی نرمال چون $\overline{B_\varepsilon(0)} \subset \mathcal{V}$ پس $\exp_p$ روی مرز $B_\varepsilon(0)$ تعریف شده است. تصویر

مرز $\partial B_\varepsilon(0)$ توسط نگاشت نمایی را به عنوان یک منحنی مانند $\rho(s)$ در نظر می گیریم
 و قرار می دهیم $\varepsilon = |\rho(s)| = |v|$ ، $w_N = \rho'(s)$ ، $\exp_p v = q$ ،
 هم چنین روی ژئودزیکی که از p ، به q روی مرز گوی نرمال می رسم. پس تمامی
 ژئودزیک های موجود در گوی نرمال طولی برابر با ε دارند. یعنی ژئودزیک ها نقش
 شعاع فرضی را در این کره فرضی حول p در M ایفا می کنند. بنابراین لم گاوس
 $\langle (d\exp_p)v, (d\exp_p)w_N \rangle = \langle (d\exp_p)v, (d\exp_p)w_N \rangle = 0$ از طرفی
 $\langle \gamma'(1), \frac{d}{ds}\exp_p \rho(s)|_{s=0} \rangle = 0$ که در آن $\exp_p \rho(s)$ مرز گوی نرمال است. پس مرز
 گوی نرمال بر ژئودزیک ها در $t = 1$ عمود است.

تمرین ۳.۶.۵. لم تقارن در مشتق گیری همگرد. فرض کنیم $f: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M$
 خانواده های از منحنی ها روی (M, g) باشد به طوری که روی زیرفاصله های $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [a_{i-1}, a_i]$
 پاره ای هموار باشد^{۱۳}، شکل ۴.۵ در صفحه ۱۳۵ را ببینید. نشان دهید



شکل ۴.۵: تابع f خانواده ای از منحنی های پاره ای هموار روی M است. لذا مشتقات
 جزئی آن بردارهای مماس بر این منحنی ها هستند.

$$D_s \frac{\partial f}{\partial t} = D_t \frac{\partial f}{\partial s}.$$

^{۱۳} این منحنی را در حسابان تغییرات پذیرفتنی می نامند.

راهنمایی. فرض کنید $f(s, t) = (x^1(s, t), \dots, x^n(s, t))$ ، با ثابت فرض کردن s و یا t یک منحنی روی M پدید می آید. از آنجا $\partial_t f = \frac{\partial x^k}{\partial t} \partial_k$ و $\partial_s f = \frac{\partial x^k}{\partial s} \partial_k$ ، میدان های بردارهای مماس بر این منحنی ها هستند. سپس از این روابط مشتق همگرد D_s و D_t بگیرید و با یکدیگر مقایسه کنید.

۷.۵ کمینه بودن ژئودزیک ها

مقدمه

ما در این بخش به مطالعه دو اصل از اصول اقلیدس در مورد خط راست و تعمیم آن برای منیفلدها می پردازیم. اول اینکه ژئودزیک ها نقش خط راست را ایفا می کنند و می توانند کوتاهترین فاصله بین دو نقطه باشند. به عبارت دیگر ثابت می کنیم که یک ژئودزیک به طور موضعی دارای طول قوس کمینه بین دو نقطه است. دوم اینکه عکس گزاره فوق نیز برقرار است. یعنی هر منحنی روی یک منیفلد ریمانی که کوتاه ترین فاصله بین دو نقطه را دارا باشد یک ژئودزیک است. منیفلد ریمانی M همراه با التصاق ریمانی آن را در نظر میگیریم. منحنی $\gamma : I \rightarrow M$ را در نقطه t یک ژئودزیک گوئیم اگر $D_t \gamma'(t) |_{t=t_0} = 0$. اگر γ یک ژئودزیک در تمامی نقاط I باشد، می گوئیم که γ یک ژئودزیک است. اگر $[a, b] \subseteq I$ و $\gamma : I \rightarrow M$ یک ژئودزیک باشد، تحدید γ به $[a, b]$ یک قطعه ژئودزیک است که $\gamma(a)$ را به $\gamma(b)$ وصل می کند. از خاصیت سازگاری با متریک داریم

$$\frac{d}{dt} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = 2 \langle D_t \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = 0.$$

در نتیجه طول بردار $\gamma'(t)$ ثابت است. فرض کنیم $|\frac{d\gamma}{dt}| = c \neq 0$ داریم:

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\frac{d\gamma}{dt}| = c(t - t_0)$$

اگر t پارامتر طول قوس باشد، آنگاه $c = 1$. در این صورت ژئودزیک γ را نرمال شده می

گویم.

ویژگی های کمینه بودن ژئودزیک ها

تعریف ۱.۷.۵. قطعه ژئودزیک $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ را کمینه می گویم، اگر $\ell(\gamma) \leq \ell(c)$ که در آن $\ell(C)$ طول منحنی پاره ای هموار دلخواه C است که $\gamma(a)$ را به $\gamma(b)$ وصل می کند.

گزاره زیر کمینه بودن ژئودزیک ها را به عنوان کوتاه ترین منحنی واصل بین دو نقطه (به اندازه کافی به یکدیگر نزدیک)، در روی یک منیفلد را بیان می کند.

گزاره ۲.۷.۵. فرض کنیم $U, p \in M$ یک همسایگی نرمال p و $B \subset U$ یک گوی نرمال به مرکز p باشد. اگر $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ یک ژئودزیک روی M باشد که از p که $\gamma(0) = p$ می گذرد، آنگاه به ازای هر منحنی پاره ای هموار دلخواه $M \rightarrow [0, 1] : C$ که $\gamma(0)$ را به $\gamma(1)$ وصل می کند، $\ell(\gamma) \leq \ell(C)$ طول ژئودزیک γ کمینه است، یعنی $\ell(\gamma) \leq \ell(C)$. اگر تساوی برقرار باشد دو منحنی بر یکدیگر منطبق می شوند، $\gamma([0, 1]) = C([0, 1])$.

اثبات. ابتدا فرض می کنیم که $C([0, 1]) \subset B$ باشد. از آنجا که $\exp_p$ روی U دیفیئومورفیسم است منحنی $C(t)$ برای $t \neq 0$ به طور یکتا توسط $\exp_p r(t)v(t) = f(r(t), t)$ تعریف می شود که در آن $v(t) \rightarrow t$ یک منحنی در $T_p M$ است به طوری که $|v(t)| = 1$ و $r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ تابع حقیقی مثبت پاره ای دیفرانسیل پذیر است. (توجه: شرط $t \neq 0$ برای یکتایی مطلب فوق ضروری است چون در غیر این صورت $r(0)$ باید صفر باشد که در این صورت $v(0)$ می تواند هر بردار با اندازه ۱ باشد).

همچنین فرض کنید $\forall t_1 \in (0, 1)$ داریم $C(t) \neq p$ در غیر این صورت از بازه $(0, t_1]$ صرف نظر می کنیم چون وقتی طول γ از $t = 0$ تا $t = 1$ کمتر از طول C از t_1 تا ۱ باشد در نتیجه طول γ از طول C ، از $t = 0$ تا $t = 1$ نیز کمتر خواهد بود.

به استثنای تعداد متناهی نقاط داریم: C پاره‌ای هموار است.

$$\begin{aligned}\frac{dc}{dt} &= d(f(r(t), t)) = df(r'(t), 1) = \\ &= df(r'(t)) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial t} = r'(t) df\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) + df\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \\ &= r'(t) \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial t}\end{aligned}$$

پس داریم

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial f}{\partial r} r'(t) + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (15.5)$$

بنابر لم گاوس داریم

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = 0. \quad (16.5)$$

همچنین داریم: $\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \exp_p r(t) v(t) = (d\exp_p)_{r(t)v(t)} v = v$:
 داریم که $d\exp_p$ در همسایگی U همانی عمل می‌کند. در نتیجه

$$\left| \frac{\partial f}{\partial r} \right| = 1. \quad (17.5)$$

با استفاده از سه رابطه اخیر (15.5)، (16.5) و (17.5) داریم

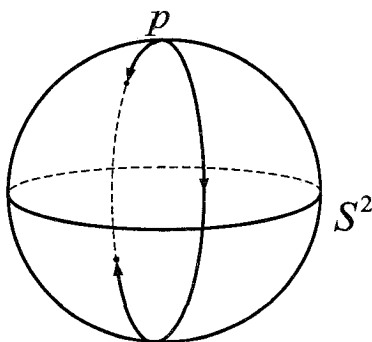
$$\begin{aligned}\left| \frac{dC}{dt} \right|^2 &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial r} r'(t) + \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial r} r'(t) + \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \\ &= r'^2 \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial r} \right\rangle + 2r' \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle, \\ &= r'^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right|^2 \geq |r'(t)|^2.\end{aligned} \quad (18.5)$$

در نتیجه داریم

$$\int_{\varepsilon}^1 \left| \frac{dC}{dt} \right| dt \geq \int_{\varepsilon}^1 |r'(t)| dt \geq \int_{\varepsilon}^1 r'(t) dt = r(1) - r(\varepsilon). \quad (19.5)$$

لذا چون $\ell(C) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 \left| \frac{dC}{dt} \right| dt$ داریم $\ell(C) \geq \ell(\gamma)$ زیرا از طرف دیگر عبارت سمت راست تساوی برابر است با $\ell(\gamma) = |\gamma'(t)| = |\gamma'(1)| = |r(1)v(1)| = r(1)$. در مطلب فوق از این حقیقت استفاده شده است که $\gamma(1) = c(1) = \exp_p r(1)v(1)$ و $\exp_p r(t)v(t)$ یک ژئودزیک است. واضح است که اگر نامساوی (۱۸.۵) یا نامساوی دوم در (۷.۷) اکید باشد آنگاه $\ell(C) > \ell(\gamma)$ و اگر $\ell(C) = \ell(\gamma)$ آنگاه $\left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| = 0$ و با توجه به اینکه $\exp_p r(t)v(t) = f(r(t), t)$ با مشتق گیری از طرفین رابطه و با جایگذاری $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ داریم $\frac{\partial}{\partial t} \exp_p r(t)v(t) = 0$ پس C یک باز پارامتری سازی یکنوای γ است و داریم $|r'(t)| = r'(t) > 0$. $C([0, 1]) = \gamma([0, 1])$ □

به عنوان مثال در کره $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ قطعه نصف النهارهایی که از قطب شمال و قطب جنوب کره S^2 می گذرند کمینه نیستند. چون این قطعه نصف النهار ها در گوی نرمال قرار ندارند. شکل ۵.۵ در صفحه ۱۳۹ و مثال ۳.۷.۵ را ببینید. قطعه نصف النهار سیاه رنگ کمینه نیست ولی قطعه نصف النهار خط-چین کمینه است.



شکل ۵.۵: طول ژئودزیک هایی که از قطب شمال و قطب جنوب کره S^2 می گذرند کمینه نیست.

مثال ۳.۷.۵. $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ و ژئودزیک‌هایی از آن را که دایره عظیمه یا نصف النهارهایی هستند که از نقطه p واقع در روی قطب شمال کره می‌گذرند، در نظر می‌گیریم. طول این نصف النهارها 2π می‌باشد. شکل ۶.۵ در صفحه ۱۴۱ را ببینید. $T_p S^2$ صفحه مماس در p و قرص‌های $B_\pi(0)$ و $B_{2\pi}(0)$ به ترتیب به شعاع 2π و 4π روی آن را در نظر می‌گیریم. اگر نقطه q ، واقع در قطب جنوب کره باشد، همان طور که در شکل نشان داده شده است، نگاشت exp_p به طور ۱-۱ از $B_\pi(0)$ به $S^2 - \{q\}$ عمل می‌کند. می‌دانیم که نگاشت نمایی $exp_p v$ ، هر بردار v به ازای $|v| < \pi$ از $T_p S^2$ را به روی نقطه‌ای از نصف النهاری که از p شروع شده و در راستای v به اندازه $|v|$ پیش رفته است، تصویر می‌کند. حال اگر $2\pi < |v| \leq 4\pi$ باشد، قرار می‌دهیم $N = exp_p v$. اگر برداری همراستا با v باشد که $|w| = 4\pi - |v|$ آنگاه $exp_p w = N$ چون v, w همراستا هستند ژئودزیک آنها در رابطه زیر صدق می‌کند.

$$\gamma(t, q, v) = \gamma'(2\pi - t, q, v).$$

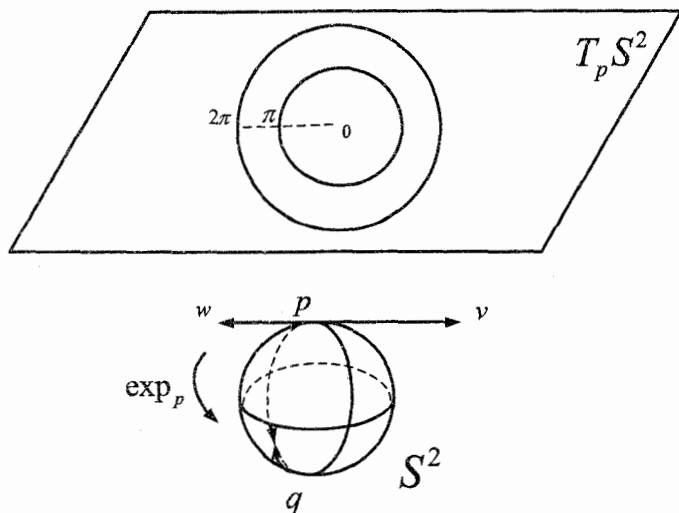
این باعث می‌شود که exp_p ، به طور ۱-۱ عمل نکند.

در گزاره ۲.۷.۵ نشان دادیم که هر ژئودزیک فاصله دو نقطه که در یک گوی نرمال قرار دارند را کمینه می‌کند. به عبارت دیگر ژئودزیک شعاعی^{۱۴} یعنی ژئودزیکی که از مرکز یک گوی نرمال شروع می‌شود با تقریب یک پارامتری سازی مجدد کمینه است. از طرف دیگر می‌دانیم که ممکن است هر دو نقطه دلخواه از یک منیفلد در یک گوی نرمال قرار نگیرد. یعنی ممکن است ژئودزیک شعاعی وجود نداشته باشد که آن‌ها را به هم وصل کند. لذا تعریف زیر را می‌آوریم.

تعریف ۴.۷.۵. زیر مجموعه باز $\mathcal{W}$ از منیفلد ریمانی M را همسایگی کاملاً نرمال^{۱۵} گوئیم،

^{۱۴}radial geodesic

^{۱۵}totally normal



شکل ۶.۵: نگاشت نمایی قرص $B_\pi(0)$ را روی $S^2 - \{q\}$ به طور ۱-۱، تصویر می کند. مرز $B_\pi(0)$ را به q می برد و مرز $B_{2\pi}(0)$ را به p تصویر می کند.

اگر عدد $\delta > 0$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $q \in \mathcal{W}$ ، در یک گوی نرمال حول نقطه q به شعاع δ قرار گیرد.

وجود گوی کاملاً نرمال $\mathcal{W}$ به راحتی قابل بررسی است^{۱۶}، زیرا $q \in \mathcal{W}$ را طوری انتخاب کرده ایم که در یک همسایگی نرمال قرار داشته باشد. لذا با توجه به گزاره ۲.۷.۵ هر همسایگی کاملاً نرمال $\forall q_1, q_2 \in \mathcal{W}$ ، یک ژئودزیک یکتای کمینه با طول کمتر از δ وجود دارد که q_1 را به q_2 وصل می کند. در ادامه خواهیم دید که که عکس گزاره ۲.۷.۵ نیز به طور سرتاسری برقرار است. به عبارت دیگر اگر $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ یک منحنی پاره‌ای هموار روی منیفلد ریمانی M باشد به طوری که به ازای هر منحنی پاره‌ای هموار دلخواه C که $\gamma(a)$ را به $\gamma(b)$ وصل می کند، داشته باشیم $\ell(\gamma) \leq \ell(C)$ ، آنگاه γ یک ژئودزیک

^{۱۶} برای توضیحات بیشتر کتاب [۴۵] صفحه ۷۲ را ببینید.

است.

گزاره ۵.۷.۵. هر منحنی پاره‌ای هموار کمینه که توسط طول قوس پارامتری شده باشد یک ژئودزیک است.

اثبات. فرض کنیم $M \rightarrow [a, b] : \gamma$ یک منحنی پاره‌ای هموار کمینه روی منیفلد ریمانی M باشد. به ازای هر عدد $t \in [a, b]$ می‌توانیم یک همسایگی همبند $U \subset [-1, 1]$ از t طوری پیدا کنیم که $\gamma(U)$ در یک همسایگی کاملاً نرمال $\mathcal{W}$ قرار گیرد. از تعریف همسایگی کاملاً نرمال نتیجه می‌شود که به ازای هر دو عدد $t_1, t_2 \in U$ و $t_1 < t_2$ با فرض $q_1 = \gamma(t_1)$ و $q_2 = \gamma(t_2)$ نتیجه می‌شود که q_2 در یک گوی ژئودزیکی در همسایگی q_1 قرار دارد. لذا یک ژئودزیک شعاعی وجود دارد که از q_1 و q_2 می‌گذرد. چون تحدید γ به فاصله $[t_1, t_2]$ یک منحنی کمینه است باید بر ژئودزیک شعاعی منطبق گردد. لذا γ در یک همسایگی t در معادله $D_t \gamma'(t) = 0$ صدق می‌کند. چون $t \in [a, b]$ دلخواه اختیار شده بود، γ در تمام بازه $[a, b]$ در معادله ژئودزیک ها صدق می‌کند. $\square$

۸.۵ قضیه هاف-رینو

مقدمه. در اینجا به اثبات برخی از قضایای آنالیز مانند شرط کامل بودن فضا و ارتباط آن با شرط کامل بودن ژئودزیک ها، قضیه هاینه-بورل^{۱۷} برای برقراری ارتباط بین مفاهیم فشردگی و کرانداری یک منیفلد، و غیره می‌پردازیم. پیش از این برخی از خواص موضعی منیفلد های ریمانی را بررسی نمودیم. یکی از زیباترین کارها در هندسه، برقراری ارتباط بین خواص موضعی و سرتاسری یک منیفلد است، که در اینجا یک رابطه بین خواص موضعی و سرتاسری را بررسی کنیم. در این بخش تمام منیفلد ها را همبند در نظر می‌گیریم.

^{۱۷}Hineh-Borel

۱.۸.۵ منیفلد های کامل

اگر بخواهیم خواص سرتاسری منیفلد M را مطالعه نماییم، ابتدا باید مطمئن شویم که M زیر منیفلد باز سره منیفلد دیفرانسیل پذیر دیگری مانند N نباشد، زیرا در این صورت خواص سرتاسری M همان خواص موضعی N می باشد. به عبارت دیگر باید مطمئن شویم که M توسیع ناپذیر است. یک شرط رایج برای اینکه M توسیع ناپذیر باشد فشردگی M است، زیرا اگر فرض کنیم $M \subset N$ فشرده باشد، آنگاه M هم باز و هم بسته است و طبق همبندی N نتیجه می شود که $M = N$ که با سره بودن M در تناقض است.

ما می توانیم از شرط ضعیف تری نسبت به شرط فشردگی استفاده کنیم، یعنی شرط درست یا سره بودن^{۱۸} که به صورت زیر تعریف می شود.

تعریف ۱.۸.۵. منیفلد ریمانی M را توسیع پذیر^{۱۹} گوئیم، اگر منیفلد ریمانی N موجود باشد بطوریکه M با یک زیر مجموعه باز درست از منیفلد ریمانی N ایزومتریک باشد. در غیر این صورت M را توسیع ناپذیر می گوئیم.

خانواده منیفلد های ریمانی توسیع ناپذیر بسیار بزرگ می باشد. یکی از زیر خانواده منیفلدهای توسیع ناپذیر خانواده منیفلدهای کامل است که قبلا با آن را در بخش نگاشت نمایی در صفحه ۱۲۲ در ذیل تعریف مختصات نرمال آشنا شده ایم و در این بخش به طور دقیقتری به آن می پردازیم.

تعریف ۲.۸.۵. منیفلد ریمانی M را کامل ژئودزیکی یا کامل^{۲۰} گوئیم، اگر برای هر $p \in M$ و هر $v \in T_p M$ نگاشت $\exp_p$ به طور سرتاسری تعریف شود. به عبارت دیگر به ازای هر نقطه $p \in M$ و هر بردار $v \in T_p M$ یک ژئودزیک با نقطه شروع p و بردار سرعت اولیه v مانند $\gamma_v(t)$ وجود داشته باشد که $\forall t \in]-\infty, +\infty[$ تعریف شود.

^{۱۸}proper^{۱۹}extendible^{۲۰}geodesically complete

مثال ۳.۸.۵. $\mathbb{R}^2$ منیفلد کامل است ولی $\{0\} - \mathbb{R}^2$ منیفلد کامل نیست. زیرا هر ژئودزیکی که در راستای محور x ها باشد، نمی تواند از مبدا عبور نماید و لذا قابل تعریف در تمام $\mathbb{R}$ نیست.

گزاره ۴.۸.۵. اگر M یک منیفلد ریمانی کامل باشد آنگاه M توسیع ناپذیر است.

اثبات. برهان خلف، فرض کنید M با یک زیر مجموعه باز درست از منیفلد ریمانی N ایزومتريک باشد، چون N همبند است، مرز M در N ناتهی است (زیرا اگر مرز M تهی باشد آنگاه M هم باز و هم بسته می باشد و بنابر همبندی N نتیجه می شود که $M = N$ که با سره بودن M در تناقض می باشد). فرض کنید نقطه p در مرز M بوده و $U \subset N$ یک همسایگی نرمال از p در N باشد. فرض کنید $q \in U \cap M$ و $\tilde{\gamma}(t)$ یک ژئودزیک در N باشد که این دو نقطه را به هم وصل می کند، یعنی $\tilde{\gamma}(0) = p$ و $\tilde{\gamma}(1) = q$. آنگاه $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(1-t)$ یک ژئودزیک در M است که $\gamma(0) = q$. این ژئودزیک برای بعضی از مقادیر t در $1 \leq t$ تعریف نشده است، زیرا در $t = 1$ نقطه p بر نقطه q منطبق می شود، که با کامل بودن M در تناقض است. $\square$

با یک مثال نقض می توان نشان داد که عکس گزاره فوق در حالت کلی برقرار نیست^{۲۱} و بنابراین کلاس منیفلدهای توسیع پذیر کاملاً بزرگتر از کلاس منیفلدهای کامل است. حال ما قصد داریم تا یک تابع فاصله (متر) روی منیفلد ریمانی (نه لزوماً کامل) تعریف کنیم. دو نقطه p, q در M را در نظر بگیرید، همه خم های تکه ای هموار که p و q را به هم وصل می کنند، در نظر بگیرید. از همبند بودن M نتیجه می شود که چنین خم هایی موجودند، $d(p, q)$ را به صورت اینفیم طول همه منحنی های $f_{p,q}$ تعریف می کنیم، که $f_{p,q}$ خم تکه ای همواریست که p را به q وصل می کند.

^{۲۱} تمرین ۴ صفحه ۱۵۲ از کتاب [۴۵] را ببینید.

گزاره ۵.۸.۵. منیفلد M همراه با تابع فاصله d تعریف شده در بالا یک فضای متریک است، یعنی داریم:

$$\text{الف. } d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$$

$$\text{ب. } d(p, q) = d(q, p)$$

$$\text{ج. } d(p, q) \geq 0, d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$$

اثبات. با توجه به خواص اینفیم a, b به وضوح برقرار است. کافیت نشان دهیم که اگر $d(p, q) = 0$ آنگاه $p = q$. با برهان خلف فرض کنیم $p \neq q$ آنگاه یک گوی نرمال $B_r(p)$ وجود دارد که شامل q نمی باشد. از $d(p, q) = 0$ نتیجه می شود که یک خم t_k ای هموار c موجود است که p را به q وصل کرده و طول آن کمتر از r می باشد. اما چون q داخل $B_r(p)$ نیست، پس قطعه ای از c که مشمول در $B_r(p)$ است طولی بزرگتر یا مساوی r دارد و این یک تناقض است، پس $p = q$. $\square$

مشاهده می شود که اگر یک ژئودزیک کمینه γ وجود داشته باشد که p را به q وصل کند، آنگاه $d(p, q)$ برابر است با طول خم γ .

گزاره ۶.۸.۵. توپولوژی القا شده بوسیله متر d روی M با توپولوژی ذاتی M برابر است.

اثبات. اگر r به قدر کافی کوچک باشد، گوی نرمال $B_r(p)$ با گوی متریک به شعاع r و مرکز p برابر می شود. بنابراین گوی های کتریک شامل گوی های نرمال هستند و برعکس. $\square$

نتیجه ۷.۸.۵. اگر $p \in M$ ، آنگاه تابع $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ که به صورت $f(p) = d(p, p_0)$ تعریف می شود، پیوسته است.

قضیه ۸.۸.۵. فرض کنید M یک منیفلد ریمان باشد و $p \in M$ ، گزاره های زیر معادلند:

۱. نگاشت exp_p روی کل $T_p M$ تعریف می شود.

۲. زیر مجموعه های بسته و کران دار M فشرده اند.

۳. M یک فضای متریک کامل است (هر دنباله کشی همگرا است).

۴. M کامل ژئودزیکی است.

۵. یک دنباله از زیر مجموعه های فشرده $K_n \subset M$ موجود است به طوری که $K_n \subset K_{n+1}$ و $\bigcup_n K_n = M$ و اگر $q_n \notin K_n$ آنگاه $d(p, q_n) \rightarrow \infty$.

به علاوه هر یک از گزاره های فوق بیانگر آن است که

۶. به ازای هر $q \in M$ یک ژئودزیک γ موجود است که p را به q متصل می کند و

$$d(p, q) = \text{طول}(\gamma).$$

اثبات. (۱→۶): فرض کنیم $d(p, q) = r$ و $B_\delta(p)$ گوی نرمال به مرکز p باشد و

$S = \partial(B_\delta(p))$ ، مرز گوی $B_\delta(p)$ باشد. فرض کنید x نقطه مینیم تابع پیوسته

$x \in S, d(q, x) = \delta V$ بطوریکه $V \in T_p M$ دارد وجود $x = exp_p$ و

$|V| = 1$ و γ ژئودزیکی باشد که با رابطه $\gamma(s) = exp_p sV$ تعریف می شود. می

خواهیم نشان دهیم که $\gamma(r) = q$. شکل ۷.۵ را ببینید. معادله زیر را در نظر می گیریم.

$$d(\gamma(s), q) = r - s. \quad (۷.۵)$$

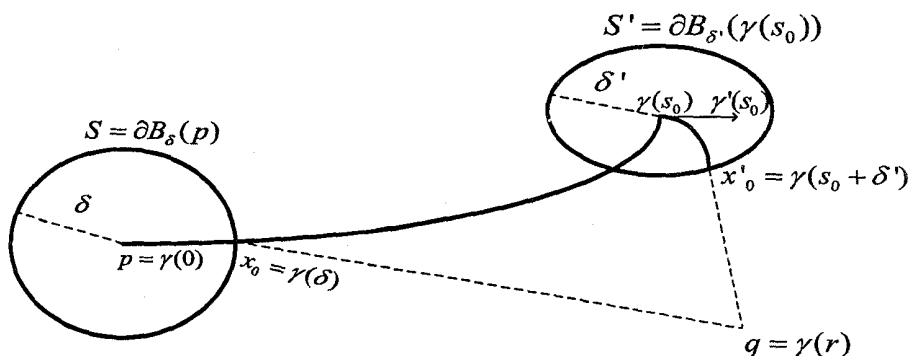
تعریف می کنیم $A = \{s \in [0, r]; d(\gamma(s), q) = r - s\}$. A ناتهی است زیرا

$0 \in A$ ، به علاوه A در $[0, r]$ بسته است. فرض کنید $s_0 \in A$ ، می خواهیم نشان دهیم که

اگر $s_0 < r$ ، آنگاه رابطه (۷.۵) برای $s_0 + \delta'$ که در آن $\delta' > 0$ به اندازه کافی کوچک

است، برقرار می باشد، لذا $sup A = r$. از اینکه A بسته است نتیجه می شود که $r \in A$

و در نتیجه $d(\gamma(r), q) = r - r = 0$ و $\gamma(r) = q$.



شکل ۷.۵: منحنی پاره‌ای هموار که p را به x' وصل می‌کند یک ژئودزیک است. لذا قطعه‌ای از این ژئودزیک که $\gamma(s_0)$ را به x' وصل می‌کند بر ژئودزیک γ منطبق است. زیرا از نقطه اولیه $\gamma(s_0)$ در راستای $\gamma'(s_0)$ می‌گذرد.

پس باید ثابت کنیم که رابطه (۲۰.۵) برای $s + \delta'$ درست است. فرض کنید $B_{\delta'}(\gamma(s_0))$ یک گوی نرمال به مرکز $\gamma(s_0)$ باشد و $S' = \partial(B_{\delta'}(\gamma(s_0)))$ و x' مینیمم $d(x, q)$ برای $x \in S'$ باشد. اگر $x' = \gamma(s + \delta')$ داریم

$$d(\gamma(s_0), q) = \delta' + \min d(x, q) = \delta' + d(x', q),$$

$$d(\gamma(s_0), q) = r - s,$$

$$r - s = \delta' + d(x', q) = \delta' + d(\gamma(s + \delta'), q), \quad (۲۱.۵)$$

$$d(\gamma(s + \delta'), q) = r - (s + \delta').$$

لذا رابطه (۲۰.۵) برای $s + \delta'$ برقرار است. بنابراین کافیت نشان دهیم که $x' = \gamma(s + \delta')$.

برای این منظور با استفاده از رابطه مثلثی و رابطه (۲۱.۵) داریم

$$d(p, x') \geq d(p, q) - d(q, x') = r - (r - s - \delta') = s + \delta'.$$

از طرف دیگر منحنی پاره ای همواری که p را به x' وصل می کند، از p شروع شده و با ژئودزیک γ به $\gamma(s)$ متصل می شود و از $\gamma(s)$ توسط ژئودزیک شعاعی به x' وصل می شود، بنابراین طولی برابر $\delta' + s$ دارد و در نتیجه $d(p, x') \leq s + \delta'$. لذا با استفاده از گزاره ۵.۷.۵ این منحنی یک ژئودزیک هموار است. حال قطعه ای از این ژئودزیک که $\gamma(s)$ را به x' وصل می کند، در نظر می گیریم. چون این منحنی یک ژئودزیک است، در نقطه $\gamma(s)$ دارای بردار مماس $\dot{\gamma}(s)$ است. لذا بنابر یکتایی ژئودزیک ها با نقطه شروع و راستای یکسان، این قطعه ژئودزیک منطبق بر ژئودزیک γ می شود. در نتیجه x' روی ژئودزیک γ قرار دارد. از آنجایی که γ با طول قوس پارامتری شده است و طول ژئودزیکی که p را به x' وصل می کند برابر $\delta' + s$ است، نتیجه می گیریم که منحنی پاره ای همواری که p را به x' وصل می کند یک ژئودزیک است و بنابر یکتایی ژئودزیک ها با نقطه شروع و راستای یکسان، این قطعه ژئودزیک منطبق بر ژئودزیک γ می شود. بنابراین $x' = \gamma(s + \delta')$ و حکم ثابت می شود. Δ (۱→۲): فرض کنید $A \subset M$ بسته و کران دار باشد. از کران دار بودن A نتیجه می شود یک گوی B به مرکز p نسبت به متر d موجود است که $A \subset B$ و بنابر فرض (۱) یک گوی $B_r(0) \subset T_p M$ موجود است بطوریکه $B \subset \exp_p \overline{B_r(0)}$ ، با توجه به پیوستگی $\exp_p$ و فشرده بودن $\overline{B_r(0)}$ نتیجه می شود که $\exp_p \overline{B_r(0)}$ فشرده است و بنابراین A یک مجموعه بسته مشمول در یک مجموعه فشرده می باشد و در نتیجه A فشرده است. Δ

(۲→۳): کافیت تا نشان دهیم یک دنباله کوشی $\{p_n\}$ همگراست. قرار دهید $A = \{p_n | n \in \mathbb{N}\}$ ، چون دنباله کوشی است پس A کران دار می باشد و در نتیجه $\overline{A}$ بسته و کران دار می باشد و بنابر فرض (۲) فشرده می باشد و بنابراین دارای یک زیر دنباله کوشی همگرا می باشد و در نتیجه دنباله $\{p_n\}$ همگراست. Δ

(۳→۴): برهان خلف: فرض کنیم M کامل ژئودزیکی نباشد و یک ژئودزیک نرمال γ در M موجود است که برای $s < s_0$ تعریف شده است و در s_0 تعریف نشده است. فرض کنید $\{s_n\}$ یک دنباله همگرا به s_0 با شرط $s_n < s_0$ باشد، چون هر دنباله همگرا کوشی

است، برای هر $\varepsilon > 0$ یک n وجود دارد که اگر $n, m > n$ آنگاه $|s_n - s_m| < \varepsilon$ و در نتیجه $|s_m - s_n| < \varepsilon$ $d(\gamma(s_n), \gamma(s_m)) \leq$ بنابراین $\{\gamma(s_n)\}$ یک دنباله کوشی در M می باشد و از کامل بودن M نسبت به متریک d نتیجه می شود که $p \in M$ موجود است که $\{\gamma(s_n)\}$ به p همگرا می شود. فرض کنید (W, δ) یک همسایگی کاملاً نرمال p باشد. n_1 را به گونه ای انتخاب می کنیم که $n, m > n_1$ در این صورت $|s_m - s_n| < \delta$ و $\gamma(s_m)$ و $\gamma(s_n)$ در w قرار می گیرند. بنابراین یک ژئودزیک یکتای α وجود دارد که طول آن کمتر از δ است و $\gamma(s_n)$ را به $\gamma(s_m)$ وصل می کند. واضح است که هر جا که γ تعریف شده باشد، α بر γ منطبق می شود. از آنجا که $\exp_{\gamma(s_n)}$ روی $B_\delta(0)$ یک دیفئومورفیسم است و $W \subset \exp_{\gamma(s_n)}(B_\delta(0))$ ، بنابراین α ژئودزیک γ را حول s توسعه می دهد که این با فرض اولیه ما در تناقض است. Δ (۴→۱):

با توجه به تعریف کامل بودن بدیهی است. Δ

(۵→۲): قضیه ای در توپولوژی می باشد. لذا اثبات قضیه کامل می شود. $\square$

نتیجه ۹.۸.۵. اگر منیفلد ریمانی M فشرده باشد، آنگاه M کامل است.

اثبات. هر مجموعه فشرده، کامل (توپولوژیکی) است و بنابر قضیه بالا کامل می باشد. $\square$

نتیجه ۱۰.۸.۵. هر زیر منیفلد بسته از یک منیفلد ریمانی کامل M ، نسبت به متریک اقلایی کامل است. در حالت خاص هر زیر منیفلد بسته یک فضای اقلیدسی کامل است.

اثبات. هر فضای اقلیدسی با $\mathbb{R}^n$ یکرخت است و چون هر مجموعه بسته در $\mathbb{R}^n$ کامل (توپولوژیکی) است، حکم برقرار است. $\square$

تمرین ۱۱.۸.۵. فرض کنیم M یک منیفلد ریمانی و φ و ψ دو ایزومتري از M به روی خودش باشد. فرض کنید نقطه $p \in M$ موجود باشد بقسمی که $\varphi(p) = \psi(p)$ و $d\varphi_p = d\psi_p$ در این صورت نشان دهید $\varphi \equiv \psi$.

راهنمایی. نگاشت $\varphi\psi^{-1}$ را در نظر بگیرید. بدون کاسته شدن از کلیت مسئله می توان فرض کرد $\varphi(p) = p$ در نتیجه $d\varphi_p$ یک نگاشت همانی است. در اینصورت واضح است که تمام نقاط در یک همسایگی نرمال دلخواه از p توسط φ ثابت نگه داشته می شوند. هرگاه M همبند باشد هر نقطه $q \in M$ می تواند توسط زنجیره ای از همسایگی های نرمال به نقطه p وصل شود. در نتیجه داریم $\varphi(q) = q$. ابتدا نشان دهید اگر $\phi \neq U_1 \cap U_2$ در اینصورت $\varphi_1 = \varphi_2$ روی $U_1 \cap U_2$. سپس با استفاده از یک منحنی پیوسته روی منیفلد همبند M که از $U \ni \gamma(o) \in U$ بگذرد، این نتیجه را به کل M توسعه دهید.

چنانچه موفق به حل این تمرین نشدید، می توانید برای توضیحات بیشتر به فصل آخر کتاب مراجعه کنید.

۹.۵ گرادیان، دیورژانس و لاپلاسیان منیفلدهای ریمانی

در ریاضیات عمومی با مفاهیم میدان برداری گرادیان و توابع دیورژانس و لاپلاسیان آشنا شده ایم. این مفاهیم کاربردهای فراوانی در هندسه و آنالیز روی منیفلدها دارند. از طرف دیگر لاپلاسیان منیفلدهای ریمانی و به دنبال آن لاپلاسیان منیفلدهای فینسلری هنوز با گذشت سالها از تعریف آن مباحث جالبی در مرزهای دانش هستند و توسط ریاضیدانان زیادی مورد مطالعه قرار دارند. لذا در این کتاب به تعمیم این مفاهیم برای منیفلدها می پردازیم.

تعریف ۱.۹.۵. فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی و f یک تابع دیفرانسیل پذیر روی آن باشد. میدان برداری گرادیان^{۲۲} تابع f روی M را با $grad f$ نمایش داده، به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\langle grad f(p), X_p \rangle = df_p(X_p)$$

که در آن $p \in M$ و $X_p \in T_p M$ است.

^{۲۲}gradient vector field

تعریف ۲.۹.۵. اگر $X \in \mathcal{X}(M)$ باشد تابع دیورژانس^{۲۳} را به عنوان اثر نگاشت مشتق گیری همگرد در هر نقطه $p \in M$ به صورت زیر تعریف می کنیم. $div X : M \rightarrow \mathbb{R}$ که در آن

$$div X(p) = trace(\nabla_Y X(p)).$$

اگر $\omega \in \Omega^1(M)$ یک ۱-فرم باشد، تابع همدیفرانسیل^{۲۴} را به عنوان اثر نگاشت مشتق گیری همگرد در هر نقطه $p \in M$ به صورت زیر تعریف می کنیم. $\delta\omega : M \rightarrow \mathbb{R}$ در آن

$$\delta\omega(p) = trace(\nabla_Y \omega(p)).$$

تابع دیورژانس و تابع همدیفرانسیل در مختصات موضعی به ترتیب به صورت $div X = \nabla_i X^i$ و $\delta\omega = \nabla_i \omega^i$ نوشته می شوند. در اینجا $\omega^i = g^{ij}\omega_j$ و ω_j مولفه های ۱-فرم ω است.

در بعضی از مراجع یک علامت منفی به این دو تعریف اضافه می نمایند. به عنوان مثال کتاب [۴۶] را ببینید. علت این موضوع هم آن است که اضافه کردن یک علامت منفی در ادامه بحث، موجب می شود که بتوان یک فرم مربعی مثبت مرتبط با این تعاریف، معرفی نمود. واضح است که گرادیان یک تابع یک میدان برداری است، لذا $grad f \in \mathcal{X}(M)$ و با استفاده از علایم موسیقیایی می توان میدان برداری گرادیان روی منیفلد ریمانی (M, g) را به صورت زیر نوشت.

$$grad f = df^\# = \nabla f^\#$$

در اینجا می بینیم که میدان برداری گرادیان با بالا بردن یک اندیس پدید می آید. در مختصات موضعی میدان برداری گرادیان را می توان به صورت زیر نوشت.

$$grad f = g^{ij}\partial_i f \partial_j$$

^{۲۳}divergence

^{۲۴}codifferential

مثال ۳.۹.۵. فرض کنید $M = \mathbb{R}^n$ باشد. مختصات $(x_1, \dots, x_n)$ روی $\mathbb{R}^n$ و پایه های $e_i = (\dots, 1, \dots) = \frac{\partial}{\partial x_i}$ روی فضای مماس در هر نقطه را در نظر می گیریم. نشان دهید

• گرادیان یک تابع را می توان در فضای اقلیدسی به صورت $\text{grad}f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot e_i$ نوشت.

• دیورژانس میدان برداری $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ را می توان در فضای اقلیدسی به صورت $\text{div}X = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X^i}{\partial x_i}$ نوشت.

اثبات. بنا به تعریف داریم $\langle \text{grad}f(p), V \rangle = df_p(V)$ پس هرگاه داشته باشیم $\langle \text{grad}f(p), V \rangle = df_p(V) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ در این صورت $V = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ از طرفی داریم

$$\begin{aligned} \langle \text{grad}f(p), \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x_i} \rangle &= \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f}{\partial x_i} \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_i} \rangle, \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}, v^i \frac{\partial}{\partial x_i} \rangle = \langle \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x_i} \rangle. \end{aligned}$$

در نتیجه داریم $\text{grad}f(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$ که حکم اول ثابت می شود. باید توجه داشت که گرادیان یک تابع را می توان فقط در فضای اقلیدسی به صورت فوق نوشت، زیرا در فضای اقلیدسی بالا و پایین بردن اندیسها با ضرب دلتای کرونکر در آن بردار صورت می گیرد، که تاثیری در ماهیت آن بردار ندارد.

برای اثبات رابطه دوم، می دانیم در این پایه

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X^j \frac{\partial}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial X^j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right).$$

در نتیجه بنا به تعریف دیورژانس داریم:

$$\text{div}X = \text{tr} \left(\frac{\partial X^j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X^i}{\partial x_i}.$$

□ لذا حکم دوم این مثال ثابت می‌شود.

گزاره ۴.۹.۵. فرض کنید (M, g) یک منیفلد ریمانی و f یک تابع هموار روی M باشد
 بقسمی که اندازه گرادیان آن همواره مقداری ثابت باشد، $|\text{grad } f| \equiv 1$. نشان دهید
 منحنی انتگرال میدان برداری گرادیان $\text{grad } f$ یک ژئودزیک است.

اثبات. بنا بر فرض $|\text{grad } f| \equiv 1$ هرگاه $\gamma(t)$ منحنی انتگرال $\text{grad } f$ باشد
 دراینصورت

$$(\gamma'(t))_p = \left(\frac{d}{dt} \gamma(t) \right)_p \Big|_{t=0} = \text{grad } f(p),$$

که در آن فرض کرده ایم که t پارامتر طول قوس است. بنا به خاصیت سازگاری ضرب داخلی
 با متریک داریم

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle_p \\ &= \left\langle \frac{D}{dt} \gamma'(t), \gamma'(t) \right\rangle_p + \left\langle \gamma'(t), \frac{D}{dt} \gamma'(t) \right\rangle_p \\ &= 2 \left\langle \frac{D}{dt} \gamma'(t), \gamma'(t) \right\rangle_p. \end{aligned}$$

پس داریم

$$\left\langle \frac{D}{dt} \gamma'(t), \gamma'(t) \right\rangle_p = 0.$$

در نتیجه $\frac{D}{dt} \gamma'(t)$ بر $\gamma'(t)$ عمود است. لذا در امتداد N بردار یکه قائم بر منحنی قرار دارد
 و می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{D}{dt} \gamma'(t) = KN.$$

که در آن ضریب K یک تابع عددی است. از آنجا داریم

$$\left\langle \frac{D}{dt} \gamma'(t), \gamma'(t) \right\rangle = \langle KN, \gamma'(t) \rangle = K \langle N, \gamma'(t) \rangle = K \cdot 0 = 0.$$

با جایگذاری در رابطه بالا داریم $\frac{D}{dt}\gamma'(t) = 0$ و در نتیجه بنا بر تعریف $\gamma(t)$ یک ژئودزیک است. $\square$

تعریف ۵.۹.۵. فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی n -بعدی و $p \in M$ باشد. اگر در یک همسایگی $U \subset M$ از نقطه p ، n میدان برداری $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{X}(U)$ موجود باشند که در هر نقطه از U یک و قائم بوده (یعنی $g(E_i, E_j)(q) = \delta_{ij}$ برای $\forall q \in U$) و در نقطه p در رابطه $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$ صدق کنند، آنگاه خانواده $\{E_i\}$ را یک قاب ژئودزیکی موضعی^{۲۵} در نقطه p می نامیم.

در اینجا یک خانواده از میدان های برداری یک و قائم را در نظر می گیریم که در تمام نقاط همسایگی $U \subset M$ از نقطه p یک و قائم باشند. وجود چنین مختصاتی در هر نقطه از همسایگی U در بخش همسایگی نرمال ثابت شده است.

مثال ۶.۹.۵. فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی n -بعدی و $p \in M$ باشد. اگر خانواده $\{E_i\}$ یک قاب ژئودزیکی در $p \in M$ باشد، تعریف ۵.۹.۵ را ببینید. در این صورت نشان دهید:

$$\begin{aligned} \text{grad}f(p) &= \sum_{i=1}^n (E_i(f)) E_i(p), \\ \text{div}X(p) &= \sum_{i=1}^n E_i(X^i)(p), \end{aligned}$$

که در آن $X = \sum_{i=1}^n X^i E_i$.

اثبات. بنا بر تعریف داریم $\langle \text{grad}f(p), V \rangle = df_p(V)$ پس هرگاه $V = \sum_{i=1}^n v^i E_i$ در این صورت $\langle \text{grad}f(p), V \rangle = df_p(V) = (V.f)_p = \sum_{i=1}^n (E_i(f)) v^i$

طرفی

$$\begin{aligned} \langle \text{grad} f(p), \sum_{i=1}^n v^i E_i \rangle &= \sum_{i=1}^n v^i \langle \text{grad} f(p), E_i \rangle = \sum_{i=1}^n (E_i(f)) v^i. \\ \langle \text{grad} f(p), E_i \rangle &= \sum_{i=1}^n (E_i(f)). \end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n E_i(f) &= \sum_{i=1}^n E_i(f) \langle E_i, E_i \rangle \\ &= \langle \sum_{i=1}^n E_i(f) E_i, E_i \rangle = \langle \text{grad} f(p), E_i \rangle. \end{aligned}$$

در نتیجه داریم $\text{grad} f(p) = \sum_{i=1}^n E_i(f) E_i$. پس رابطه اول حکم بدست می آید. برای اثبات رابطه دوم قاب ژنودزیک $\{E_i\}_{i=1}^n$ را در $p \in M$ در نظر می گیریم. بنا بر تعریف دیورژانس داریم

$$\text{div} X(p) = \text{trace}(\nabla_Y X(p)).$$

حال با فرض $X = \sum_{i=1}^n X^i E_i$ ، دیورژانس $\text{div} X$ را در پایه متعامد $\{E_i\}_{i=1}^n$ محاسبه می کنیم.

$$\nabla_{E_i} X = \nabla_{E_i} X^j E_j = (E_i \cdot X^j) E_j + X^j \nabla_{E_i} E_j \implies \nabla_{E_i} X = (E_i X^j) E_j.$$

پس داریم

$$(\text{div} X)(p) = \text{tr}((E_i X^j) E_j) = E_i X^i$$

□ در نتیجه $\text{div} X(p) = \sum_{i=1}^n E_i(X^i)(p)$ لذا حکم ثابت می شود.

تعریف ۷.۹.۵. فرض کنید (M, g) یک منیفلد ریمانی باشد. عملگر لاپلاسین^{۲۶} روی

M را به صورت زیر تعریف می کنیم. $\Delta : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$

$$\Delta f = \text{div}(\text{grad} f)$$

^{۲۶}Laplacian operator

که در آن $f \in C^\infty(M)$.

مثال ۸.۹.۵. هرگاه $\{E_i\}$ یک قاب ژئودزیک در نقطه $p \in M$ و $i = 1, \dots, n$ باشد، آنگاه لاپلاسیان هر تابع $f \in C^\infty(M)$ به صورت زیر نوشته می شود.

$$\Delta f(p) = \sum_{i=1}^n E_i(E_i(f))(p).$$

و اگر $M = \mathbb{R}^n$ باشد، در این صورت لاپلاسیان این تابع به شکل متعارف در ریاضیات عمومی یعنی به صورت زیر نوشته می شود.

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

اثبات. فرض کنیم $\{E_i\}_{i=1}^n$ یک قاب ژئودزیک در $p \in M$ باشد. در این صورت در یک پایه متعامد یکه داریم $\nabla_{E_j} E_i(p) = \delta_{ij}$. حال بنا بر تعریف لاپلاسیان، برای تابع $f \in C^\infty(M)$ داریم

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^n (E_i(f)) E_i(p)\right).$$

لذا در یک پایه متعامد یکه داریم

$$\nabla_{E_i}(E_j(f)) E_j = (E_i E_j(f)) E_j + (E_j(f)) \nabla_{E_i} E_j = (E_i E_j(f)) E_j.$$

پس بنابه تعریف دیورژانس داریم

$$\Delta f(p) = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \operatorname{tr}(E_i E_j(f)) E_j = E_i(E_i(f)).$$

در نتیجه

$$\Delta f(p) = \sum_{i=1}^n E_i(E_i(f))(p).$$

حال اگر $M = \mathbb{R}^n$ و $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ پایه‌ای برای $T_p M$ باشد، بنا بر تعریف لاپلاسین داریم

$$\begin{aligned}\Delta f(p) &= \text{div}(\text{grad } f) = \text{tr}(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}(\frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j})) \\ &= \text{tr}((\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})(\frac{\partial}{\partial x_j})) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{(\partial x_i)^2}\end{aligned}$$

□

تمرین ۹.۹.۵. فرض کنید (M, g) یک منیفلد ریمانی باشد. نشان دهید

$$\Delta(f.g) = f\Delta g + g\Delta f + 2 \langle \text{grad} f, \text{grad} g \rangle .$$

راهنمایی. از تعریف و مثال بالا استفاده کرده ابتدا نشان دهید

$$\Delta(f.g) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial}{\partial x_i}(f.g)) = f\Delta g + g\Delta f + 2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

۱۰.۵ انتگرال روی منیفلدهای ریمانی و قضیه هاف

در درس هندسه منیفلد ۱ با مفهوم انتگرال فرم ها روی منیفلدها آشنا شده ایم. در اینجا این مفهوم را برای منیفلدهای ریمانی بیان نموده و کاربردهایی از آن مانند قضیه هاف را ذکر می کنیم. قضیه هاف^{۲۷}، از قضایای جالب مربوط به آنالیز روی منیفلدها است که روش بکار برده شده در اثبات آن، بسیار مورد توجه ریاضیدانان بوده و مکررا در اثبات قضایای جدید از آن استفاده می شود. از این رو در اینجا مقدمات لازم برای اثبات آن را می آوریم.

^{۲۷} E. Hoph

ابتدا چند مفهوم مقدماتی برای بیان این قضیه را می آوریم. فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی جهت پذیر n بعدی و $p \in M$ یک نقطه دلخواه باشد. میدانیم چون M جهت پذیر است، یک n -فرم غیر صفر روی آن وجود دارد. (کتاب [۲] را ببینید.) اگر n -تایی $\{X_1, \dots, X_n\}$ یک پایه متعامد یک جهت دار برای $T_p M$ باشد، آنگاه این n -فرم به صورت یکتا در رابطه زیر صدق می کند.

$$\omega(X_1, \dots, X_n) = 1$$

این n -فرم را عنصر حجمی^{۲۸} یا فرم حجمی وابسته به متریک ریمانی می نامند. در حقیقت ثابت می شود که اگر n -تایی $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$ دوگان $\{X_1, \dots, X_n\}$ باشد، آنگاه

$$\omega = \pm \sqrt{\det g_{ij}} \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n.$$

که در آن $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$ بوده و علامت مثبت یا منفی مربوط به همجهت یا خلاف جهت بودن n -تایی با جهت منیفلد است. از نظر هندسی چون n -تایی فوق متعامد یک است، حجم متوازی السطوحی که روی آن تعریف می شود برابر یک است. از آنجا حجم منیفلد ریمانی (M, g) برابر است با $\text{volume } M = \int_M \omega$. اما کاربرد فرم حجمی به همین جا ختم نمی شود، بلکه کاربرد اصلی آن در تعریف انتگرال توابع روی منیفلدها است، نه فقط انتگرال از فرم ها. به عبارت دیگر اگر ω یک n -فرم دارای محمل فشرده (روی حوزه تعریف خود) باشد، برای تعریف انتگرال روی منیفلد جهت پذیر (M, g) دیگر شرط فشردگی منیفلد لازم نبوده و عبارت $\int_M f \omega$ به عنوان انتگرال تابع f روی منیفلد (M, g) قابل تعریف می باشد.

صورت قضیه استوکس^{۲۹} روی منیفلدها را یادآور می شویم. فصل هفتم از کتاب [۲]

را ببینید.

^{۲۸} volume form or element

^{۲۹}Stoke's theorem

قضیه استوکس: فرض کنیم M یک منیفلد مرزدار و جهت پذیر به بعد n باشد، اگر ω یک فرم $(n-1)$ - فرم با محمل فشرده روی M باشد در این صورت داریم

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

همچنین یادآوری می کنیم که $i_X \omega$ ضرب درونی یک k -فرم ω در یک میدان برداری X یک $(k-1)$ -فرم است که توسط رابطه زیر تعریف می شود.

$$i_X \omega(Y_1, \dots, Y_{k-1}) = \omega(X, Y_1, \dots, Y_{k-1}). \quad (22.5)$$

لم ۱۰.۱۰.۵. فرض کنید M یک منیفلد ریمانی جهت پذیر n - بعدی باشد. اگر V عنصر حجمی M باشد آنگاه

$$d(i_X V) = (\operatorname{div} X)V.$$

اثبات. فرض می کنیم $p \in M$ یک نقطه دلخواه باشد. می دانیم بنا بر تعریف ۵.۹.۵ در صفحه ۱۵۴ یک همسایگی $U \subset M$ از p و n میدان برداری $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{X}(U)$ ، که در هر نقطه از U دوجه دو بر هم عمودند، وجود دارند که در رابطه $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$ صدق می کنند، در این صورت $\{E_i\}$ را یک قاب ژنودزیکی در p نامیدیم. ^{۳۰} در این پایه می توان X را به صورت $\sum_i f_i E_i$ نوشت. فرض می کنیم $\{\omega_i\}_{i=1}^n$ مجموعه ای از 1 -فرم ها باشد که در یک همسایگی p تعریف شده و در رابطه $\omega_i(E_j) = \delta_{ij}$ صدق می کند. با توجه به نحوه انتخاب ω_i ها داریم $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n(E_1, \dots, E_n) = 1$. بنابراین $V = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n$

عنصر حجمی M است. حال قرار می‌دهیم $\theta_i = \omega_1 \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_i \wedge \dots \wedge \omega_n$ داریم

$$\begin{aligned} i_X V(Y_1, \dots, Y_{n-1}) &= V(\sum_i f_i E_i, Y_1, \dots, Y_{n-1}) =, \\ \sum_i f_i V(E_i, Y_1, \dots, Y_{n-1}) &= \sum_i f_i \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n(E_i, Y_1, \dots, Y_{n-1}) =, \\ \sum_i \sum_j (-1)^{j+1} f_i \omega_j(E_i) \omega_1 \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_j \wedge \dots \wedge \omega_n(Y_1, \dots, Y_{n-1}). \end{aligned}$$

با توجه به اینکه $\omega_j(E_i) = \delta_{ij}$ رابطه فوق به صورت زیر نوشته می‌شود

$$i_X V(Y_1, \dots, Y_{n-1}) = \sum_i f_i (-1)^{i+1} \omega_1 \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_i \wedge \dots \wedge \omega_n(Y_1, \dots, Y_{n-1})$$

لذا داریم

$$i_X V = \sum_i (-1)^{i+1} f_i \theta_i.$$

بنابراین خواهیم داشت

$$\begin{aligned} d(i_X V) &= \sum_i (-1)^{i+1} df_i \wedge \theta_i + \sum_i (-1)^{i+1} f_i \wedge d\theta_i =, \\ \sum_i (-1)^{i+1} (\sum_k E_k(f_i) \omega_k) \wedge \theta_i + \sum_i (-1)^{i+1} f_i \wedge d\theta_i &=, \\ (\sum_i E_i(f_i)) V + \sum_i (-1)^{i+1} f_i \wedge d\theta_i. \end{aligned}$$

اما در نقطه p داریم $d\theta_i = 0$ زیرا:

$$\begin{aligned} d\omega_k(E_i, E_j) &= E_i \omega_k(E_j) - E_j \omega_k(E_i) - \omega_k([E_i, E_j]) \\ &= \omega_k(\nabla_{E_i} E_j - \nabla_{E_j} E_i) = 0. \end{aligned}$$

طبق آنچه در مثال ۳.۹.۵ در صفحه ۱۵۲ دیدیم، $\operatorname{div} X(p) = \sum_i E_i(f_i)(p)$ ، بنابراین با توجه به روابط فوق $d(i_X V)(p) = (\operatorname{div} X(p))V$ و چون p دلخواه است، رابطه حکم برای تمام نقاط M برقرار است. $\square$

با توجه به لم بالا می توان دیورژانس را به صورت یک عملگر به شکل زیر تعریف کرد.

تعریف ۲.۱۰.۵. فرض کنید (M, g) یک منیفلد ریمانی جهت پذیر با عنصر حجمی V باشد. عملگر دیورژانس را به صورت زیر تعریف می کنیم. $div : \mathcal{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$

$$d(i_X V) = (div X)V.$$

اگر تابع دیفرانسیل پذیر f روی M در رابطه $\Delta f \geq 0$ صدق کند، انرا تابع هارمونیک^{۳۱} می نامیم.

قضیه ۳.۱۰.۵. قضیه هاف: فرض کنید (M, g) یک منیفلد ریمانی فشرده همبند و جهت پذیر باشد. همچنین فرض کنید f یک تابع دیفرانسیل پذیر روی M باشد که $\Delta f \geq 0$. آنگاه f ثابت است، به ویژه توابع هارمونیک روی M ، یعنی توابعی که برای آنها $\Delta f = 0$ ، ثابت هستند.

اثبات. قضیه هاف. فرض کنید (M, g) یک منیفلد ریمانی بدون مرز (یعنی $\partial M = \emptyset$) باشد. قرار می دهیم $grad f = X$ با توجه به لم ۱.۱۰.۵ داریم:

$$(div X)V = d(i_X V)$$

از طرفی بنا بر تعریف $\Delta f = div(grad f)$ و با استفاده از قضیه استوکس رابطه زیر برقرار است.

$$\int_M (\Delta f)V = \int_M (div X)V = \int_M d(i_X V) = \int_{\partial M} i_X V = 0.$$

که در آن تساوی آخر به علت تهی بودن مرز M و در نتیجه صفر شدن انتگرال برقرار است. چون $\Delta f \geq 0$ از رابطه بالا نتیجه می شود $\Delta f = 0$.

^{۳۱}harmonic

با فرض $Y = \nabla \left(\frac{f^2}{2} \right)$ و استفاده مجدد از قضیه استوکس داریم:

$$\int_M \Delta \left(\frac{f^2}{2} \right) V = \int_M (\operatorname{div}(\nabla \frac{f^2}{2})) V = \int_M d(i_Y V) = \int_{\partial M} i_Y V = 0.$$

حال با استفاده از تمرین ۹.۹.۵ در صفحه ۱۵۷ داریم:

$$\Delta \left(\frac{f^2}{2} \right) = \frac{1}{2} (f \Delta f + f \Delta f + 2 \langle \nabla f, \nabla f \rangle) = f \Delta f + |\nabla f|^2.$$

$$0 = \int_M \Delta \left(\frac{f^2}{2} \right) V = \int_M (f \Delta f) V + \int_M |\nabla f|^2 V = \int_M |\nabla f|^2 V.$$

پس $\nabla f = 0$ و با توجه به همبند بودن M نتیجه می‌شود f ثابت است. $\square$

تمرین ۴.۱۰.۵. فرض کنید M یک منیفلد ریمانی و $X \in \mathcal{X}(M)$. فرض کنید $p \in M$ طوری باشد که $X(p) \neq 0$. یک دستگاه مختصات $(t, x_1, \dots, x_n)$ در یک همسایگی U از p انتخاب کنید که $\frac{\partial}{\partial t} = X$ نشان دهید اگر $V = g dt \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ عنصر حجمی M در این دستگاه مختصات باشد داریم:

$$i_X V = g dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

از این رابطه نتیجه بگیرید $\operatorname{div} X = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial t}$.

راهنمایی. با فرض $\frac{\partial}{\partial t} = X$ از تمرین ۱.۱۰.۵ استفاده کنید. نتیجه کار خود را با آنچه در فصل آخر کتاب آورده شده است، مقایسه کنید.

۱۱.۵ قضیه دیورژانس و فرمول انتگرال گیری جز به جز روی منیفلد ها

قضیه ۱۱.۵.۱. قضیه دیورژانس. فرض کنید (M, g) یک منیفلد ریمانی فشرده مرزدار و جهت پذیر باشد. آنگاه $\forall X \in \mathcal{X}(M)$

$$\int_M \operatorname{div} X \, d\mu = \int_{\partial M} \langle X, N \rangle \, d\sigma$$

که در آن $d\mu$ فرم حجمی ریمانی متریک (M, g) ، N بردار یکه عمود و به سمت بیرون مرز آن یا ∂M و $d\sigma$ فرم حجمی ریمانی متریک القایی به روی ∂M است.

اثبات. قضیه دیورژانس. فرض کنیم e_i ، $i = 1, \dots, n$ یک پایه متعامد یک $T_p M$ و ω^i پایه دوگان آن باشد. در این صورت فرم حجمی (M, g) عبارت است از $d\mu = \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^n$. فرم حجمی ∂M را بصورت زیر تعریف می کنیم

$$d\sigma = \omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^n.$$

اگر قرار دهیم $N = e_1$ بنا بر رابطه ۲۲.۵ در صفحه ۱۵۹ داریم

$$(i_N d\mu)(e_2, \dots, e_n) = d\mu(e_1, e_2, \dots, e_n).$$

از طرف دیگر

$$(d\sigma)(e_2, \dots, e_n) = (\omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^n)(e_2, \dots, e_n).$$

پس داریم $d\sigma = i_N(d\mu)$. حال $(n-1)$ -فرم α را بصورت زیر تعریف می کنیم

$$\alpha =: i_X(d\mu)$$

با دیفرانسیل گیری از این رابطه و استفاده از لم ۱.۱۰.۵ داریم

$$d\alpha = di_X(d\mu) = \text{div}(X)d\mu.$$

حال با استفاده از قضیه استوکس حکم ثابت می شود.

$$\int_M \text{div}(X)d\mu = \int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha = \int_{\partial M} i_X(d\mu) = \int_{\partial M} \langle X, N \rangle d\sigma$$

که تساوی آخر بصورت زیر بدست آمده است

$$\begin{aligned} (i_X(d\mu))(e_1, \dots, e_n) &= (d\mu)(X, e_1, \dots, e_n), \\ &= \langle X, N \rangle (d\mu)(e_1, \dots, e_n), \\ &= \langle X, N \rangle (d\sigma)(e_1, \dots, e_n). \end{aligned}$$

□

با استفاده از قضیه دیورژانس می توان فرمول انتگرال جز به جز روی منیفلد ها را به دست آورد.

گزاره ۲.۱۱.۵. فرض کنید (M, g) یک منیفلد ریمانی جهت پذیر و $f \in C^\infty(M)$ باشد. آنگاه عملگر دیورژانس در رابطه زیر صدق می کند.

$$\text{div}(f X) = f \text{div} X + \langle \text{grad} f, X \rangle. \quad (23.5)$$

این رابطه را می توان به صورت رابطه زیر موسوم به فرمول انتگرال جز به جز نوشت.

$$\int_M \langle \text{grad} f, X \rangle d\mu = - \int_M f \text{div} X d\mu + \int_{\partial M} f \langle X, N \rangle d\sigma. \quad (24.5)$$

که در آن N بردار یکه عمود و به سمت بیرون مرز ∂M است.

تمرین ۳.۱۱.۵. گزاره فوق را ثابت کنید.

روابط زیر موسوم به فرمول گرین^{۳۲} و فرمول آستروگرادسکی^{۳۳} در هندسه ریمانی برقرار است. و

گزاره ۴.۱۱.۵. فرض کنید (M, g) یک منیفلد ریمانی همبند، فشرد، مرزدار و جهت پذیر باشد. آنگاه $\forall f, h \in C^\infty(M)$ رابطه زیر موسوم به فرمول های گرین برقرار است.

$$\int_M f \Delta h \, d\mu + \int_M \langle \text{grad } f, \text{grad } h \rangle \, d\mu = \int_{\partial M} f N h \, d\sigma. \quad (۲۵.۵)$$

$$\int_M (f \Delta h - h \Delta f) \, d\mu = \int_{\partial M} (f N h - h N f) \, d\sigma. \quad (۲۶.۵)$$

که در آن $d\mu$ فرم حجمی ریمانی متریک (M, g) ، N بردار یکه عمود و به سمت بیرون مرز ∂M و $d\sigma$ فرم حجمی ریمانی متریک القایی به روی ∂M است.

اثبات. برای اثبات این رابطه ابتدا نشان می دهیم که عملگر همدیفرانسیل به طور مشابه با عملگر دیورژانس در رابطه زیر صدق می کند.

$$\delta(f \, dh) = f \Delta h - \langle df, dh \rangle$$

سپس از لم ۱.۱۰.۵ و قضیه استوکس استفاده می کنیم. □

تمرین ۵.۱۱.۵. اثبات گزاره ۴.۱۱.۵ را کامل کنید.

تمرین ۶.۱۱.۵. اگر مرز منیفلد تهی باشد، نشان دهید که تنها توابع هارمونیک روی آن منیفلد، توابع ثابت هستند.

راهنمایی. از تعریف توابع هارمونیک و فرمول های گزاره ۴.۱۱.۵ استفاده کنید.

^{۳۲}Green formula

^{۳۳}Ostrogradski formula

نظریه منحنی ها در منیفلدهای ریمانی^۱

در این فصل ضمن معرفی مبانی نظریه منحنی ها، حالت کلی فرمول های فرنه^۲ روی منیفلدهای ریمانی را بیان می کنیم. بدیهی است با این فرمول بسیاری از مفاهیم نظریه منحنی های اقلیدسی را می توان برای منیفلدهای ریمانی تعمیم داد. بعد از تعمیم مفهوم خط راست، به نام ژئودزیک، که در فصول قبل به آن پرداختیم در اینجا به تعمیم مفهوم دایره می پردازیم.

^۱Theory of curves

^۲ Jean Fredric Frenet ریاضیدان آلمانی که در سالهای ۱۸۱۶-۱۸۶۸ می زیسته است.

تعریف این مفهوم جدید را که به دایره ژئودزیک معروف است، در بخش ۲ بیان نموده اشاره ای به یک خاصیت جالب آن می کنیم. ابتدا معادله دیفرانسیل یک دایره ژئودزیک را در منیفلد ریمانی (M, g) به دست می آوریم. در اینجا برای اولین بار به یک خاصیت شگفت انگیز دایره ژئودزیک پی می بریم. این خاصیت جالب که تاکنون در هیچ کتاب یا مقاله ای به آن اشاره نشده است، آن است که اگر از معادله دیفرانسیل دایره ژئودزیک مشتق همگردد بگیریم، خانواده‌های از منحنیهای روی کره S^2 را به دست می آوریم. برای اطلاعات بیشتر در این مورد خواننده علاقه مند می تواند به تز دکترای [۲۴] مراجعه نماید.

۱.۶ فرمول های فرنه در منیفلدهای ریمانی

فرمول های فرنه ابتدا در سال ۱۸۴۷ توسط خود وی و سپس مستقلاً در چهار سال بعد توسط سره ۳ مطرح گردید. از اینرو آن را فرمول های فرنه-سزه نیز می گویند. فرمول های فرنه از چند جهت حائز اهمیت هستند. اول آنکه اساس مطالعه نظریه منحنی ها بوده و با استفاده از آن ها قضایای اساسی این نظریه به اثبات می رسد. دوم آنکه با استفاده از این فرمول ها می توان معادله منحنی ها در فضا را به شکل ساده ای نوشت، که آن را معادله ذاتی منحنی می نامند. به عنوان مثال معادله ذاتی دایره S^1 را با $\kappa = 1$ و معادله ذاتی مارپیچ را با $\tau = 1/\kappa$ نمایش می دهیم که در آن κ و τ به ترتیب انحنا و تاب منحنی هستند. اهمیت دیگر فرمول های فرنه در آن است که می توان مشتقات بردارهای پایه را بر حسب اعضای پایه نوشت. این موضوع در فصل ۹ در صفحه ۲۱۹ برای تعریف فرم های التصاق کارتان مورد استفاده قرار می گیرد.

در این بخش فرض می کنیم که (M, g) یک منیفلد ریمانی c^∞ به بعد n و

$$C : [a, b] \rightarrow M$$

$$t \rightarrow C(t)$$

یک منحنی هموار از کلاس c^k روی M به معادله پارامتری $C(t) = (x^i(t))$ باشد که در $i = 1, \dots, n$ فرض کنیم که مشتقات dx^i/dt همگی با هم صفر نباشند یا به عبارت دیگر C یک جادهنده باشد. از آنجا می توان منحنی C را با استفاده از فرمول طول قوس

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt$$

و با نقطه شروع $C(t_0)$ بر حسب پارامتر طبیعی جهت دار طول قوس s نوشت. لذا معادله طبیعی این منحنی را به صورت $C(s) = (x^i(s))$ در نظر می گیریم. فرض کنیم $V = \frac{d}{ds}$ میدان بردار مماس در طول منحنی C باشد. چون C یک جادهنده است، در هر نقطه M داریم $V \neq 0$. در نتیجه بردار مماس را می توان بر اندازه آن تقسیم نموده و بردار یک مماس را به صورت $\frac{V}{\|V\|}$ نوشت، که در آن $\|V\| = \sqrt{g(V, V)}$. در اینجا بردار یک مماس را با علامت $V_{(1)} := x' = dx/ds$ نمایش می دهیم و آن را بردار یک مماس اول^۴ در طول منحنی C می نامیم. از آنجا داریم

$$g(V_{(1)}, V_{(1)}) = 1, \quad (1.6)$$

امشتق همگرد در طول منحنی $C(s)$ را با $\frac{D}{ds}$ نمایش می دهیم. فرض کنیم $k_1 = \|\frac{D}{ds} V_{(1)}\|$ در یک همسایگی باز منحنی $C(s)$ که در آن $k_1 \neq 0$ باشد، می توان بردار متعامد یک اول^۵ را به صورت زیر تعریف نمود. $D/ds V_{(1)} = k_1 V_{(1)}$ به همان

^۴first unit tangent vector field

^۵second unit normal vector or principal normal

روشی که در ریاضی عمومی و هندسه اقلیدسی به کار می رود، می توان فرمول های فرنه^۶ را در روی منیفلدهای ریمانی به بعد n به دست آورد.^۷

$$\begin{aligned}\frac{D}{ds} V_{(1)} &= k_1 V_{(1)}, \\ \frac{D}{ds} V_{(\alpha)} &= -k_{\alpha-1} V_{(\alpha-1)} + k_{\alpha} V_{(\alpha+1)}, \\ \frac{D}{ds} V_{(n)} &= -k_{n-1} V_{(n-1)},\end{aligned}\quad (2.6)$$

که در آن $\alpha = 1, \dots, n$. همچنین قرارداد می کنیم که $k_n = 0$. مقادیر $k_1, \dots, k_{n-1}$ را که پایاهای متریکی هستند، یعنی به متریک ریمانی g بستگی ندارند را به ترتیب انحنای متوالی فرنه^۸ منحنی C می نامیم. در درس حسابان انحنای اول و دوم k_1 و k_2 را به ترتیب با κ و τ نمایش می دادیم. بردارهای یکه دو به دو عمود بر هم $V_{(1)}, V_{(2)}, \dots, V_{(n)}$ را که در رابطه

$$g(V_{(\alpha)}, V_{(\beta)}) = \delta_{\beta}^{\alpha}. \quad (3.6)$$

صدق می کنند را به ترتیب بردارهای متوالی متعامد یکه وابسته به متریک ریمانی g می نامیم. اگر مولفه های بردارهای متوالی متعامد یکه را با $v_{(1)}^i = v^i, v_{(2)}^i, \dots, v_{(n)}^i$ نمایش دهیم، آنگاه در دستگاه مختصات موضعی رابطه (۳.۶) را می توان به صورت $v_{(\alpha)}^i v_{(\beta)}^j = \delta_{\beta}^{\alpha} g_{ij}(x)$ نوشت، که در آن $\alpha, \beta = 1, \dots, n$ و δ_{β}^{α} دلتای کرونکر هستند.

تمرین ۱.۱.۶. اگر (M, g) یک منیفلد ریمانی به بعد n و C یک منحنی هموار روی M باشد، نشان دهید که C ژئودزیک (M, g) است، اگر و تنها اگر انحنای اول فرنه آن صفر

^۶Frenet formula

^۷ صفحه ۱۰۳ از کتاب [۴۳] را ببینید.

^۸Frenet successiveCurvatures

باشد.

راهنمایی. از تعریف انحنای اول فرنه و فرمول مشتق گیری همگرد، استفاده نموده معادله دیفرانسیل ژئودزیکها را به دست آورید.

۲.۶ دایره ژئودزیک روی منیفلدهای ریمانی

دایره ژئودزیک تعمیم مفهوم دایره در فضای اقلیدسی است.

تعریف ۱.۲.۶. اگر C یک منحنی هموار روی M باشد، به طوری که k_1 انحنای اول فرنه آن ثابت بوده و k_2 دومین انحنای فرنه آن صفر باشد،

$$\frac{dk_1}{ds} = 0, \quad k_2 = 0.$$

آنگاه آن منحنی را یک دایره ژئودزیک^۹ می نامیم.

مثال ۲.۲.۶. دایره های ژئودزیک تعمیمی از خط راست و دایره در $\mathbb{R}^n$ هستند.

در مثال زیر معادله دیفرانسیل یک دایره ژئودزیک را به دست می آوریم. [۲۴]

مثال ۳.۲.۶. فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی و C یک منحنی هموار روی M باشد. منحنی C دایره ژئودزیک است اگر و تنها اگر در معادله دیفرانسیل زیر صدق کند.

$$x''' + \langle x'', x'' \rangle x' = 0,$$

در اینجا $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ضرب داخلی تعریف شده توسط متریک ریمانی g روی فضای مماس در هر نقطه و x' بردار یکه مماس بر منحنی C در آن نقطه است.

^۹geodesic circle

اثبات. فرض کنیم C یک دایره ژئودزیک روی M باشد که بر حسب پارامتر طبیعی طول قوس با معادله $x^i = x^i(s)$ داده شده است. برای یک دایره ژئودزیک با توجه به فرمول های فرنه داریم

$$\frac{DV_{(1)}}{ds} = k_1 V_{(1)}, \quad \frac{DV_{(2)}}{ds} = -k_1 V_{(1)}, \quad (4.6)$$

با مشتق گیری همگرد از رابطه سمت چپ (۴.۶) و استفاده از رابطه سمت راست آن داریم

$$\frac{D^2 V_{(1)}}{ds^2} + k_1^2 V_{(1)} = 0. \quad (5.6)$$

از طرف دیگر با استفاده از رابطه (۱.۶) و فرمول اول فرنه در (۲.۶)، برای هر منحنی دلخواه C داریم

$$k_1^2 = \left\langle \frac{DV_{(1)}}{ds}, \frac{DV_{(1)}}{ds} \right\rangle. \quad (6.6)$$

در دستگاه مختصات موضعی رابطه فوق را می توان به شکل زیر نوشت. $(k_1)^2 =$

$$g_{ij} \frac{Dv^i}{ds} \frac{Dv^j}{ds}.$$

می توان نوشت

$$\frac{D^3 x^i}{ds^3} + g_{hj} \frac{D^2 x^h}{ds^2} \frac{D^2 x^j}{ds^2} \frac{Dx^i}{ds} = 0. \quad (7.6)$$

با استفاده از نمادهای Dx^i/ds ، $D^2 x^i/ds^2$ و $D^3 x^i/ds^3$ برای x' ، x'' و x''' ، معادله دیفرانسیل دایره ژئودزیک به دست می آید.

$$x''' + \langle x'', x'' \rangle x' = 0, \quad (8.6)$$

که در آن $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ضرب داخلی دو بردار، تعریف شده توسط متریک ریمانی g است.

□

عکس این موضوع به عنوان تمرین واگذار می شود.

تمرین ۴.۲.۶. اگر (M, g) یک منیفلد ریمانی و C یک منحنی هموار روی M باشد که در معادله دیفرانسیل (۸.۶) صدق می کند، آنگاه C یک دایره ژئودزیک است.

راهنمایی. از فرمول فرنه و مشتق گیری همگرد، استفاده نموده معادله دیفرانسیل زیر را به دست آورید.

$$\frac{Dk_1^2}{ds} = 2g_{ij} \frac{D^2 v^i}{ds^2} \frac{Dv^j}{ds} = 2g_{ij} (-k_1^2) v^i \frac{Dv^j}{ds} = 0,$$

از آنجا نتیجه بگیرید که k_1 ثابت است. از رابطه $Dk_1^2/ds = 0$ ، و فرمول دوم فرنه نتیجه بگیرید

$$\frac{D^2 v^i}{ds^2} = k_1 \frac{Dv^i}{ds} = -k_1^2 v^i + k_1 k_2 v^i_{(3)}. \quad (9.6)$$

از آن نتیجه بگیرید $k_1 k_2 = 0$ ، و در مورد آن بحث کرده نشان دهید $\frac{dk_1}{dt} = 0$.

قضیه زیر یک خاصیت جالب از دایره ژئودزیک را بیان می کند. اگر از معادله دیفرانسیل دایره ژئودزیک مشتق همگرد بگیریم، خانواده های از منحنی های روی کره S^2 را به دست می آوریم. برای اثبات، خواننده علاقه مند می تواند به [۲۴] مراجعه نماید.

قضیه ۵.۲.۶. فرض کنیم که (M, g) یک منیفلد ریمانی n -بعدی و C یک دایره ژئودزیک روی M باشد. اگر از معادله دیفرانسیل C یعنی (۸.۶) مشتق همگرد بگیریم، آنگاه جوابهای معادله دیفرانسیل حاصل منحنی هایی هستند که در روی کره S^2 قرار دارند.

تمرین ۶.۲.۶. فرض کنیم C یک منحنی به معادله برداری $r(s)$ در $\mathbb{R}^3$ باشد که بر حسب پارامتر طبیعی طول قوس داده شده است. یک شرط لازم و کافی به دست آورید که منحنی C روی کره S^2 قرار داشته باشد.

راهنمایی. اگر منحنی C روی کره S^2 قرار داشته باشد، اندازه تابع برداری $^{\dagger}|r(s)| = 1$ ثابت است. از این تابع چند بار مشتق بگیرید و هر بار از فرمول های فرنه استفاده کنید، تا معادله ذاتی (یعنی معادله ای بر حسب انحنا و تاب) به دست آورید.

زیرمنیفلدهای یک منیفلد ریمانی

دیدیم که متریک ریمان یا اولین فرم اساسی^۱ یک منیفلد که از مشتقات درجه اول تشکیل شده اند یک ضرب داخلی روی فضای مماس تعریف می کنند که منشاء تعریف طول، زاویه، مساحت، حجم و دیگر مفاهیم هندسی روی آن منیفلد است. در اینجا می خواهیم ببینیم مفهومی که در روی رویه ها به آن دومین فرم اساسی گفته می شود و از مشتقات مرتبه دوم تشکیل شده اند چگونه روی منیفلدها تعریف شده و چه مشخصاتی از یک منیفلد را تعیین می کنند. در درس ریاضی عمومی دیدیم که برخی از خواص رویه ها در $\mathbb{R}^3$ مانند یافتن

^۱first fundamental form

اکسترمهای آن رویه را می‌توان با مطالعه مشتقات درجه دوم تابعی که رویه را معرفی می‌نماید بدست آورد^۲. در هندسه دیفرانسیل موضعی با استفاده از مشتقات مرتبه اول و دوم یک رویه کمیت‌هایی بنام اولین فرم اساسی یا متریک ریمانی یک رویه توسط عبارت $I = g_{11}(dx)^2 + g_{12}dxdy + g_{22}(dy)^2$ و دومین فرم اساسی^۴ یک رویه توسط عبارت $II = L(dx)^2 + 2Mdxdy + N(dy)^2$ تعریف می‌شود.^۵ همچنین در این درس آموختیم که K انحنای گاوسی یک رویه کمیت بسیار ارزشمندی است که آن را میتوان با استفاده از این کمیت‌ها توسط رابطه زیر محاسبه نمود:

$$K = \frac{|II|}{|I|}$$

در این جا $|I|$ و $|II|$ به ترتیب دترمینان اولین فرم اساسی و دترمینان دومین فرم اساسی آن رویه هستند. برای رویه S که توسط تابع حقیقی $z = f(x, y)$ تعریف می‌شود به راحتی می‌توان نشان داد که مقدار انحنای گاوسی برابر است با $K = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$. از مقدار K و علامت آن در ریاضی عمومی^۶ برای تعیین اکسترمهای نسبی^۷ یک رویه استفاده می‌کردیم. در هندسه علامت انحنای گاوسی تعبیر زیبایی به شکل زیر دارد. فرض کنیم S یک رویه هموار با انحنای گاوسی K (نه الزاما ثابت) باشد.

• اگر در تمام نقاط یک رویه $K > 0$ باشد آنگاه آن رویه محدب است. (مانند

^۲فرض کنیم معادله پارامتری رویه S توسط تابع $(x, y, f(x, y)) \rightarrow F(x, y)$ داده شده باشد. با استفاده از علامت عبارت $\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ در هر نقطه می‌توانیم اکسترمهای آن رویه را مشخص کنیم.

که در آن $g_{ij} = \langle F_i, F_j \rangle$ و $F_1 = \frac{\partial F}{\partial x} = (1, 0, f_x)$ و $F_2 = \frac{\partial F}{\partial y} = (0, 1, f_y)$

^۴second fundamental form

^۵که در آن $L = \langle F_{xx}, n \rangle$ و $M = \langle F_{xy}, n \rangle$ و $N = \langle F_{yy}, n \rangle$ بردار یکه قائم بر

رویه $n_1 = \frac{F_x \times F_y}{|F_x \times F_y|}$ است که در آن ضرایب L و M و N با استفاده از مشتقات جزئی مرتبه دوم تابع F بدست می‌آیند.

^۶اگر انحنای گاوسی $K = \Delta > 0$ و $f_{xx}(a, b) < 0$ آنگاه رویه در آن نقطه دارای ماکزیمم نسبی است. اگر در نقاطی از رویه انحنای گاوسی $K < 0$ می‌گوییم آن نقاط زینی یا هلولوی هستند. و...

سه‌میگون و کره)

• اگر در تمام نقاط یک رویه $K = 0$ باشد آنگاه آن رویه مسطح است. (مانند صفحه)

• اگر در تمام نقاط یک رویه $K < 0$ باشد آنگاه آن رویه مقعر است. (مانند هذلولیگون و شبه-کره)

دیدیم که مفهوم اولین فرم اساسی یا متریک ریمانی به راحتی برای زیرمنیفلدها قابل تعمیم است. در این فصل قصد داریم مفهوم دومین فرم اساسی را برای زیرمنیفلدها تعمیم داده و خواص آنرا مورد مطالعه قرار دهیم.

۱.۷ دومین فرم اساسی زیرمنیفلدهای ریمانی

فرض کنیم $f: M \rightarrow \bar{M}$ یک جاده‌نده^۷ باشد. در فصل متریک ریمانی مثالهایی از متریک ریمانی دیدیم که اگر $(\bar{M}, \bar{g})$ یک منیفلد ریمانی باشد آنگاه f یک متریک ریمانی روی M القا می‌کند که آنرا با g نمایش داده توسط رابطه $g = f^*\bar{g}$ تعریف می‌کنیم.

$$\forall X, Y \in \mathcal{X}(M) \quad g(X, Y) = \bar{g}(f_*X, f_*Y).$$

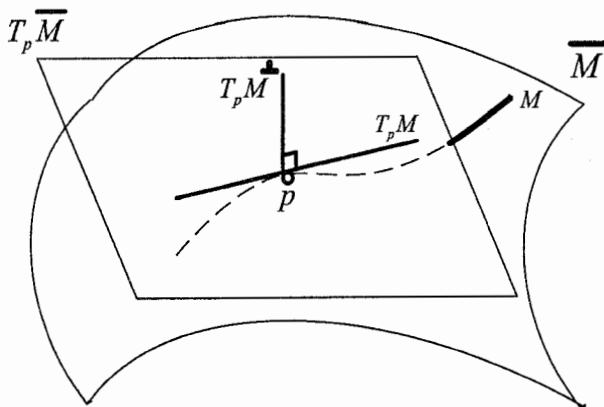
تمرین ۱.۱.۷. نشان دهید که g دو خطی، متقارن و مثبت معین است.

راهنمایی. g مثبت معین است زیرا اگر $g(X, X) = 0$ باشد، آنگاه $\bar{g}(f_*X, f_*X) = 0$ و چون $\bar{g}$ معین است $f_*X = 0$ و چون f یک به یک است پس $X = 0$. خواص دیگر g یعنی دو خطی بودن و متقارن بودن نیز به طور وضوح از $\bar{g}$ نتیجه می‌شود.

توضیح ۲.۱.۷. بنا بر قضیه ناش^۸ هر منیفلد M را می‌توان در یک فضای $\mathbb{R}^N$ (برای N های به اندازه کافی بزرگ و توسط یک نگاشت جادهنده) جا داد [۲]. لذا همواره می‌توان با در نظر گرفتن متریک کانونی یا اقلیدسی $\mathbb{R}^N$ ، یک متریک ریمانی روی M تعریف نمود که به نگاشت جادهنده بستگی دارد.

یادآوری می‌کنیم که نگاشت جادهنده $(\bar{M}, \bar{g}) \longrightarrow (M, g) : f$ یک ایزومتري است اگر $g = f^* \bar{g}$ باشد.

فرض کنیم $M \subset \bar{M}$ زیرمنیفلدی از $\bar{M}$ باشد و $i : M \longrightarrow \bar{M}$ نگاشت شمول کانونی باشد. در هر نقطه $p \in M$ ، $i_*(T_p M)$ یک زیرفضای برداری از $T_{i(p)} \bar{M}$ یعنی $T_p \bar{M}$ است که می‌توان آن را با $T_p M$ یکی گرفت (زیرا i_* یک به یک است). با توجه به این موضوع، در این بخش همه جا فرض شده است که $T_p M$ یک زیر فضای برداری $T_p \bar{M}$ است. وجود یک نگاشت جادهنده، وجود یک متر ریمان روی $M \subset \bar{M}$ را تضمین



شکل ۱.۷: فضای مماس بر منیفلد بزرگتر $M \subset \bar{M}$ ، را می‌توان به صورت جمع مستقیم دو زیرفضا $T_p M$ و $T_p M^\perp$ نوشت.

^۸Nash

می‌کند از آنجا برای هر نقطه $p \in M$ یک ضرب داخلی روی $T_p\bar{M}$ تعریف می‌شود که با استفاده از آن می‌توان $T_p\bar{M}$ را به صورت جمع مستقیم دو زیرفضا نوشت. یک زیرفضا T_pM و دیگری مکمل قائم آن در $T_p\bar{M}$ که توسط $T_pM^\perp$ نشان داده شده و به ترتیب زیرفضای مماسی و زیرفضای نرمال نامیده می‌شوند.

$$T_p\bar{M} = T_pM \oplus T_pM^\perp. \quad (1.7)$$

میدان برداری

$$v^\perp : p \in M \longrightarrow v_p^\perp \in T_pM^\perp,$$

را میدان برداری قائم (نرمال) و میدان برداری

$$v^\top : p \in M \longrightarrow v_p^\top \in T_pM^\top,$$

را میدان برداری مماسی می‌نامند. حال فرض کنیم X یک میدان برداری مماسی روی M در همسایگی U از نقطه $p \in M$ باشد. با فرض به اندازه کافی کوچک بودن U می‌توان X را به یک میدان برداری مماسی $\bar{X}$ روی $\bar{M}$ در همسایگی $\bar{U}$ از نقطه p (در $\bar{M}$)، توسعه داد. زیرا در حقیقت $i : M \rightarrow \bar{M}$ یک جا دهنده است و بنابر قضیه رتبه در یک همسایگی به اندازه کافی کوچک p و در مختصات موضعی می‌توان نوشت:

$$i : U \longrightarrow \bar{U}$$

$$x \mapsto (x, 0)$$

لذا به طور طبیعی می‌توان X را روی $\bar{U}$ توسعه داد. همین استدلال را می‌توان برای میدان های برداری قائم نیز به کار برد. لذا در ادامه این بخش اگر X و Y و $Z \dots$ میدان های برداری در همسایگی U از نقطه $p \in M$ باشند، بازه U طوری فرض می‌شود که بتوان این

میدان های برداری را روی $\bar{M}$ توسعه داد. در نتیجه با تسامح در نماد گذاری $\bar{X}$ و $\bar{Y}$ و $\bar{Z}$ را توسیع های موضعی X و Y و Z می خوانیم.

گزاره های زیر مجوزی است برای تعریف التصاق $\bar{\nabla}$.

گزاره ۳.۱.۷. فرض کنیم X و Y دو میدان برداری روی M در همسایگی U از نقطه p بوده و $\bar{X}$ و $\bar{Y}$ دو توسیع موضعی به همسایگی $\bar{U}$ از p در $\bar{M}$ باشند، آنگاه اگر $\bar{\nabla}$ یک التصاق روی $\bar{M}$ باشد داریم

$$\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} = \bar{\nabla}_X Y$$

از این گزاره نتیجه می شود که $(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})_p$ بستگی به انتخاب توسیع ندارد و برابر است با $(\bar{\nabla}_X Y)_p$. مقدار $(\bar{\nabla}_X Y)_p$ نیز تنها به مقادیر X و Y در یک همسایگی به اندازه کافی کوچک p بستگی دارد.

اثبات. ابتدا میدان برداری Y روی M و $\bar{Y}$ توسیع موضعی آن به همسایگی $\bar{U}$ از p در $\bar{M}$ را در نظر گرفته گزاره را ثابت می کنیم. با جایگذاری $Y - \bar{Y}$ به جای Y ، کافی است نشان دهیم که هرگاه در یک همسایگی U از p داشته باشیم $Y = 0$ آنگاه $(\bar{\nabla}_X Y)|_p = 0$. در پیوست I از فصل دوم کتاب [۲] دیدیم که اگر U بازی از M و K زیر مجموعه فشرده ای از U باشد، آنگاه تابعی مانند $\varphi \in C^\infty(M)$ موجود است به طوری که

$$\varphi \geq 0, \quad \varphi|_K = 1, \quad \text{Supp } \varphi \subset U$$

که در روی مرز U داریم $\varphi = 0$. از فرض $Y = 0$ روی U نتیجه می شود که $\varphi Y = 0$ روی تمام نقاط M ، و لذا $\bar{\nabla}_X(\varphi Y) = \bar{\nabla}_X(0 \cdot \varphi Y) = 0 \cdot \bar{\nabla}_X(\varphi Y) = 0$ بنابراین برای هر میدان برداری $X \in \mathcal{X}(M)$ ، از قاعده ضرب نتیجه می شود

$$0 = \bar{\nabla}_X(\varphi Y) = (X\varphi)Y + \varphi(\bar{\nabla}_X Y). \quad (2.7)$$

حال روی محمل φ داریم $Y = 0$. بنابراین در سمت راست رابطه (۲.۷) اولین عبارت صفر است. با محاسبه رابطه (۲.۷) در نقطه p داریم $0 = p(\bar{\nabla}_X Y)$. بطور مشابه برای میدان برداری X روی M گزاره را ثابت می‌کنیم. $\square$

از گزاره فوق نتیجه می‌شود که اگر V یک میدان روی $\bar{M}$ باشد که در طول M تعریف شده و $\bar{V}$ یک توسیع موضعی از V باشد آنگاه $(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{V})_p$ بستگی به انتخاب توسیع ندارد.

گزاره ۴.۱.۷. فرض کنیم X و Y دو میدان مماسی بر M باشند که روی همسایگی U از p در M تعریف شده و $\bar{X}$ و $\bar{Y}$ دو توسیع از این میدان‌های مماسی به یک همسایگی $\bar{U}$ از p در $\bar{M}$ باشند. آنگاه $[\bar{X}, \bar{Y}]_p$ بستگی به انتخاب توسیع ندارد

$$[\bar{X}, \bar{Y}]_p = [X, Y]_p$$

به طور کلی برای یک جادهنده $\bar{M} : M \rightarrow$ داریم $f_*[X, Y] = [f_*X, f_*Y]_{f(p)}$.

اثبات. فرض کنیم $X = X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ و $Y = Y^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ آنگاه $\| \frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha} \|$ ، f_* که در آن $i = 1, \dots, n+p$ و $\alpha = 1, \dots, n$. با انجام محاسبات داریم $f_*X = (\frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha} X^\alpha)(\frac{\partial}{\partial y^i})_{f(p)}$ و $f_*Y = (\frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha} Y^\alpha)(\frac{\partial}{\partial y^i})_{f(p)}$. برای X قرار می‌دهیم $\bar{X}^i \frac{\partial}{\partial y^i} |_{f(U)} = X^\alpha \frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha}$ که در آن $\bar{X}^i \frac{\partial}{\partial y^i}$ می‌باشد و به طور مشابه برای Y داریم:

$$f_*Y = \bar{Y}^i \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

با قرار دادن این رابطه در رابطه حکم داریم:

$$\begin{aligned}
 [f_*X, f_*Y]_{f(M)} &= (\bar{X}^i \frac{\partial \bar{Y}^j}{\partial y^i} - \bar{Y}^i \frac{\partial \bar{X}^j}{\partial y^i}) \frac{\partial}{\partial y^j} |_{f(M)}, \\
 &= (X^\alpha \frac{\partial f_i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial (Y^\alpha \frac{\partial f^j}{\partial x^\alpha})}{\partial y^i} - Y^\alpha \frac{\partial f_i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial (X^\alpha \frac{\partial f^j}{\partial x^\alpha})}{\partial y^i}) \frac{\partial}{\partial y^j}, \\
 &= \frac{\partial f^j}{\partial x^\alpha} (X^\beta \frac{\partial Y^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial f^i}{\partial x^\beta} - Y^\beta \frac{\partial X^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial f^i}{\partial x^\beta}) \frac{\partial}{\partial y^j}, \\
 &= \frac{\partial f^j}{\partial x^\alpha} (X^\beta \frac{\partial Y^\alpha}{\partial x^\beta} - Y^\beta \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\beta}) \frac{\partial}{\partial y^j}, \\
 &= f_*[X, Y].
 \end{aligned}$$

□

رابطه اخیر اثبات را کامل می کند.

مشابه تجزیه (۱.۷)، بردار $\bar{\nabla}_X Y \in T\bar{M}$ را به دو مولفه مماسی و قائم تجزیه می کنیم

$$\bar{\nabla}_X Y = (\bar{\nabla}_X Y)^\top + (\bar{\nabla}_X Y)^\perp. \quad (3.7)$$

حال دومین فرم اساسی زیرمنیفلد M از $\bar{M}$ را در هر نقطه با استفاده از تجزیه فوق تعریف می کنیم.

تعریف ۵.۱.۷. فرض کنیم M یک زیرمنیفلد از منیفلد ریمانی $\bar{M}$ و $\bar{\nabla}$ التصاق ریمانی (لوی چی ویتا) روی $\bar{M}$ باشد. دومین فرم اساسی M عبارت است از نگاشت دو خطی و متقارن H که در هر نقطه $p \in M$ به صورت زیر تعریف می شود

$$H_p : T_p M \times T_p M \longrightarrow T_p M^\perp$$

$$H(X, Y) =: (\bar{\nabla}_X Y)^\perp$$

که در اینجا $(\bar{\nabla}_X Y)^\perp$ مولفه قائم $\bar{\nabla}_X Y$ است.

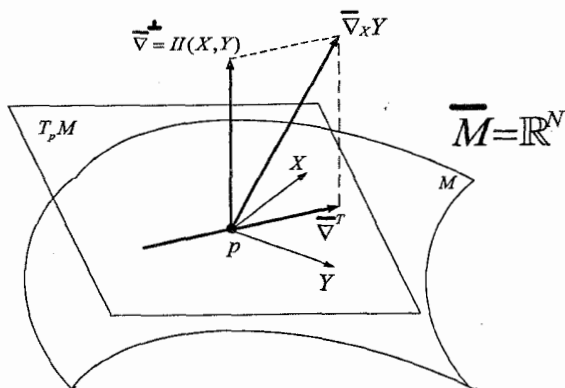
تمرین ۶.۱.۷. نشان دهید در هر نقطه $p \in M$ یک نگاشت $H_p: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ دو خطی متقارن (یعنی دارای رفتار تانسوری متقارن با مقدار در فضای قائم $(T_p M)^\perp$) است.

راهنمایی: ابتدا ثابت کنید H نسبت به X خطی است. سپس با استفاده از خاصیت تقارن $\bar{\nabla}$ یعنی $\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{X} = [\bar{X}, \bar{Y}]$ و گزاره ۳ ثابت کنید $H(X, Y) - H(Y, X) = 0$ که معادل متقارن بودن H است. از این رابطه همچنین می‌توان نتیجه گرفت H نسبت به Y نیز خطی است.

۲.۷ معادلات اساسی زیرمنیفلد های ریمانی

قضیه ۱.۲.۷. (معادلات گاوسی) فرض کنیم M یک زیرمنیفلد از منیفلد ریمانی $\bar{M}$ ، $\bar{\nabla}$ التصاق ریمانی (لوی چی ویتا) روی $\bar{M}$ و ∇ التصاق ریمانی روی M (با متریک القایی توسط یک جا دهنده) باشد. آنگاه

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + H(X, Y). \quad (۴.۷)$$



شکل ۲.۷: رابطه بین التصاق روی M و $\bar{M}$.

اثبات. تعریف کردیم $H(X, Y) := (\bar{\nabla}_X Y)^\perp$ ، لذا برای اثبات قضیه کافی است با توجه به رابطه (۳.۷) نشان دهیم که در هر نقطه M رابطه زیر برقرار است:

$$(\bar{\nabla}_X Y)^\top = \nabla_X Y.$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم $(\bar{\nabla}_X Y)^\top$ یک التصاق ریمانی است. (یعنی متقارن بوده و با متریک ریمانی روی M سازگار است). از قضیه اساسی هندسه ریمانی (وجود التصاق ریمانی) نتیجه می‌شود که $\bar{\nabla}^\top = \nabla$. به وضوح نگاشت زیر در شرایط التصاق خطی صدق می‌کند:

$$\bar{\nabla}^\top : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$$

$$(X, Y) \longrightarrow (\bar{\nabla}_X Y)^\top.$$

زیرا اگر میدانهای برداری X و Y را به $\bar{X}$ و $\bar{Y}$ روی $\bar{M}$ توسیع دهیم، چون $\bar{\nabla}$ یک التصاق ریمانی روی $\bar{M}$ است شرایط خطی بودن را دارا می‌باشد.

حال برای آنکه $(\bar{\nabla}_X Y)^\top$ یک التصاق ریمانی باشد، لازم است که متقارن (دارای تاب صفر) بوده و با متریک M سازگار باشد. این دو شرط را به صورت زیر تحقیق می‌کنیم:

$$(f) \text{ شرط تقارن: } (\bar{\nabla}_X Y)^\top - (\bar{\nabla}_Y X)^\top = [X, Y]$$

$$(b) \text{ شرط سازگاری با متریک: } X.g(Y, Z) = g((\bar{\nabla}_X Y)^\top, Z) + g(Y, (\bar{\nabla}_X Z)^\top).$$

شرط (الف) برقرار است زیرا با استفاده از متقارن بودن $\bar{\nabla}$ و آنکه $[X, Y]$ در صفحه مماسی قرار دارد (یعنی مولفه تصویر مماسی آن برابر خودش است). داریم:

$$(\bar{\nabla}_X Y)^\top - (\bar{\nabla}_Y X)^\top = (\bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X)^\top = [X, Y]^\top = [X, Y].$$

شرط (ب) را بررسی می‌کنیم. فرض کنیم X و Y و Z سه میدان برداری روی M باشند که به طور دلخواهی به $\bar{M}$ توسیع پیدا کرده‌اند. با استفاده از سازگاری $\bar{\nabla}$ با متریک ریمانی

$\bar{g}$ روی $\bar{M}$ و اینکه g تحدید $\bar{g}$ به M است داریم:

$$X.g(Y, Z) = X.\bar{g}(Y, Z) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, Z) + \bar{g}(Y, \bar{\nabla}_X Z)$$

با استفاده از تجزیه (۳.۷) و با توجه به اینکه $(\bar{\nabla}_X Y)^\perp$ بر Z عمود است، داریم:

$$\begin{aligned} X.g(Y, Z) &= g(\bar{\nabla}_X Y, Z) + g(Y, \bar{\nabla}_X Z) \\ &= g((\bar{\nabla}_X Y)^\top, Z) + g(Y, (\bar{\nabla}_X Z)^\top) \end{aligned}$$

لذا التصاق $\bar{\nabla}^\top$ ، یک التصاق ریمانی روی M است و بنا بر یکتایی این التصاق در قضیه اساسی هندسه ریمانی بر ∇ منطبق می‌شود. $\square$

توضیح ۲.۲.۷. یادآوری می‌شود که کلمه فرم در تعریف اولین و دومین فرم اساسی مربوط به فرم دو خطی بودن است نه به عنوان فرم دیفرانسیل پذیر. توجه داریم که فرم‌های دیفرانسیل پذیر متقارن نبوده و پاد متقارن هستند.

گزاره ۳.۲.۷. (معادله وینگارتن) فرض کنیم X مماس بر M و η عمود بر M باشد، آنگاه داریم:

$$\bar{\nabla}_X \eta = \nabla_X^\perp \eta - K(X, \eta), \quad (۵.۷)$$

که در آن $\nabla_X^\perp \eta$ مولفه نرمال $\bar{\nabla}_X \eta$ بوده و $K : T_p M \times T_p M^\perp \rightarrow T_p M$ توسط رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\langle K(X, \eta), Y \rangle = \langle H(X, Y), \eta \rangle. \quad (۶.۷)$$

اثبات. برای هر میدان برداری $Y \in \mathcal{X}(M)$ با توجه به روابط (۴.۷) و (۶.۷) داریم

$$\begin{aligned} \langle K(X, \eta), Y \rangle &= \langle H(X, Y), \eta \rangle = \langle \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, \eta \rangle, \\ &= \langle \bar{\nabla}_X Y, \eta \rangle \end{aligned} \quad (۷.۷)$$

که در آن تساوی آخر به دلیل $\langle \nabla_X Y, \eta \rangle = 0$ برقرار است. از طرف دیگر با استفاده از $\langle \eta, Y \rangle = 0$ داریم

$$0 = X \langle \eta, Y \rangle = \langle \bar{\nabla}_X \eta, Y \rangle + \langle \eta, \bar{\nabla}_X Y \rangle.$$

از آنجا رابطه (۷.۷) به صورت زیر نوشته می شود

$$\langle K(X, \eta), Y \rangle = \langle \bar{\nabla}_X Y, \eta \rangle = - \langle \bar{\nabla}_X \eta, Y \rangle = - \langle (\bar{\nabla})^\top_X \eta, Y \rangle$$

لذا $\forall Y \in \mathcal{X}(M)$ داریم

$$\langle K(X, \eta) + (\bar{\nabla})^\top_X \eta, Y \rangle = 0.$$

از آنجا چون این رابطه به ازای هر $\forall Y \in \mathcal{X}(M)$ دلخواه برقرار است، داریم

$$K(X, \eta) + (\bar{\nabla})^\top_X \eta = 0.$$

لذا داریم

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X \eta &= (\bar{\nabla})^\perp_X \eta + (\bar{\nabla})^\top_X \eta, \\ &= \bar{\nabla}_X^\perp \eta - K(X, \eta). \end{aligned}$$

از آنجا اثبات کامل می شود. $\square$

خانواده $TM^\perp = \bigcup_{p \in M} T_p M^\perp$ را کلاف قائم^۹ می نامیم. در آینده $TM^\perp$ را یک کلاف برداری هموار می نامیم^{۱۰}. همچنین $\nabla^\perp$ مولفه قائم $\bar{\nabla}$ یک التصاق روی کلاف قائم است این التصاق را التصاق قائم می نامیم.

^۹normal bundle

^{۱۰} به فصل کلاف های برداری در همین کتاب یا به کتاب [۵۶] صفحه ۱۳۳ مراجعه کنید.

تمرین ۴.۲.۷. نشان دهید $\nabla^\perp \eta$ در خواص التصاق به شرح زیر صدق می‌کند:

$$\nabla_{X+Y}^\perp \eta = \nabla_X^\perp \eta + \nabla_Y^\perp \eta \quad (\text{الف})$$

$$f \in C^\infty(M) \text{ که در آن } \nabla_{fX}^\perp \eta = f \nabla_X^\perp \eta \quad (\text{ب})$$

$$\nabla_X^\perp (\eta + \zeta) = \nabla_X^\perp \eta + \nabla_X^\perp \zeta \quad (\text{ج})$$

$$\nabla_X^\perp f\eta = (Xf)\eta + f \nabla_X^\perp \eta \quad (\text{د})$$

تمرین ۵.۲.۷. فرض کنیم M_1 و M_2 دو زیر منیفلد n بعدی از $\bar{M}$ به بعد $n+k$ باشند. فرض کنیم $c(t)$ یک منحنی هموار، $0 \leq t \leq 1$ در $M_1 \cap M_2$ باشد. می‌گوییم M_1 و M_2 در طول C بر یکدیگر مماسند اگر به ازاء هر t در $[0, 1]$ داشته باشیم:

$$T_{c(t)}M_1 = T_{c(t)}M_2$$

به بیان هندسی M_1 و M_2 در طول منحنی C دارای صفحات مماس یکسان باشند.

(الف) نشان دهید اگر M_1 و M_2 در طول C بر یکدیگر مماس باشند، آنگاه مفهوم انتقال موازی در طول C در M_1 معادل با مفهوم انتقال موازی در طول C در M_2 معادل است.

(ب) نشان دهید اگر C یک ژئودزیک در M_1 باشد، آنگاه C یک ژئودزیک برای M_2 است.

راهنمایی. فرض کنید ∇^1 و ∇^2 الصاق‌های ریمانی M_1 و M_2 باشند. با استفاده از فرمول‌های گاوس برای M_1 و M_2 اگر Y یک میدان برداری موازی در طول C در M_1 باشد (یعنی $\nabla_{C'(t)}^1 Y = 0$) آنگاه Y یک میدان برداری موازی در طول C در M_2 است.

تمرین ۶.۲.۷. فرض کنیم M زیر منیفلدی از $\bar{M}$ بوده و $0 \leq t \leq 1$ ، $C(t)$ یک منحنی در M باشد. نشان دهید:

الف) C یک ژئودزیک M است اگر تنها واگر $\bar{\nabla}_{C'(t)}C'(t)$ بر M عمود باشد.
 ب) اگر C یک ژئودزیک $\bar{M}$ باشد که در M قرار دارد، آنگاه C ژئودزیک M نیز هست.
 توجه داشته باشید که عکس این موضوع همواره برقرار نیست. یعنی ژئودزیک های M ممکن است ژئودزیک های $\bar{M}$ نباشند. به عنوان مثال کره $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ را در نظر بگیرید.
 اگر ژئودزیک های M و $\bar{M}$ بر یکدیگر منطبق باشند اصطلاحاً می‌گوییم M زیر منیفلد تماماً ژئودزیک^{۱۱} $\bar{M}$ است.

۱.۲.۷ معادلات گاوس-کودازی

فرض کنیم M یک زیر منیفلد $\bar{M}$ ، R تانسور انحنای M و $\bar{R}$ تانسور انحنای $\bar{M}$ باشد. آنگاه معادلات گاوس و کودازی عبارتند از:

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Z = & R(X, Y)Z - K(X, H(Y, Z)) + K(Y, H(X, Z)) \\ & + (\bar{\nabla}_X H)(Y, Z) - (\bar{\nabla}_Y H)(X, Z) \end{aligned} \quad (۸.۷)$$

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)\eta = & R^\perp(X, Y)Z - H(X, K(Y, \eta)) + H(Y, K(X, \eta)) \\ & - (\bar{\nabla}_X K)(Y, \eta) + (\bar{\nabla}_Y K)(X, \eta) \end{aligned} \quad (۹.۷)$$

که در آن $\eta \in TM^\perp$ ، $X, Y, Z \in TM$ و عبارات $\bar{\nabla}_X K$ ، $\bar{\nabla}_X H$ و تانسور انحنای قائم $R^\perp$ به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$(\bar{\nabla}_X H)(Y, Z) = \nabla_X^\perp(H(Y, Z)) - H(\nabla_X Y, Z) - H(Y, \nabla_X Z) \quad (۱۰.۷)$$

$$(\bar{\nabla}_X K)(Y, \eta) = \nabla_X(K(Y, \eta)) - K(\nabla_X Y, \eta) - K(Y, \nabla_X^\perp \eta)$$

$$R^\perp(X, Y)\eta = \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \eta - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \eta - \nabla_{[X, Y]}^\perp \eta$$

^{۱۱}totally geodesic submanifold

اثبات فرمول (۸.۷) را آورده و اثبات (۹.۷) را به عنوان تمرین واگذار می‌نمائیم. با استفاده مکرر از قضیه گاوس داریم:

$$\begin{aligned}\bar{R}(X, Y)Z &= \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z \\ &= \bar{\nabla}_X (\nabla_Y Z + H(Y, Z)) - \bar{\nabla}_Y (\nabla_X Z + H(X, Z)) \\ &\quad - \nabla_{[X, Y]} Z - H([X, Y], Z) \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z + H(X, \nabla_Y Z) + \nabla_X^\perp (H(Y, Z)) - K(X, H(Y, Z)) \\ &\quad - \nabla_Y \nabla_X Z - H(Y, \nabla_X Z) - \nabla_Y^\perp (H(X, Z)) + K(Y, H(X, Z)) \\ &\quad - \nabla_{[X, Y]} Z - H([X, Y], Z)\end{aligned}$$

از خاصیت بدون تاب بودن التصاق ∇ یعنی $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ نتیجه می‌شود

$$H([X, Y], Z) = H(\nabla_X Y, Z) - H(\nabla_Y X, Z).$$

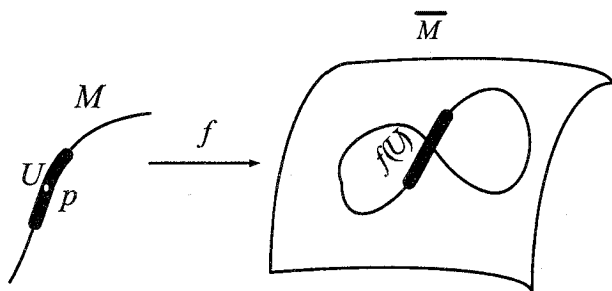
از رابطه (۱۰.۷) داریم:

$$\begin{aligned}\bar{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z - K(X, H(Y, Z)) + K(Y, H(X, Z)) \\ &\quad - \bar{\nabla}_X H(Y, Z) - \bar{\nabla}_Y H(X, Z)\end{aligned}$$

تمرین ۷.۲.۷. در معادلات گاوس-کودازی فرمول (۹.۷) را ثابت کنید.

توضیح ۸.۲.۷. اگر در این بخش $M \subset \bar{M}$ نبوده ولی نگاشت $f: M \rightarrow \bar{M}$ یک جادهنده باشد آنگاه فرمول‌های بالا همچنان برقرارند اما نمادگذاری‌ها کمی پیچیده‌تر می‌شوند. به عنوان مثال به شکل ۳.۷ در صفحه ۱۹۰ و تمرین ۹.۲.۷ در صفحه ۱۹۰ توجه کنید.

همانطوری که در روی شکل می‌توان مشاهده کرد ممکن است جادهنده f یک به یک نباشد یا به عبارت دیگر ممکن است تصویر آن خودش را قطع کند، اما بنابر قضیه رتبه یک



شکل ۳.۷: نگاشت جادهنده f به طور سرتاسری یک به یک نیست اما در همسایگی U یک به یک است.

همسایگی باندازه کافی کوچک U وجود دارد که f روی U یک به یک باشد. ما می‌توانیم همسایگی U را با تصویرش توسط f معادل در نظر بگیریم لذا میدان‌های برداری X و Y و ... روی $U \subset M$ را می‌توان با تصویر آن یعنی f_*X و f_*Y و ... روی $\bar{M}$ معادل در نظر گرفته، محاسبات این بخش را به طور مشابه انجام داد و نتایج مشابهی به دست آورد. باید توجه داشت که این روش یعنی محدود کردن f به یک همسایگی باندازه کافی کوچک U تاثیری در کلیت مسئله و فرمول‌های به دست آمده ندارد زیرا در اینجا همه محاسبات به صورت موضعی (یعنی در روی یک کارت موضعی در همسایگی p) انجام شده است.

تمرین ۹.۲.۷. فرض کنید نگاشت $f: M^n \rightarrow \bar{M}^{n+k}$ یک جادهنده از منیفلد دیفرانسیل پذیر M به منیفلد ریمانی $\bar{M}$ باشد. M را با متریک ریمانی القا شده توسط f در نظر بگیرید و فرض کنید $p \in M$ و $U \subset M$ یک همسایگی p باشد به طوری که $f(U) \subset \bar{M}$ یک زیرمنیفلد $\bar{M}$ باشد، همچنین فرض کنید X, Y میدان‌های برداری دیفرانسیل پذیری روی $f(U)$ باشند که به میدان‌های برداری $\bar{X}, \bar{Y}$ روی یک زیر مجموعه باز $\bar{M}$ توسیع داده شده‌اند. تعریف کنید $((\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})(p)) = (\nabla_X Y)(p)$ که در آن $\bar{\nabla}$ التصاق ریمانی $\bar{M}$ است. ثابت کنید ∇ التصاق ریمانی M است.

راهنمایی. در صورتی که در اثبات این تمرین مشکلی پیدا کردید، می‌توانید از فصل آخر این

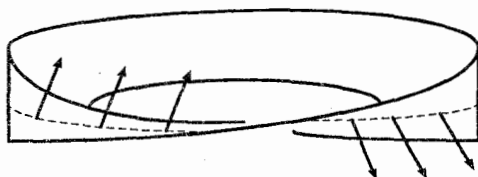
کتاب استفاده کنید.

۲.۲.۷ معادلات اساسی ابررویه های یک منیفلد ریمانی

در این بخش پس از تعریف ابررویه ها به مطالعه خصوصیات آنها پرداخته، معادلات اساسی را برای ابررویه ها محاسبه، معادله وینگارتن را به دست می آوریم.

تعریف ۱۰.۲.۷. یک ابررویه^{۱۲} عبارت است از یک زیرمنیفلد M به بعد n از منیفلد $\bar{M}$ به بعد $n + 1$. به عبارت معادل، یک ابررویه یک زیرمنیفلد است که بعد آن یک واحد کمتر از بعد منیفلد بزرگتر است. در این حالت اصطلاحاً می گوئیم ابررویه دارای همبعد^{۱۳} یا بعد مکمل، یک است.

فرض کنیم M یک ابررویه باشد. در هر نقطه $p \in M$ یک بردار یکه قائم وجود دارد که به طور موضعی در یک همسایگی به اندازه کافی کوچک U از p یک میدان برداری قائم N روی U تعریف می کند. باید توجه داشت که به طور سرتاسری همیشه نمی توان یک بردار یکتای قائم یافت که در تمام نقاط بر M عمود باشد. به عنوان مثال در نوار موبیوس چنین موردی اتفاق نمی افتد و به همین دلیل آن را جهت ناپذیر نامیدیم. می شوند. به شکل ۴.۷ در صفحه ۱۹۱ توجه کنید. بخش منیفلدهای جهت پذیر در کتاب [۲] را ببینید. اما از آنجا



شکل ۴.۷: در نوار موبیوس نمی توان به طور پیوسته یک بردار قائم بر نوار تعریف کرد.

^{۱۲}hypersurface

^{۱۳}codimension

که مباحث این بخش به صورت موضعی مطرح شده‌اند، موضوع احتمال عدم وجود بردار قائم به طور سرتاسری مشکلی ایجاد نمی‌کند. چون $T_p M^\perp$ دارای بعد یک است لذا شامل بردار یکتای قائم N است و با انتخاب N می‌توان دومین فرم اساسی H را به صورت زیر نوشت:

$$h(X, Y) = \langle H(X, Y), N \rangle. \quad (11.7)$$

در این صورت معادله گاوس برای ابرویه M به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y)N. \quad (12.7)$$

حال معادله وینگارتن برای ابرویه M را محاسبه می‌کنیم. ابتدا از طرفین رابطه $\langle N, N \rangle = 1$ مشتق همگرد در جهت X گرفته از خواص $\bar{\nabla}_X$ استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} 0 &= X \langle N, N \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_X N, N \rangle + \langle N, \bar{\nabla}_X N \rangle \\ &= 2 \langle \bar{\nabla}_X N, N \rangle \\ &= 2 \langle \nabla_X^\perp N + \nabla_X^\top N, N \rangle \\ &= 2 \langle \nabla_X^\perp N, N \rangle + 2 \langle \nabla_X^\top N, N \rangle = 2 \langle \nabla_X^\perp N, N \rangle \end{aligned}$$

از آنجا $\nabla_X^\perp N = 0$. لذا معادله وینگارتن (۵.۷) به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\bar{\nabla}_X N = -K(X, N). \quad (13.7)$$

برای معادله گاوس-کودازی در روی یک ابرویه، از معادله (۱۰.۷) داریم:

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_X H)(Y, Z) &= \nabla_X^\perp (h(Y, Z)N) - h(\nabla_X Y, Z)N - h(Y, \nabla_X Z)N \\ &= (X.h(Y, Z))N - h(\nabla_X Y, Z)N - h(Y, \nabla_X Z)N \\ &= (\nabla_X h)(Y, Z)N. \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن معادله (۸.۷) برای بردارهای مماسی W و استفاده از رابطه اخیر داریم:

$$\begin{aligned} \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle &= \langle R(X, Y)Z, W \rangle - \langle K(X, H(Y, Z)), W \rangle \\ &\quad + \langle K(Y, H(X, Z)), W \rangle + \langle (\nabla_X h)(Y, Z)N, W \rangle \\ &\quad - \langle (\nabla_Y h)(X, Z)N, W \rangle. \end{aligned} \quad (۱۴.۷)$$

از طرف دیگر بنابر روابط (۶.۷) و (۱۱.۷) داریم:

$$\begin{aligned} \langle K(X, H(Y, Z)), W \rangle &= \langle h(Y, Z)N, H(X, W) \rangle \\ &= \langle h(Y, Z)N, h(X, W)N \rangle \\ &= h(Y, Z)h(X, W) \langle N, N \rangle \\ &= h(Y, Z)h(X, W). \end{aligned}$$

چون $h(Y, Z) \in C^\infty(M)$ می‌باشد، لذا $\nabla_X h(Y, Z) = X.h(Y, Z) \in C^\infty(M)$. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X(h(Y, Z)N, W \rangle &= \\ \langle \nabla_X(h(Y, Z))N - H(\nabla_X Y, Z) - H(Y, \nabla_X Z), W \rangle \\ &= \nabla_X h(Y, Z) \langle N, W \rangle = 0. \end{aligned}$$

با جایگذاری این مقادیر در (۱۴.۷) معادله وینگارتن برای ابرویه‌ها به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle &= \langle R(X, Y)Z, W \rangle - h(Y, Z)h(X, W) \\ &\quad + h(X, Z)h(Y, W). \end{aligned}$$

تمرین ۱۱.۲.۷. الف) نشان دهید معادله دوم گاوس-کودازی برای ابرویه‌ها به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, N \rangle = (\nabla_X h)(Y, Z) - (\nabla_Y h)(X, Z).$$

ب) اگر $\bar{M} = \mathbb{R}^{n+1}$ و M ابر رویه $\bar{M}$ باشد، نشان دهید معادله کدازی عبارت است از

$$(\nabla_X h)(Y, Z) = (\nabla_Y h)(X, Z).$$

راهنمایی الف. از معادله (۹.۷) برای بردار قائم N استفاده کنید.

۳.۲.۷ قضیه باهیت گوس

فرض کنیم M یک منیفلد n بعدی و $\Pi \subset T_p M$ یک صفحه 2 بعدی از فضای $T_p M$ باشد. انحنا برشی^{۱۴} $K_p(\Pi)$ در نقطه p از منیفلد M را توسط رابطه زیر تعریف نمودیم.

$$K_p = \frac{\langle R(X, Y)Z, X \rangle}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2}. \quad (15.7)$$

در این رابطه $X, Y \in T_p M$ مستقل از یکدیگر بوده و صفحه Π توسط X و Y تولید شده است. می دانیم که انحنا برشی بستگی به انتخاب X و Y نداشته و فقط به صفحه تولید شده توسط آنها بستگی دارد. اگر M یک منیفلد 2 بعدی باشد آنگاه $K_p(\Pi) = K_p$ ، زیرا تنها یک صفحه مماس 2 -بعدی در هر نقطه M وجود دارد. انحنا برشی در این حالت همان انحنا گوسی است.

فرض کنیم $f: M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ یک جادهنده باشد. چون $\bar{R} = 0$ است از اولین معادله گاوس-کودازی نتیجه می شود

$$K_p = \frac{\langle R(X, Y)Z, X \rangle}{\|X\|^2 \|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2} = \frac{h(X, X)h(Y, Y) - h(X, Y)^2}{\|X\|^2 \|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2}.$$

اگر X و Y یک پایه متعامد یک شکل دهند، مخرج کسر برابر یک و صورت کسر دترمینان

^{۱۴}sectional curvature

یک نگاشت خطی است که به صورت زیر تعریف می شود. فرض کنیم

$$\begin{aligned} h^\# : T_p M &\longrightarrow T_p M, \\ X &\longrightarrow h^\# X. \end{aligned}$$

در اینجا $h^\#$ توسط رابطه $\langle h^\#(X), Y \rangle = h(X, Y)$ تعریف می شود.

تمرین ۱۲.۲.۷. نشان دهید دترمینان نگاشت خطی $h^\#$ برابر است با

$$\det \| h^\# \| = h(X, X)h(Y, Y) - h(X, Y)^2.$$

در اینجا X و Y اعضای پایه فرض شده اند.

لذا قضیه زیر را که بیان دیگری از قضیه گاوس است، ثابت کرده ایم.

قضیه ۱۳.۲.۷. قضیه باهیبیت گاوس. فرض کنیم M یک منیفلد ۲-بعدی و $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک جادهنده باشد. آنگاه دترمینان نگاشت خطی $h^\#$ که توسط h تعریف می شود، بستگی به انتخاب جادهنده f ندارد و

$$K = \det \| h^\# \|$$

از این قضیه بلافاصله نتایج مهم زیر حاصل می شود.

نتیجه ۱۴.۲.۷. فرض کنیم M یک منیفلد ۲-بعدی و $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک جادهنده باشد. آنگاه انحناهای گاوسی بستگی به انتخاب جادهنده f و در نتیجه به متریکی که به M القا می کند، ندارد. لذا انحناهای گاوسی مستقل از انتخاب متر است.

نتیجه ۱۵.۲.۷. انحناهای گاوسی نسبت به ایزومتري ها پایا است.

تمرین ۱۶.۲.۷. نشان دهید اگر M_1 و M_2 دو ابر رویه در $\mathbb{R}^n$ بوده و $\Phi : M_1 \rightarrow M_2$

یک ایزومتري باشد آنگاه $K_p^1 = K_{\Phi p}^2$ یا به طور دقیقتر $K_p^1(X, Y) = K_{\Phi p}^2(\Phi_* X, \Phi_* Y)$

این خاصیت برجسته، انحنا ی گاوس را از سایر انحنا های یک رویه متمایز می کند. زیرا به عنوان مثال اگر صفحه کاغذی را دوران داده و آن را به شکل استوانه در بیاوریم تغییری در انحنا ی گاوسی آن پیدا نشده و همچنان دارای انحنا ی گاوسی صفر است. این خاصیت برای انحنا های دیگر یک رویه مانند انحنا ی اصلی و انحنا ی میانگین برقرار نیست. (چرا؟) در خاتمه این بخش به چند نکته مهم در مورد نگاشت h می پردازیم. $h(x, y)$ را میتوان به عنوان یک تانسور $(\dot{z})$ با مولفه های h_{ij} در نظر گرفته با استفاده از یکرختی های موسیقیایی اندیس آن را بالا برد. در این صورت آن را عملگر شکل^{۱۵} نامیده و با $h^\#$ نمایش می دهیم. لذا با بالا بردن یک اندیس h_{ij} مولفه های $h^\#$ به صورت h_i^j نوشته می شوند.

چون تانسور $h(x, y)$ متقارن است $h^\#$ یک یکرختی خود الحاق^{۱۶} است، یعنی

$$\forall X, Y \in \mathcal{X}(M), \quad \langle h^\#(X), Y \rangle = \langle X, h^\#(Y) \rangle.$$

در بخش بعد خواهیم دید که چگونه عملگر شکل انحنا ی زیرمنیفلدها را مشخص می کند.

تمرین ۱۷.۲.۷. نشان دهید فرمول وینگارتن بصورت زیر نوشته می شود:

$$\langle \bar{\nabla}_X N, Y \rangle = - \langle h^\#(X), Y \rangle \quad (\text{الف})$$

(ب) $\bar{\nabla}_X N$ بر M مماس است.

(ج) در ابر رویه های R^{n+1} ، نگاشت به صورت زیر تعریف می شود:

$$h^\#(X) = K(X, N)$$

^{۱۵}shape operator

^{۱۶}self adjoint isomorphism

۳.۷ انحناهای دیگر روی یک زیرمنیفلد و رابطه بین آنها

پس از تانسور انحناهای ریمان انحناهای دیگری نیز برای زیرمنیفلد ها تعریف می شود که در مقایسه با انحناهای گاوسی از اهمیت کمتری برخوردار هستند اما از آنجا که قبل از انحناهای گاوس تعریف شده و با آن رابطه دارند به تعریف آن ها می پردازیم. در هر نقطه $p \in M$ دیدیم که $h^\# : T_p M \rightarrow T_p M$ یک یکرخیختی خود الحاق است. از جبر خطی نتیجه می شود که نگاشت $h^\#$ را می توان به صورت یک ماتریس قطری نوشت که اعضای روی قطر مقادیر ویژه آن باشند که با $k_1, \dots, k_n$ نمایش داده می شوند. همچنین یک پایه یکه قائم $e_1, \dots, e_n$ روی $T_p M$ وجود دارد که در آن $h^\#(e_i) = k_i(e_i)$ (بدون جمع بندی). در این پایه h و $h^\#$ به صورت ماتریس های قطری نوشته می شوند.

تعریف ۱.۳.۷. فرض کنیم M یک زیرمنیفلد n بعدی از $\mathbb{R}^{n+1}$ باشد. مقادیر ویژه $h^\#$ یعنی $k_1, \dots, k_n$ را در پایه فوق الذکر انحناهای اصلی M در نقطه p می نامیم. اثر^{۱۷} ماتریس قطری $h^\#$ یعنی $\frac{1}{n} \text{trac } h^\# = \frac{1}{n}(k_1 + \dots + k_n)$ را λ انحناهای میانگین^{۱۸} می نامیم. درمیان $h^\#$ یعنی $K = k_1 k_2 \dots k_n$ را انحناهای گاوسی زیرمنیفلد M در نقطه p می نامند.

به عنوان یک تعبیر هندسی، یادآوری می کنیم که در مورد منیفلدهای ۲-بعدی انحناهای گاوسی در نقطه p به صورت زیر تعریف می شود. مجموعه تمام منحنی های گذرنده از p که از تقاطع صفحات عمود بر رویه در این نقطه حاصل می شوند را در نظر گرفته انحناهای آنها در p را با k نمایش می دهیم. سپس انحناهای اصلی^{۱۹} را با k_1 و k_2 نمایش داده توسط $k_1 = \min\{k\}$ و $k_2 = \max\{k\}$ تعریف می کنیم. می توان نشان داد که انحناهای

^{۱۷}Trace

^{۱۸}Mean Curvature

^{۱۹}principal curvatures

گاوسی برابر است با حاصلضرب $K = k_1 k_2$.

گزاره زیر ارتباط بین انحناهای یک زیرمنیفلد را بیان می کند.

گزاره ۲.۳.۷. فرض کنیم M یک منیفلد ۲ بعدی باشد. رابطه بین انحناهای گاوسی K ، تانسور انحناهای ریمان R_m ، تانسور ریچی Ric و تانسور اسکالر S در هر نقطه $p \in M$ به صورت زیر بیان می گردد.

$$\begin{aligned} R_m(X, Y, Z, W) &= \langle R(X, Y)Z, W \rangle, \\ &= K(\langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle) - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle, \end{aligned} \quad (۱۶.۷)$$

$$Ric(X, Y) = K \langle X, Y \rangle, \quad (۱۷.۷)$$

$$S = 2K. \quad (۱۸.۷)$$

در اینجا $R(X, Y)Z$ همان عملگر انحنا است.

اثبات. چون طرفین رابطه فوق تانسور هستند، کافی است درستی آن را برای اعضای پایه دلخواه ثابت کنیم. فرض کنیم $\{\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\}_p$ یک پایه متعامد یکه برای $T_p M$ باشد. یادآوری می کنیم که مولفه های تانسور انحناهای ریمان R_m با جایگذاری اعضای پایه به صورت زیر تعریف می شوند.

$$\begin{aligned} R_m &= R_{ijls} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^l \otimes dx^s, \\ R_{ijls} &= \langle R(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^s} \rangle, \end{aligned}$$

که در آن $i, j, l, s \in \{1, 2\}$. ابتدا سمت چپ رابطه اول را محاسبه می کنیم. یادآوری می کنیم با استفاده از خاصیت یاد مقارن بودن R_{ijkl} نسبت به اندیسهای اول و دوم و همچنین اندیسهای سوم و چهارم یعنی هرگاه $i = j$ و یا $k = l$ داریم $R_{ijkl} = 0$. لذا تنها مولفه های غیر صفر عبارتند از $R_{1211} = R_{1222} = -R_{2112} = -R_{2121}$. حال با

استفاده از رابطه (۱۵.۷) و قراردادن $X = \partial/\partial x^1$ و $Y = \partial/\partial x^2$ سمت چپ رابطه (۱۶.۷) برابر $R_{1212} = K$ می شود. حال سمت راست رابطه (۱۶.۷) را با جایگذاری اعضای پایه محاسبه می کنیم.

$$K(<\partial_i, \partial_l><\partial_j, \partial_k> - <\partial_i, \partial_k><\partial_j, \partial_l>) = K(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}).$$

در این پایه $g_{il} = \delta_{il}$ که در آن دلتای کرونکر است. با فرض $i = 1, g = 2, k = 2, l = 1$ درستی رابطه (۱۶.۷) بررسی می شود. حال رابطه (۱۷.۷) را ثابت می کنیم. بنابر رابطه (۱۶.۷) داریم:

$$R_{ijls} = k(g_{is}g_{jl} - g_{il}g_{js}).$$

با اثر دادن g^{is} به طرفین رابطه فوق داریم:

$$g^{is}R_{ijls} = k(g^{is}g_{is}g_{jl} - g^{is}g_{il}g_{js}) = K(2g_{jl} - g_{jl}).$$

در نتیجه

$$R_{jl} = K g_{jl}.$$

برای اثبات رابطه (۱۷.۷) به طرفین رابطه بالا، g^{jl} را اثر می دهیم، یعنی:

$$g^{jl}R_{jl} = g^{jl}k g_{jl}$$

در نتیجه داریم، $S = 2K$.

□

۱.۳.۷ لم شور

لم شور از آن قضایای هندسه ریمانی است که تعمیم آن به هندسه فینسلری اخیراً رونق فراوانی پیدا کرده است.

قضیه ۳.۳.۷. (لم شور)^{۲۰} فرض کنیم M یک منیفلد همبند با بعد $n > 2$ باشد. اگر انحناى برشی $K_x(\pi)$ بستگی به صفحه π نداشته باشد آنگاه بستگی به نقطه $x \in M$ نیز ندارد.

اثبات. اگر انحناى برشی $K_x(\pi)$ بستگی به صفحه π نداشته باشد، می توان آن را به عنوان یک تابع روی M فرض کرد، $K_x(\pi) = f(x)$ که در آن $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ باید نشان دهیم f ثابت است. می دانیم که اگر انحناى برشی بستگی به صفحه π نداشته باشد آنگاه انحناى ریمان در رابطه زیر صدق می کند.

$$R_m(X, Y, Z, W) = f(x)(\langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle)$$

عبارت فوق در دستگاه مختصات موضعی به صورت زیر نوشته می شود.

$$R_{ijkl} = f(x)(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}).$$

یادآوری می کنیم که مختصات نرمال توسط کارت $(\exp_x^{-1}, \mathcal{U})$ در همسایگی $x \in M$ تعریف می شود. این مختصات یک پایه یکه قائم به $T_x M$ وابسته می کند. لذا در یک همسایگی $p \in M$ در این مختصات داریم

$\Gamma_{jk}^i = 0$ و $\frac{\partial g_{ij}(\cdot)}{\partial x^k} = 0$ ، $g_{ij}(\cdot) = \delta_{ij}$ چون رابطه فوق یک رابطه تانسوری است کافی است تساوی را در مختصات نرمال بررسی کنیم. توجه نمایید که در مختصات نرمال الزاما مشتق جزئی دوم g_{ij} در نقطه 0 و در نتیجه مولفه های تانسور انحنا، برابر صفر نمی شوند. مقادیر R_{ijkl} را در اتحاد بیانچی جایگذاری می کنیم.

$$\frac{\partial}{\partial x^m} R_{ijkl} + \frac{\partial}{\partial x^k} R_{ijlm} + \frac{\partial}{\partial x^l} R_{ijmk} = 0.$$

با قرار دادن $\frac{\partial f}{\partial x^m} = f_m$ و محاسبه عبارت فوق داریم:

$$f_m(\delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl}) + f_k(\delta_{im}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jm}) + f_l(\delta_{ik}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jk}) = 0.$$

^{۲۰}Shur lemma

طرفین رابطه فوق را در δ^{ik} ضرب می‌کنیم.

$$f_m(\delta_{jl} - n\delta_{jl}) + f_m\delta_{jl} - f_l\delta_{jm} + n f_l\delta_{jm} - f_l\delta_{jm} = 0.$$

طرفین رابطه فوق را در δ^{ji} ضرب می‌کنیم.

$$(1 - n)(n - 2)f_m = 0.$$

در نتیجه چون $n > 2$ بزرگتر فرض شده است، داریم

$$\frac{\partial f}{\partial x^m} = 0.$$

چون M همبند است پس f ثابت است. □

مثال ۴.۳.۷. یک کره در $\mathbb{R}^3$ با شعاع r در نظر می‌گیریم. مطلوبست محاسبه،

الف) متریک القایی $\mathbb{R}^3$ به کره که آن را توسط (S^2, can) نشان می‌دهیم.

ب) دومین فرم اساسی اسکالر h .

ج) انحنای اصلی، میانگین و انحنای گوسی. مولفه‌های تانسور انحنای ریمان، تانسور ریچی و انحنای اسکالر.

حل. معادله پارامتری کره به شعاع r توسط رابطه زیر داده شده است.

$$x_1 = (r + r \cos v) \cos u, \quad 0 < u < 2\pi$$

$$x_2 = (r + r \cos v) \sin u, \quad -\pi/2 < v < \pi/2$$

$$x_3 = r \sin v.$$

لذا نگاشت جادهنده کره را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$x : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$(u, v) \longrightarrow (x_1, x_2, x_3).$$

بردارهای مماس عبارتند از $x_* \frac{\partial}{\partial u}$ و $x_* \frac{\partial}{\partial v}$ که آن‌ها را معادل با $x_* \frac{\partial}{\partial u} \approx \frac{\partial}{\partial u}$ و $\frac{\partial}{\partial v} \approx x_* \frac{\partial}{\partial v}$ در نظر می‌گیریم. از آنجا داریم

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial u} &= (-r \sin u \cos v, r \cos u \cos v, 0), \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= (-r \cos u \sin v, -r \sin u \sin v, r \cos v).\end{aligned}$$

مولفه‌های متریک القایی به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned}g_{11} &:= \langle x_* \frac{\partial}{\partial u}, x_* \frac{\partial}{\partial u} \rangle = \langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \rangle = r^2 \cos^2 v, \\ g_{12} &:= \langle x_* \frac{\partial}{\partial u}, x_* \frac{\partial}{\partial v} \rangle = \langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \rangle = 0, \\ g_{22} &:= \langle x_* \frac{\partial}{\partial v}, x_* \frac{\partial}{\partial v} \rangle = \langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \rangle = r^2.\end{aligned}$$

لذا بردار قائم عبارت است از

$$\begin{aligned}N &= \frac{\frac{\partial}{\partial u} \wedge \frac{\partial}{\partial v}}{\| \frac{\partial}{\partial u} \wedge \frac{\partial}{\partial v} \|} = \frac{\frac{\partial}{\partial u} \wedge \frac{\partial}{\partial v}}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}, \\ &= \frac{(r^2 \cos u \cos^2 v, r^2 \sin u \cos^2 v, r^2 \sin v \cos v)}{r^2 \cos v}, \\ &= (r \cos u \cos v, r \sin u \cos v, \sin v) = \frac{x}{r}.\end{aligned}$$

همانطور که انتظار می‌رفت، بردار موضع x در راستای بردار قائم بوده و برسطح کره عمود است. برای محاسبه دومین فرم اساسی اسکالر h به شرح زیر عمل می‌کنیم

$$\begin{aligned}h^\sharp(X) &= K(X, N) = -\bar{\nabla}_X N, \\ h^\sharp\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) &= K\left(\frac{\partial}{\partial u}, N\right) = -\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u}} N = -\frac{1}{r} \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u}} x.\end{aligned}$$

چون در $\mathbb{R}^3$ علائم کریستوفل صفر هستند $\bar{\nabla}_X \simeq X$ به ازای هر بردار مماس X

$$h^\sharp\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{1}{r} x_* \frac{\partial}{\partial u} \simeq -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial u}.$$

به همین صورت $h^\#(\frac{\partial}{\partial v}) = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial v}$. لذا ماتریس $h^\#$ عبارت است از

$$Matrice(h^\#)_{(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v})} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r} \end{pmatrix}$$

حال نگاشت $h(X, Y) = \langle h^\#(X), Y \rangle$ را محاسبه می کنیم.

$$h_{11} := h(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}) = \langle \frac{-1}{r} \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \rangle = \frac{-1}{r} g_{11} = r \cos^2 v,$$

$$h_{12} := h(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}) = \langle \frac{-1}{r} \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \rangle = \frac{-1}{r} g_{12} = 0,$$

$$h_{22} := h(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v}) = \langle \frac{-1}{r} \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \rangle = \frac{-1}{r} g_{22} = -r.$$

چون $h(X, Y)$ یک تانسور $(\cdot, \cdot)$ است می توان با فرض $u = U^1$ و $v = U^2$ نوشت،

$h = h_{ij} du^i \otimes du^j$ که در آن $i, j = 1, 2$. لذا با جایگذاری مولفه های h ، دومین فرم

اسکالر به دست می آید،

$h = r \cos^2 v (du)^2 - r (dv)^2$. انحنای اصلی بنا بر تعریف از روی ماتریس $h^\#$ به

دست می آیند.

انحنای میانگین بنا بر تعریف برابر است با میانگین اثر ماتریس $h^\#$ ، لذا داریم

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{-1}{r}.$$

انحنای گاوسی بنا بر تعریف برابر است با دترمینان ماتریس قطری $h^\#$ ، لذا داریم

$$K = \left(\frac{-1}{r}\right)^2 = \frac{1}{r^2}.$$

بنابر آنچه در اثبات گزاره بالا دیدیم، تانسور انحنای ریمان کره دارای مولفه های غیر صفر

زیر است.

$$R_{2121} = R_{1212} = -R_{2112} = -R_{1221} = \frac{1}{r^2}.$$

می دانیم تانسور انحنا ی ریچی کره در رابطه $R_{ij} = K g_{ij}$ صدق می کند، لذا انحنا ی ریچی کره دارای مولفه های غیر صفر زیر است، $R_{11} = \cos^2 v$ ، $R_{22} = 1$ ، $S = 2K = \frac{2}{r^2}$ با $S = 2K$ برابر است.

تمرین ۵.۳.۷. چنبره T^2 در $\mathbb{R}^3$ که توسط معادله پارامتری زیر تعریف می شود را در نظر می گیریم.

$$x_1 = (r + r \cos v) \cos u,$$

$$x_2 = (r + r \cos v) \sin u,$$

$$x_3 = r \sin v.$$

مطلوبست

الف) متریک القایی $\mathbb{R}^3$ به چنبره.

ب) دومین فرم اساسی اسکالر h چنبره.

ج) انحنا ی اصلی، میانگین و انحنا ی گاوسی، مولفه های تانسور انحنا ی ریمان، تانسور ریچی و انحنا ی اسکالر چنبره.

تمرین ۶.۳.۷. فرض کنیم معادله پارامتری یک رویه توسط رابطه زیر داده شده باشد.

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$(u^1, u^2) \longrightarrow (x(u^1, u^2), y(u^1, u^2), z(u^1, u^2)).$$

اگر بردارهای مماس بر رویه در هر نقطه را با $i = 1, 2$ و $\frac{\partial f}{\partial u^i}$ و دومین فرم اساسی اسکالر را با $h(X, Y) = \langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle$ نمایش دهیم، نشان دهید

الف) بردار یکه قائم عبارت است از $N = \frac{f_1 \wedge f_2}{\sqrt{\det \|g_{ij}\|}}$

ب) انحنای گاوسی برابر است با $K = \frac{\sqrt{\det \|h_{ij}\|}}{\sqrt{\det \|g_{ij}\|}}$.

ج) اگر $h^\# : TM \rightarrow TM$ دارای مولفه های h^α_β باشد نشان دهید.

$$h^\alpha_\beta = g^{\alpha\gamma} h_{\beta\gamma}$$

د) انحنای میانگین H را به دست آورید.

تمرین ۷.۳.۷. فرض کنیم معادله پارامتری یک رویه استوانه ای شکل که پایه آن منحنی $(x(s), y(s))$ در صفحه xy است، توسط رابطه زیر داده شده باشد.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ (s, t) &\longrightarrow (x(s), y(s), t). \end{aligned}$$

الف) با استفاده از قضیه گاوس نشان دهید که انحنای گاوسی برابر است با $K = 0$.

ب) با محاسبه نشان دهید $K = 0$.

ج) نشان دهید انحنای میانگین $H = x'y'' - x''y'$.

تمرین ۸.۳.۷. ^{۲۱} فرض کنید $\overline{M}$ یک منیفلد $n+1$ بعدی و $f : \overline{M}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع دیفرانسیل پذیر باشد. هسیان f در نقطه $p \in \overline{M}$ یک عملگر خطی است که آن را با $Hess f$ نمایش داده به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$Hess f : T_p \overline{M} \longrightarrow T_p \overline{M}$$

$$(Hess f)Y = \overline{\nabla}_Y grad f, Y \in T_p \overline{M}$$

که در آن $\bar{\nabla}$ التصاق ریمانی $\bar{M}$ است. فرض کنید a یک مقدار منظم از f (یعنی مشتق در a موجود و مخالف صفر) باشد و $M^n \subset \bar{M}$ یک ابر رویه در $\bar{M}$ باشد بقسمی که $M = \{p \in \bar{M} ; f(p)=a\}$. ثابت کنید:

(الف) لاپلاسین $\bar{\Delta}f$ بصورت زیر نوشته می‌شود.

$$\bar{\Delta}f = \text{trace Hess} f$$

(ب) اگر $X, Y \in \mathcal{X}(\bar{M})$ در این صورت ثابت کنید:

$$\langle (Hess f)Y, X \rangle = \langle Y, (Hess f)X \rangle$$

از این عبارت نتیجه می‌شود که $Hess f$ خودالحاق است. لذا یک فرم دوخطی متقارن به صورت زیر روی $T_p \bar{M}$ در نقطه $p \in \bar{M}$ تعریف می‌کند.

(ج) انحنای میانگین H ابر رویه $M \subset \bar{M}$ بصورت زیر داده می‌شود.

$$nH = -\text{div}\left(\frac{\text{grad} f}{|\text{grad} f|}\right).$$

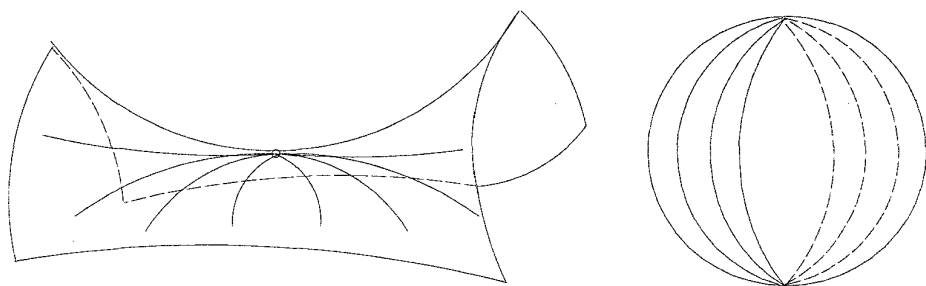
(د) نشان دهید هر ابر رویه نشاننده $M \subset \bar{M}$ بطور موضعی تصویر معکوس یک مقدار منظم است.

راهنمایی. برخی از بخش‌های این تمرین به آسانی و با استفاده از تعاریف مربوطه قابل حل است. چنانچه در حل کامل نیاز به جزئیات بیشتر داشتید، می‌توانید به فصل آخر مراجعه کنید.

میدانهای ژاکوبی و تعبیر هندسی آن

در فصل قبل دیدیم که برای مطالعه بهتر ژئودزیکها باید رفتار جمعی آنها را مورد مطالعه قرار دارد. به عنوان مثال سؤال زیر را مطرح نمود: اگر نقطه شروع یا جهت یک ژئودزیک تغییر کند چه تغییراتی در آن ژئودزیک روی می‌دهد. در این فصل برای مطالعه رفتار ژئودزیکها رابطه بین انحنا و ژئودزیکهای یک منیفلد را مطالعه می‌کنیم. به عبارت دیگر می‌خواهیم ببینیم که انحنا ی یک منیفلد چگونه روی رفتار ژئودزیکهای آن منیفلد اثر می‌گذارد. اگر بخواهیم به طور اختصار این موضوع را بیان کنیم، باید بگوییم که اگر انحنا مثبت باشد، ژئودزیکها پس از گذشتن از یک نقطه مجدداً به هم نزدیک می‌شوند و احتمالاً دوباره یکدیگر

را در نقطه‌ای دیگر قطع می‌کنند. مانند ژئودزیکهای گذرنده از دو قطب یک کره. ولی اگر انحنا منفی باشد، ژئودزیکها پس از گذشتن از یک نقطه از هم دور خواهند شد و امکان آنکه دوباره یکدیگر را قطع کنند، وجود نخواهد داشت مانند ژئودزیک های یک هذلولی گون. شکل ۱.۸ در صفحه ۲۰۸ را ببینید. برای مطالعه این رفتار می توان از یک معادله دیفرانسیل درجه دوم موسوم به معادله ژاکوبی استفاده کرد.



شکل ۱.۸: اگر انحنا مثبت باشد، ژئودزیکها پس از گذشتن از یک نقطه مجدداً به هم نزدیک می‌شوند و اگر انحنا منفی باشد، ژئودزیکها پس از گذشتن از یک نقطه از هم دور خواهند شد.

۱.۸ معادلات ژاکوبی

پیدایش معادله ژاکوبی. قبلاً با معادله دیفرانسیل درجه دومی برای ژئودزیک های کره آشنا شدیم. روش دوم برای به دست آوردن ژئودزیک های کره در فصل التصادق ریمانی را ببینید. در اینجا به نوعی این معادله درجه دوم را بررسی نموده آن را برای منیفلدها تعمیم می دهیم.

فرض کنیم که M یک منیفلد ریمانی و $p \in M$ باشد. در اثبات قضیه گاوس دیدیم که اگر

تابع نمایشی $\exp_p$ در $T_p M$ $v \in T_p M$ تعریف شده و $w \in T_v(T_p M)$ باشد، آنگاه

$$(d\exp_p)_v w = \frac{\partial f}{\partial s}(1, \cdot)$$

که در آن f سطح پارامتری شده‌ای است که توسط رابطه

$$f(t, s) = \exp_p t\rho(s), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad -\varepsilon \leq s \leq \varepsilon$$

تعریف شده و $\rho(s)$ یک منحنی روی $T_p M$ است که در شرایط $\rho(0) = w$ و $\rho(1) = v$

صدق می‌کند. در اینجا می‌خواهیم که $\frac{\partial f}{\partial s}(1, \cdot)$ را توسعه دهیم و میدان

$$(d\exp_p)_{tv}(tw) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, \cdot)$$

در طول ژئودزیک $\delta(t) = \exp_p(tv)$ ، $0 \leq t \leq 1$ ، را محاسبه کنیم. باید $\frac{\partial f}{\partial s}(t, \cdot)$ را به دست آوریم.

$$f(t, \cdot) = \exp_p t\rho(\cdot) = \exp_p(tv)$$

$$\frac{\partial f}{\partial s}(t, \cdot) = d(\exp_p)_{tv} tw$$

میدان برداری در طول ژئودزیک $f(t, \cdot) = \exp_p(tv)$ که با γ نمایش می‌دهیم

$$\gamma = \exp_p(tv)$$

در حقیقت تا زمانیکه γ ، یک ژئودزیک است، داریم $\frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial t} = 0$ بنابراین با استفاده از

تمرین ۸.۲.۴ در صفحه ۹۸ داریم

$$\begin{aligned} a &= \frac{D}{\partial s} \left(\frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} \right) \\ &= \frac{D}{\partial t} \left(\frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} \right) - R \left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s} + R \left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right) \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned}$$

با قرار دادن $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$ در می‌یابیم که J در معادله زیر صدق می‌کند

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0.$$

این معادله را معادله ژاکوبی می‌نامیم.

۲.۸ میدان ژاکوبی

تعریف ۱.۲.۸. فرض کنید $M \rightarrow [0, \alpha]$ یک ژئودزیک روی M باشد. میدان برداری J در طول $\gamma(t)$ را یک میدان ژاکوبی گوئیم اگر به ازای هر $t \in [0, \alpha]$ در معادله ژاکوبی صدق کند.

تذکر. یک میدان ژاکوبی در طول منحنی ژئودزیک γ با شرایط اولیه $J(0)$ و $\frac{D}{dt}J(0)$ مشخص می‌شود برای این کار کافی است $e_1(t), \dots, e_n(t)$ را یک پایه متعامد یکه موازی در طول γ در نظر گیریم. (چنین پایه‌ای همواره وجود دارد. کافی است یک پایه متعامد یکه موازی در یک نقطه از γ تعریف نموده و سپس توسط انتقال موازی به سرتاسر γ توسعه داد.) در این صورت

$$J(t) = \sum_i f_i(t)e_i(t), \quad a_{ij} = \langle R(\gamma'(t), e_i(t))\gamma'(t), e_j(t) \rangle$$

که در آن $i, j = 1, 2, \dots, n = \dim M$. آنگاه

$$\frac{DJ}{dt} = \sum_i (f'_i(t)e_i(t) + f_i(t)D_{\gamma'(t)}e_i(t))$$

$$\frac{D^2 J}{dt^2} = \sum_i f''_i(t)e_i(t)$$

و $R(\gamma', J)\gamma'$ نسبت به پایه مذکور به شکل زیر است

$$\begin{aligned} R(\gamma', J)\gamma' &= \sum_j \langle R(\gamma', J)\gamma', e_j \rangle e_j \\ &= \sum_{i,j} f_i \langle R(\gamma', e_i)\gamma', e_j \rangle e_j \\ &= \sum_{i,j} f_i a_{ij} e_j \end{aligned}$$

بنابراین معادله ژاکوبی با سیستم زیر معادل است.

$$f_j''(t) + \sum_i a_{ij}(t)f_i(t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (1.8)$$

که یک دستگاه خطی مرتبه دوم می‌باشد. بنابراین با داشتن مقادیر اولیه $J(0)$ و $\frac{DJ(0)}{dt}$ یک جواب c^∞ برای دستگاه فوق وجود دارد که روی $[0, a]$ تعریف شده است.

مثال ۲.۲.۸. $\gamma'(t)$ میدان برداری مماس ژئودزیک $\gamma(t)$ یک میدان ژاکوبی در طول γ است. زیرا $D_{\gamma'}\gamma' = 0$ و بنا بر خاصیت پادمتقارن بودن تانسور انحنا $R(\gamma', \gamma')\gamma' = 0$. در اینجا $J(t) = \gamma'(t)$ با شرایط اولیه $J(0) = \gamma'(0)$ و $D_t J(0) = D_{\gamma'} J(0) = 0$ می‌باشد.

$$\frac{D^2}{dt} J(t) = D_{\gamma'}(D_{\gamma'}\gamma') = 0$$

بنابراین

$$\frac{D^2}{dt} J(t) + R(\gamma', \gamma')\gamma' = 0$$

مثال ۳.۲.۸. به طور مشابه $J(t) = t\dot{\gamma}(t)$ نیز یک میدان ژاکوبی در طول $\gamma(t)$ با شرایط اولیه $J(0) = 0$ و $D_t J(0) = \dot{\gamma}(0)$ می‌باشد.

$$\frac{DJ}{dt} = \dot{\gamma}(t) + tD_{\dot{\gamma}(t)}\dot{\gamma}(t)$$

$$\frac{D^2 J}{dt} = D_{\dot{\gamma}(t)}\dot{\gamma}(t) = 0$$

$$R(\dot{\gamma}(t), t\dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t) = tR(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t) = 0.$$

بنابراین

$$\frac{D^2 J}{dt} + R(\dot{\gamma}(t), t\dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t) = 0.$$

گزاره ۴.۲.۸. فرض کنید M منیفلد ریمانی با انحنای ثابت κ بوده و γ یک ژئودزیک M باشد که بر حسب طول قوس پارامتری شده است. یعنی $|\gamma'(t)| = 1$. بعلاوه J را میدان ژاکوبی در طول منحنی γ در نظر بگیرید که همواره بر γ' عمود است. آنگاه داریم

$$R(\gamma', J)\gamma' = \kappa J.$$

اثبات. در مورد منیفلدها با انحنای برشی ثابت داریم:

$$R(X, Y)Z = \kappa(\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y)$$

حال فرض می‌کنیم که J یک میدان ژاکوبی در طول منحنی γ طوری باشد که همواره بر γ عمود باشد. با جایگذاری در رابطه بالا داریم

$$R(\gamma', J)\gamma' = \kappa(\langle J, \gamma' \rangle \gamma' - \langle \gamma', \gamma' \rangle J)$$

چون J همواره بر γ عمود است $\langle J, \gamma' \rangle = 0$ و چون $|\gamma'(t)| = 1$ داریم $\langle \gamma', \gamma' \rangle = 1$.

بنابراین تساوی بالا به شکل $R(\gamma', J)\gamma' = \kappa J$ خواهد بود. $\square$

لذا معادله ژاکوبی را می‌توان به صورت $D_{\gamma'}^2 J + \kappa J = 0$ نوشت.

به منظور یافتن جوابی برای دستگاه معادلات فوق یک میدان برداری موازی در طول γ ، که همواره بر γ' عمود باشد انتخاب کرده، آن را با $w(t)$ نشان می‌دهیم. یعنی $\langle \gamma'(t), w(t) \rangle = 0$ و $|w(t)| = 1$. با حل این معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه $J(0) = 0$ و $J'(0) = w(0)$ داریم:

میدانهای ژاکوبی یک منیفلد ریمانی با انحنای برشی ثابت κ :

$$J(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \sin(\sqrt{\kappa}t)w(t) & \kappa > 0 \\ tw(t) & \kappa = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-\kappa}} \sin(\sqrt{\kappa}t)w(t) & \kappa < 0 \end{cases}$$

قضیه ۵.۲.۸. فرض کنید $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ یک ژئودزیک و J یک میدان ژاکوبی در طول منحنی γ باشد که $J(0) = 0$ قرار دهید $D_t J(0) = w$ و $\gamma'(0) = v$ را به عنوان عنصری از $T_{\gamma(0)}M$ در نظر بگیرید و منحنی $\rho(s)$ را روی $T_{\gamma(0)}M$ با $\rho(0) = av$ و $\rho'(0) = w$ را بسازید. قرار دهید $f(t, s) = \exp_p(\frac{t}{a}\rho(s))$ و $p = \gamma(0)$ و میدان ژاکوبی $\bar{J}$ را به شکل $\bar{J} = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$ تعریف کنید. در این صورت $J = \bar{J}$ روی $[0, a]$.

اثبات. برای $s = 0$ با توجه به اینکه $f(t, s) = \exp_p(\frac{t}{a}\rho(s))$ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{D\bar{J}(t)}{dt} &= \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0) \\ &= \frac{D}{\partial t} \left((d\exp)_{\frac{t}{a}\rho(0)}(t\rho'(0)) \right) \\ &= \frac{D}{\partial t} ((d\exp)_{tv}(tw)) \\ &= \frac{D}{dt} (t(d\exp)_{tv}w) \\ &= d(\exp_p)_{tv}(w) + t \frac{D}{dt} ((d\exp_p)_{tv}(w)) \end{aligned}$$

بنابراین به ازای $t = 0$

$$\frac{D}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial s}(\cdot, 0) \right) = \frac{D\bar{J}(0)}{dt} = d(\exp_p)_* w = w$$

(تساوی آخر با توجه به اینکه مشتق تابع $\exp$ در همسایگی صفر به صورت همانی عمل می‌کند، بدست آمده است.) بنابراین تا زمانیکه $J(\cdot) = \bar{J}(\cdot) = 0$ و $w = \frac{DJ}{dt}(\cdot)$ از قضیه یکتایی نتیجه می‌گیریم که $J = \bar{J}$. $\square$

نتیجه ۶.۲.۸. قرار دهید $M \rightarrow [\cdot, a]$ یک ژئودزیک باشد. در این صورت میدان ژاکوبی J در طول γ که $J(\cdot) = 0$ به صورت زیر است.

$$J(t) = (d\exp_p)_{t\gamma'(\cdot)}(tJ'(\cdot)); \quad t \in [\cdot, a].$$

قضیه ۷.۲.۸. فرض کنید $p \in M$ و $\gamma : [\cdot, a] \rightarrow M$ یک ژئودزیک باشد، بطوریکه $\gamma(\cdot) = p$ و $\gamma'(\cdot) = v$. فرض کنید $w \in T_p(M)$ باشد و $|w| = 1$ و J را یک میدان ژاکوبی در طول منحنی γ در نظر بگیرید.

$$J(t) = (d\exp_p)_{tv}(tw); \quad 0 \leq t \leq a.$$

آنگاه بسط تیلور $|J(t)|^2$ به ازای $t = 0$ برابر است با

$$|J(t)|^2 = t^2 - \frac{1}{3}\langle R(v, w)v, w \rangle t^4 + R(t)$$

که در آن $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(t)}{t^4} = 0$.

اثبات. تا زمانیکه $J(\cdot) = 0$ و $J'(\cdot) = w$ ، تا ضریب اول به صورت زیر است:

$$\langle J, J \rangle(\cdot) = 0$$

$$\langle J, J \rangle'(\cdot) = 2\langle J, J' \rangle(\cdot) = 0$$

$$\langle J, J \rangle''(\cdot) = 2\langle J', J' \rangle(\cdot) + 2\langle J'', J \rangle(\cdot) = 2$$

در تساوی آخر با توجه به قضیه قبل داریم $J'(\cdot) = w$ بنابراین $\langle J', J' \rangle(\cdot) = 1$ $|w| = \langle J', J' \rangle(\cdot) = 1$ از طرف دیگر تازمانیکه $J''(\cdot) = -R(\gamma', J)\gamma'(\cdot) = 0$ داریم:

$$\langle J, J \rangle'''(\cdot) = 6\langle J', J'' \rangle(\cdot) + 2\langle J''', J \rangle(\cdot) = 0.$$

ثابت می‌کنیم.

$$\nabla_{\gamma'}(R(\gamma', J)\gamma')(\cdot) = R(\gamma', J')\gamma'(\cdot). \quad (2.8)$$

برای اثبات توجه کنید که به ازای هر w ، در $t = 0$ داریم (با استفاده از این خاصیت انحنای که به ازای هر $X, Y, Z, T \in \mathcal{X}(M)$ داریم $(X, Y, Z, T) = (Z, T, X, Y)$)

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt}\langle R(\gamma', w)\gamma', J \rangle &= \frac{d}{dt}\langle R(\gamma', J)\gamma', w \rangle \\ &= \left\langle \frac{D}{dt}R(\gamma', J)\gamma', w \right\rangle + \langle R(\gamma', J)\gamma', w' \rangle \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\left\langle \frac{D}{dt}(\gamma', J)\gamma', w \right\rangle = \frac{d}{dt}\langle R(\gamma', w)\gamma', J \rangle - \langle R(\gamma', J)\gamma', w' \rangle$$

با توجه به اینکه $R(\gamma', w')\gamma' = 0$ پس

$$\langle R(\gamma', J)\gamma', w' \rangle(\cdot) = 0.$$

لذا

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt}\langle R(\gamma', J)\gamma', w \rangle &= \frac{D}{dt}\langle R(\gamma', w)\gamma', J \rangle + \langle R(\gamma', w)\gamma', J' \rangle \\ &= \langle R(\gamma', w)\gamma', J' \rangle \\ &= \langle R(\gamma', J')\gamma', w \rangle \end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{D}{dt}(R(\gamma', J)\gamma')(\cdot) = R(\gamma', J')\gamma'(\cdot)$$

که رابطه (۲.۸) را ثابت می‌کند.

حال با استفاده از رابطه (۲.۸) و معادله ژاکوبی داریم

$$J'''(\cdot) = -\nabla_{\gamma'}(R(\gamma', J)\gamma')(\cdot)$$

$$J'''(\cdot) = -R(\gamma', J')\gamma'(\cdot) \quad \text{بنابراین}$$

$$\langle J, J \rangle^{(\mathfrak{r})}(\cdot) = \gamma \langle J', J''' \rangle(\cdot) + \mathfrak{e} \langle J'', J'' \rangle(\cdot) + \mathfrak{z} \langle J^{(\mathfrak{r})}, J \rangle(\cdot)$$

$$= -\mathfrak{A} \langle J', R(\gamma', J')\gamma' \rangle(\cdot)$$

$$= -\mathfrak{A} \langle R(v, w)v, w \rangle$$

$$|J(t)|^{\mathfrak{r}} = t^{\mathfrak{z}} \left(\frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{r}} \right) - \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{r}!} \langle R(v, w)v, w \rangle t^{\mathfrak{r}} + O(t^{\mathfrak{d}})$$

□

نتیجه ۸.۲.۸. اگر منحنی $\gamma: [\cdot, l] \rightarrow M$ بر حسب طول قوس پارامتری شده باشد

(یعنی $|v| = 1$ و $\langle w, v \rangle = 0$ آنگاه $\langle R(v, w)v, w \rangle$ همان انحنای برشی در p مرتبط

با صفحه σ است که توسط v, w ساخته می‌شود، بنابراین در این شرایط داریم:

$$|J(t)|^{\mathfrak{r}} = t^{\mathfrak{z}} - \frac{1}{\mathfrak{r}} \kappa(p, \sigma) t^{\mathfrak{r}} + R(t)$$

$$\kappa(p, \sigma) = \frac{\langle R(v, w)v, w \rangle}{|v|^{\mathfrak{r}}|w|^{\mathfrak{r}} - \langle v, w \rangle^{\mathfrak{r}}}$$

نتیجه ۹.۲.۸. با شرایط مشابه نتیجه قبل

$$|J(t)| = t - \frac{1}{\mathfrak{e}} \kappa(p, \sigma) t^{\mathfrak{r}} + \tilde{R}(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow \cdot} \frac{\tilde{R}(t)}{t^{\mathfrak{r}}} = \cdot.$$

۳.۸ تعبیر میدانهای ژاکوبی و رابطه میان انحنا و توزیع ژئودزیکها

رابطه مستقیمی بین انحناى فضا و نحوه توزیع ژئودزیکها وجود دارد. برای آنکه بتوان این رابطه را توسط یک معادله بیان نمود از میدانهای ژاکوبی استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $J(t)$ یک میدان یک میدان ژاکوبی در طول منحنی $M \rightarrow [0, \delta]$: γ باشد بطوریکه $J(0) = 0$.

با استفاده از معادله ژاکوبی مربوط به J و بسط تیلور داریم:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0) \right| = |J(t)| = t - \frac{1}{6} \kappa(p, \sigma) t^3 + \tilde{R}(t).$$

یعنی اندازه تغییرات $\left| \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0) \right|$ در رابطه بالا صدق می‌کند که در آن $\kappa(p, \sigma)$ انحناى برشی در نقطه p مربوط به صفحه σ و $\tilde{R}(t)$ جمله مربوط به بسط تیلور در نقطه $t = 0$ است بطوریکه

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tilde{R}(t)}{t^3} = 0.$$

حال با استفاده از این رابطه می‌بینیم اندازه تغییرات $\frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$ یا به عبارت دیگر اندازه انحرافات از ژئودزیک γ بستگی به علامت κ دارد. یعنی وقتی $\kappa < 0$ ، مقدار اندازه تغییرات $\frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$ افزایش پیدا می‌کند یا به عبارت دیگر از نظر هندسی ژئودزیکها از هم دور می‌شوند و با افزایش t این فاصله به سرعت افزایش پیدا می‌کند. اما از طرف دیگر وقتی $\kappa > 0$ باشد، مقدار اندازه تغییرات کمتر بوده و با افزایش t کاهش پیدا می‌کند. یعنی از نظر هندسی با افزایش t ، ژئودزیکها بیشتر به هم نزدیک می‌شوند. شکل ۱.۸ در صفحه ۲۰۸ را ببینید.

۴.۸ نقاط مزدوج

تعریف ۱.۴.۸. فرض کنید M یک ژئودزیک روی M بوده و $\gamma(a) = p$ و $\gamma(b) = q$ دو نقطه از γ باشند. می‌گوییم نقاط p, q در طول γ مزدوج^۱ یکدیگرند، اگر یک میدان ژاکوبی غیر صفر J در طول γ موجود باشد بطوریکه $J(a) = 0$ و $J(b) = 0$ (یا به عبارت دیگر نقاطی را که در آنها میدانهای ژاکوبی صفر می‌شوند، نقاط مزدوج می‌نامیم).

مثال ۲.۴.۸. فرض کنید $S^n = \{x \in R^{n+1}; |x| = 1\}$ ، می‌دانیم انحناى برشی S^n همه جا، ۱ است. میدان ژاکوبی روی S^n در مثال ۳، بیان شد. $J(t) = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \sin(t\sqrt{\kappa})w(t)$ که در اینجا $J(t) = (\sin t)w(t)$ در شرط $J(0) = J(\pi) = 0$ صدق می‌کند. بنابراین در طول هر ژئودزیک γ روی S^n ، نقاط متقاطع $\gamma(0)$ و $\gamma(\pi)$ با $\gamma(0)$ مزدوج هستند.

فرم های التصاق^۱

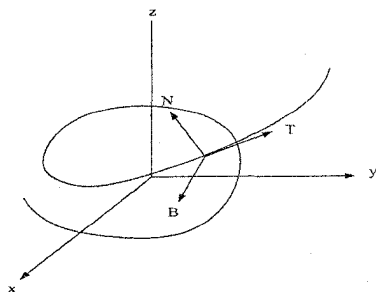
در این بخش به معرفی یک فرم های التصاق در منیفلدها مشهور به التصاق کارتان^۲ در منیفلدهای ریمانی می پردازیم. ضمن معرفی یک کاربرد از نظریه منحنی ها در تعریف دستگاه های مختصات روی منیفلدهای ریمانی، روند تاریخی و نحوه تعمیم آن را بیان می

^۱Theory of curves and connection 1-forms

^۲Cartan Joseph Elie پدر Cartan Paul Henry یک ریاضیدان فرانسوی است که در زمینه هندسه

دیفرانسیل تحقیقات زیادی داشته و در سال های ۱۸۶۹ الی ۱۹۵۱ می زیسته است. التصاق کارتان در هندسه فینسلر منصوب به وی است. پس روی که در سال ۱۹۰۴ متولد گردیده و تا اواخر قرن بیستم می زیسته است موسس بنیاد بورباکی است و تحقیقات زیادی در مورد توابع چند متغییره تحلیلی و جبر همولوژی دارد.

کنیم. در هندسه تعریف دستگاه مختصات نقش چشمگیری در اثبات قضایا و توسعه آنها دارد. در فصول قبل با استفاده از یک پایه یک عمود روی فضای مماس، و تصویر آن روی منیفلد توسط نگاشت نمایی، با یکی از این دستگاه ها به نام مختصات نرمال، آشنا شده ایم. حال در اینجا این پایه متعامد یک روی فضای مماس را ابتدا در روی منیفلدهای یک بعدی معرفی می کنیم و آن را کنج متحرک یا میدان قابی فرنه می نامیم. این نظریه در سال ۱۸۴۷ توسط فرنه مطرح گردید. در دروس حسابان کنج متحرک فرنه را با یک سه تایی از بردارهای یک مماس، یک قائم و قائم دوم معرفی نموده با (T, N, B) نمایش می دهیم. شکل ۱.۹ در صفحه ۲۲۰ را ببینید.



شکل ۱.۹: کنج متحرک فرنه (T, N, B) به عنوان پایه های غیر مختصاتی متحرک در طول یک منحنی به کار می رود.

اهمیت اساسی دیگر فرمول های فرنه در آن است که توسط آن می توان مشتقات

بردارهای پایه (T, N, B) را بر حسب خود آنها نوشت. این موضوع در سال ۱۸۸۰ توسط داربو^۳ برای رویه ها تعمیم داده شد. میدان های متحرک داربو حدود نیم قرن بعد توسط کارتان برای منیفلدهای n -بعدی تعمیم داده شد. شیوه کار کارتان بسیار ساده بود. او به هر نقطه از یک شی هندسی اعم از فضای $\mathbb{R}^n$ و یا منیفلد n -بعدی، یک n -تایی دو به دو عمود برهم وابسته نموده، سپس با استفاده از بسط متعامد، میزان تغییرات این n -بعدی را بر حسب خود آنها به دست آورد. این عمل دقیقاً مشابه عملی است که فرمول های فرنه انجام می دهند. برای اطلاعات بیشتر در این مورد می توانید کتابهای [۶۶]، [۶۳]، [۵۳] و جلد دوم [۷۲] را ببینید.

۱.۹ پایه های غیر مختصاتی

در این بخش به معرفی پایه های غیر مختصاتی^۴ می پردازیم. ایده اصلی این تعریف از آنجا ناشی می شود که اگر یک پایه متعامد یکه روی فضای مماس داشته باشیم می توان از آن اطلاعاتی در مورد چگونگی متریک ریمانی به دست آورد، و برعکس. به عبارت دیگر در $p \in M$ ، هر انتخاب از اعضای پایه فضای مماس $T_p M$ که متعامد یکه باشد، یک ضرب داخلی روی فضای مماس تعریف می کند و این ضرب داخلی لااقل به شکل موضعی یک متریک ریمانی روی منیفلد M تولید می کند. برعکس، هر هر متریک ریمانی روی M ، یک ضرب داخلی روی $T_p M$ تعریف می کند که با استفاده از آن می توان یک پایه متعامد یکه روی $T_p M$ معرفی کرد. هنگامی که یک کارت (x, U) روی M معرفی می کنیم می توان با استفاده از آن یک پایه برای فضای مماس معرفی نمود. این پایه را به ازای $i, j = 1 \dots n$ با $\{\partial/\partial x^i\}$ و دوگان آن را با $\{dx^i\}$ نمایش می دهیم. اما اگر یک متریک

^۳Darboux Gaston Jean یک ریاضیدان فرانسوی است که در زمینه معادلات با مشتقات جزئی و هندسه دیفرانسیل تحقیقات زیادی داشته و در سال های ۱۸۴۲ الی ۱۹۱۷ می زیسته است.

^۴non-coordinate bases

ریمانی مانند g روی M موجود باشد، می توان مستقلا با استفاده از ضرب داخلی مربوط به آن متریک، یک پایه متعامد یکه یا یک قاب^۵ مانند E_α به ازای $\alpha, \beta = 1 \dots n$ برای فضای مماس معرفی نمود. طبیعتا اعضای این قاب را می توان به صورت ترکیب خطی از $\{\partial/\partial x^i\}$ نوشت، $E_\alpha = A_\alpha^i(\partial/\partial x^i)$ که در آن مولفه های یک ماتریس از $GL(n, \mathbb{R})$ و دترمینان $\det(A_\alpha^i) > 0$ است. قاب E_α باید متعامد یکه باشد، لذا باید در شرط زیر صدق کند.

$$g(E_\alpha, E_\beta) = g_{ij} A_\alpha^i A_\beta^j = \delta_{\alpha\beta}$$

معکوس این رابطه به صورت زیر نوشته می شود، $g_{ij} = \delta_{\alpha\beta} A_i^\alpha A_j^\beta$ که در آن A_i^α مولفه های ماتریس معکوس A_α^i هستند. قاب $\{E_i\}$ و دوگان آن $\{\theta^i\}$ را که به صورت $\theta^i = A_\alpha^i dx^\alpha$ تعریف می شوند را پایه های غیر مختصاتی می نامیم. توجه داشته باشید $\theta(E) = I$ ماتریس همانی است و هنگام ضرب، قاب $\{E_i\}$ را به صورت ماتریس خطی و دوگان آن $\{\theta^i\}$ را به صورت ماتریس ستونی می نویسیم. لذا در هر نقطه $p \in M$ ، اگر $X \in T_p M$ آنگاه

$$X = \sum_{i=1}^n \theta^i(X) E_i. \quad (1.9)$$

یادآوری می کنیم که اگر θ^1 و θ^2 دو ۱-فرم باشند ضرب خارجی آنها به صورت زیر تعریف می شود. صفحه ۱۸۵ از کتاب [۲] را ببینید.

$$\theta^1 \wedge \theta^2 := \theta^1 \otimes \theta^2 - \theta^2 \otimes \theta^1. \quad (2.9)$$

همچنین بنا بر تعریف دیفرانسیل برای هر زوج از بردارهای دلخواه داریم

$$\begin{aligned} d\theta(X, Y) &= X(\theta(Y)) - Y(\theta(X)) - \theta([X, Y]), \\ &= \nabla_X(\theta(Y)) - \nabla_Y(\theta(X)) - \theta([X, Y]). \end{aligned} \quad (3.9)$$

۲.۹ ۱- فرم های التصاق^۶ کارتان

قاب متعامد یک $\{E_i\}$ و دوگان آن $\{\theta^i\}$ را در نظر می گیریم. مشابه آنچه در مورد قاب متحرک فرنه در ریاضیات مقدماتی انجام داده ایم از بردارهای این قاب مشتق همگرد می گیریم و فرم های التصاق را به عنوان ضرایب مشتقات همگرد این قاب تعریف می کنیم. وجود فرم های التصاق را با استفاده از گزاره زیر بررسی می کنیم.

گزاره ۱.۲.۹. (کارتان) فرض کنیم $d\theta = (d\theta^1, \dots, d\theta^n)$ ، آنگاه یک ماتریس یکتا از ۱-فرم ها، مانند $\omega = (\omega^i_j)$ وجود دارد به طوری که $d\theta = -\omega \wedge \theta$ و $\omega^t = -\omega$ یا به طور موضعی

$$d\theta^i = -\omega^i_j \wedge \theta^j. \quad (۴.۹)$$

$$\omega^i_j = -\omega^j_i.$$

اثبات. توجه داشته باشید که چون ω یک ماتریس و θ یک بردار ستونی است، θ را در سمت راست قرار می دهیم. قاب متعامد یک $\{E_i\}$ و دوگان آن $\{\theta^i\}$ در هر نقطه $p \in M$ بردار دلخواه $X \in T_p M$ را در نظر گرفته از بردارهای قاب $\{E_i\}$ مشتق همگرد در جهت بردار X می گیریم.

$$\nabla_X E_j = \sum_{i=1}^n \omega^i_j(X) E_i \quad (۵.۹)$$

در اینجا با استفاده از خاصیت بسط متعامد یا متعامد یک بودن بردارهای $\{E_i\}$ می توان وجود ضرایب موسوم به فرم های التصاق $\omega = (\omega^i_j)$ را با ضرب بردارهای قاب و با توجه به صفر شدن حاصلضرب بردارهای غیر هم نام به دست بیاوریم.

$$\omega^i_j(X) = g(\nabla_X E_i, E_j) = \langle \nabla_X E_i, E_j \rangle \quad (۶.۹)$$

^۶ connection 1-forms

حال پادمقارن بودن فرم های التصاق را بررسی می کنیم. با توجه سازگاری التصاق ∇_X با متریک g داریم

$$\begin{aligned} \bullet &= \nabla_X g(E_i, E_j) \\ &= g(\nabla_X E_i, E_j) + g(E_j, \nabla_X E_i) \\ &= \omega_j^i(X) + \omega_i^j(X). \end{aligned}$$

برای اثبات رابطه (۴.۹)، از تاب آزادی التصاق ∇_X استفاده می کنیم. باید نشان دهیم

$$d\theta^i(E_k, E_l) = - \sum_{j=1}^n (\omega_j^i \wedge \theta^j)(E_k, E_l). \quad (۷.۹)$$

با استفاده از رابطه (۳.۹)، سمت چپ رابطه (۷.۹) به صورت زیر نوشته می شود.

$$\begin{aligned} d\theta^i(E_k, E_l) &= \nabla_{E_k} \theta^i(E_l) - \nabla_{E_l} \theta^i(E_k) - \theta^i([E_k, E_l]) \\ &= -\theta^i([E_k, E_l]). \end{aligned}$$

از طرف دیگر سمت راست رابطه (۷.۹) عبارت است از

$$\begin{aligned} -(\omega_j^i \wedge \theta^j)(E_k, E_l) &= \omega_j^i(E_l) \theta^j(E_k) - \omega_j^i(E_k) \theta^j(E_l) \\ &= \omega_j^i(E_l) - \omega_l^i(E_k) \\ &= \theta^i(\nabla_{E_l} E_k) - \theta^i(\nabla_{E_k} E_l) \\ &= -\theta^i([E_k, E_l]). \end{aligned}$$

بنابراین طرفین رابطه (۷.۹) با هم برابر بوده و حکم ثابت می شود. $\square$

تعریف ۲.۲.۹. قاب متعامد یکه $\{E_i\}$ و دوگان آن $\{\theta^i\}$ را در نظر می گیریم. فرض کنیم $\omega = (\omega_j^i)$ ماتریسی باشد که درایه های آن از ۱-فرم هایی به صورت زیر تعریف شده

است.

$$\omega^i_j := \Gamma^i_{jk} \theta^k, \quad (۸.۹)$$

که در آن ظرایب Γ^i_{jk} به صورت زیر تعریف می شوند.

$$\nabla_{E_j} E_k := \Gamma^i_{jk} E_i. \quad (۹.۹)$$

ماتریس ۱-فرمی (ω^i_j) را ۱-فرم التصاق^۷ و معادلات $d\theta = -\omega \wedge \theta$ و $\omega^t = -\omega$ را دومین معادلات ساختاری^۸ می نامیم.

اولین معادلات ساختاری در قالب متعامد یک $\{E_i\}$ توسط رابطه (۴.۹) بیان می شوند. این روابط را اولین معادلات ساختاری کارتان^۹ نیز می نامند.

با توجه به روابط (۴.۹)، (۸.۹) و (۹.۹) معادلات ساختاری، یک التصاق یکتای بدون تاب و سازگار با متریک روی منیفلد M تعریف می کنند، که همان التصاق لوی چی ویتای منیفلد ریمانی (M, g) است. معادلات ساختاری (۴.۹) را می توان با استفاده از قاب متعامد یک $\{E_i\}$ به صورت ساده ضرب ماتریس ها $\nabla E = E.\omega$ یا $\nabla E_i = \sum_{j=1}^n E_j \omega^j_i$ نوشت.

^۷connection 1-form

^۸second structural equations

^۹first Cartan structural equations

۳.۹-۲- فرم انحنا در منیفلدها^{۱۰}

تانسور انحنا ی ریمان و تانسور تاب منیفلد M را در نظر می گیریم

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

در گزاره زیر کارتان رابطه بین ۱- فرم التصاق و تانسور انحنا را به دست آورد.

گزاره ۱.۳.۹. (کارتان) اگر $\Omega = (\Omega^i_j)$ ماتریسی باشد که درایه های آن از ۲- فرم هایی به صورت زیر تشکیل شده است

$$\Omega^i_j = d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j. \quad (۱۰.۹)$$

آنگاه این ماتریس پاد متقارن بوده و درایه های آن را می توان به صورت زیر برحسب مولفه های تانسور انحنا نوشت.

$$R(X, Y)E_j = \Omega^i_j(X, Y).E_i. \quad (۱۱.۹)$$

اثبات. کافی است طرفین رابطه ۱۱.۹ را محاسبه نماییم، درستی آن بنابر تعریف Ω به سادگی بررسی می شود. از آنجا پاد متقارن بودن تانسور انحنا پاد متقارن بودن Ω را نتیجه می دهد. بنا بر تعریف تانسور انحنا سمت چپ رابطه (۱۱.۹) عبارت است از

$$R(X, Y)E_j = \nabla_X \nabla_Y E_j - \nabla_Y \nabla_X E_j - \nabla_{[X, Y]} E_j.$$

سمت راست رابطه (۱۱.۹) عبارت است از

$$\begin{aligned} \Omega^i_j(X, Y).E_i &= (d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j)(X, Y).E_i \\ &= (d\omega^i_j(X, Y) + \omega^i_k \wedge \omega^k_j(X, Y)).E_i. \end{aligned}$$

^{۱۰} connection 1-forms

با استفاده از رابطه (۳.۹) داریم

$$\begin{aligned}\Omega_j^i(X, Y).E_i &= (\nabla_X \omega_j^i(Y)).E_i (\nabla_Y \omega_j^i(X)).E_i - (\omega_j^i([X, Y])).E_i + \\ &\quad \omega_k^i(X).E_i. \omega_j^k(Y) - \omega_k^i(Y).E_i. \omega_j^k(X) \\ &= (\nabla_X (\nabla_Y E_j) - \omega_j^i(Y) \nabla_X E_i - (\nabla_Y (\nabla_X E_j)) + \omega_j^i(X) \nabla_Y E_i \\ &\quad - \nabla_{[X, Y]} E_j + \omega_j^k(Y) \nabla_X E_k - \omega_j^k(X) \nabla_Y E_k \\ &= R(X, Y) E_i + \omega_j^i(X) \nabla_Y E_i - \omega_j^k(X) \nabla_Y E_k + \\ &\quad \omega_j^k(Y) \nabla_X E_k - \omega_j^i(Y) \nabla_X E_i \\ &= R(X, Y) E_i\end{aligned}$$

□

با استفاده از این گزاره می توان ۲-فرم انحنای را به صورت زیر تعریف کرد.

تعریف ۲.۳.۹. فرض کنیم $\Omega = (\Omega_j^i)$ ماتریسی باشد که درایه های آن از ۲-فرم هایی به صورت زیر تشکیل شده است.

$$\Omega_j^i := 1/2 R_{jkl}^i \theta^k \wedge \theta^l. \quad (12.9)$$

در اینجا R_{jkl}^i مولفه های تانسور انحنا ریمان است. ماتریس ۲-فرمی (Ω_j^i) را ۲-فرم انحنای^{۱۱} و معادلات ساختاری^{۱۲} $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$ را دومین معادلات ساختاری^{۱۲} می نامیم.

دومین معادلات ساختاری در قالب متعامد یک $\{E_i\}$ توسط رابطه (۱۰.۹) بیان می شوند.

^{۱۱}curvature 2-form

^{۱۲}second structural equations

مثال ۳.۳.۹. فرض کنیم میدان های قابی متعامد یکه $\{E_i\}$ به ازای $i = 1, 2, 3$ توسط رابطه زیر داده شوند.

$$E_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3,$$

$$E_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3,$$

$$E_3 = a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3,$$

که در آن e_i به ازای $i = 1, 2, 3$ میدان های قابی طبیعی $\mathbb{R}^3$ هستند. ماتریس ضرایب $A = (a_{ij})$ را ماتریس رفتاری^{۱۳} یا ماتریس وضعیت میدان قابی $\{E_i\}$ می نامیم. به راحتی بررسی می شود که این ماتریس معکوس پذیر بوده و متعامد است، یعنی $A^{-1} = {}^t A$. اگر دیفرانسیل ماتریس $A = (a_{ij})$ را با $dA = (da_{ij})$ به ازای $i, j = 1, 2, 3$ تعریف کنیم، نشان دهید ۱- فرم التصاق را می توان از رابطه زیر به دست آورد.

$$\omega = dA {}^t A$$

اثبات. فرض کنیم X یک بردار مماس در نقطه p باشد. رابطه (۶.۹) را در نظر گرفته مقادیر میدان های قابی $E_i = \sum_k a_{ik}e_k$ را در آن قرار می دهیم.

$$\begin{aligned} \omega_j^i(X) &= \langle \nabla_X E_i, E_j \rangle = \langle \nabla_X (\sum_k a_{ik}e_k), \sum_l a_{jl}e_l \rangle \\ &= \langle \sum_k X(a_{ik})e_k, \sum_l a_{jl}e_l \rangle. \end{aligned}$$

از آنجا با استفاده از $\langle e_k, e_l \rangle = \delta_{kl}$ داریم

$$\begin{aligned} \omega_j^i(X) &= \sum_k X(a_{ik})a_{jk} = \sum_k d(a_{ik})a_{jk} \\ &= \sum_k d(a_{ik}) {}^t a_{kj}. \end{aligned}$$

□

این رابطه شکل موضعی $\omega = dA {}^t A$ است.

^{۱۳}attitude

مثال ۴.۳.۹. میدان های قابی $\{X_i\}$ موسوم به میدان های قابی پایای چپ به ازای $i = 1, 2, 3$ روی کره ۳-بعدی $M = S^3$ توسط رابطه زیر تعریف می شوند.

$$[X_i, X_{i+1}] = 2X_{i+2}, \quad 1 \leq i, i+1, i+2 \leq 3$$

اگر میدان های قابی دوگان را با $\theta = (\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ نمایش دهیم آنگاه

$$d\theta^1 = -2\theta^2 \wedge \theta^3, \quad (13.9)$$

$$d\theta^2 = -2\theta^3 \wedge \theta^1,$$

$$d\theta^3 = -2\theta^1 \wedge \theta^2.$$

۱- فرم التصاق ω و ۲- فرم انحنای Ω مربوط به میدان های قابی پایای چپ $\{X_1, X_2, X_3\}$ را به دست آورید.

اثبات. برای محاسبه $d\theta$ ابتدا ω را حساب می کنیم. بنابر خاصیت پاد متقارن بودن ω همواره داریم

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12}^1 & \omega_{13}^1 \\ -\omega_{12}^1 & 0 & \omega_{23}^2 \\ -\omega_{13}^1 - \omega_{23}^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

با استفاده از تعریف $d\theta = -\omega \wedge \theta$ و رابطه (۱۳.۹) باید معادله زیر را حل کنیم.

$$2\theta^2 \wedge \theta^3 = \omega_{12}^1 \wedge \theta^2 + \omega_{13}^1 \wedge \theta^3,$$

$$2\theta^3 \wedge \theta^1 = -\omega_{12}^1 \wedge \theta^1 + \omega_{23}^2 \wedge \theta^3,$$

$$2\theta^1 \wedge \theta^2 = -\omega_{13}^1 \wedge \theta^1 - \omega_{23}^2 \wedge \theta^2.$$

برای حل این معادله باید ضرایب ω_{ij}^k را طوری انتخاب کنیم که طرفین تساوی با هم برابر

باشند. به عنوان مثال از سطر اول داریم $\omega_1^1 = \theta^2$ و $\omega_1^2 = -\theta^3$. لذا داریم

$$\omega = \begin{pmatrix} \cdot & -\theta^3 & \theta^2 \\ \theta^3 & \cdot & -\theta^1 \\ -\theta^2 & \theta^1 & \cdot \end{pmatrix}.$$

حال برای به دست آوردن ۲-فرم انحنای Ω از ω دیفرانسیل گرفته مقادیر آن را از رابطه (۱۳.۹) جایگزین می‌کنیم.

$$d\omega = \begin{pmatrix} \cdot & -d\theta^3 & d\theta^2 \\ d\theta^3 & \cdot & -d\theta^1 \\ -d\theta^2 & d\theta^1 & \cdot \end{pmatrix}.$$

$$d\omega = \begin{pmatrix} \cdot & 2\theta^1 \wedge \theta^2 & -2\theta^3 \wedge \theta^1 \\ -2\theta^1 \wedge \theta^2 & \cdot & 2\theta^2 \wedge \theta^3 \\ -2\theta^3 \wedge \theta^1 & -2\theta^2 \wedge \theta^3 & \cdot \end{pmatrix}.$$

ازطرف دیگر

$$\omega \wedge \omega = \begin{pmatrix} \cdot & -\theta^3 & \theta^2 \\ \theta^3 & \cdot & -\theta^1 \\ -\theta^2 & \theta^1 & \cdot \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \cdot & -\theta^3 & \theta^2 \\ \theta^3 & \cdot & -\theta^1 \\ -\theta^2 & \theta^1 & \cdot \end{pmatrix}.$$

$$\omega \wedge \omega = \begin{pmatrix} \cdot & \theta^2 \wedge \theta^1 & \theta^3 \wedge \theta^1 \\ -\theta^2 \wedge \theta^1 & \cdot & \theta^3 \wedge \theta^1 \\ \theta^2 \wedge \theta^1 & \theta^3 \wedge \theta^1 & \cdot \end{pmatrix}.$$

با توجه به تعریف $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$ مقدار Ω به دست می آید.

$$\Omega = \begin{pmatrix} \cdot & \theta^1 \wedge \theta^2 & -\theta^3 \wedge \theta^1 \\ -\theta^1 \wedge \theta^2 & \cdot & \theta^2 \wedge \theta^3 \\ \theta^3 \wedge \theta^1 & -\theta^2 \wedge \theta^3 & \cdot \end{pmatrix}.$$

□

تمرین ۵.۳.۹. فرض کنیم که f یک تابع حقیقی و مشتق پذیر دلخواه روی منیفلد ۳-بعدی M باشد. اگر ماتریس زیر ماتریس رفتار یا وضعیت یک میدان قابی متعامد یکه روی فضای مماس $T_p M$ باشد، فرم های التصاق مربوط به آن را به دست آورید.

$$A = \begin{pmatrix} \cos^2 f & \cos f \sin f & \sin f \\ \cos f \sin f & \sin^2 f & -\cos f \\ -\sin f & \cos f \cos f & \cdot \end{pmatrix}$$

راهنمایی. از رابطه $\omega = dA^t A$ در مثال ۳.۳.۹ استفاده کنید.

تمرین ۶.۳.۹. نشان دهید که میدان های قاب متعامد یکه $\{E_i\}$ به ازای $i = 1, 2, 3$ در دستگاه مختصات کروی (φ, θ) به صورت زیر داده می شوند.

$$E_1 = \cos \varphi \cos \theta e_1 + \cos \varphi \sin \theta e_2 + \sin \varphi e_3,$$

$$E_2 = -\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2,$$

$$E_3 = -\sin \varphi \cos \theta e_1 - \sin \varphi \sin \theta e_2 + \cos \varphi e_3,$$

که در آن e_i به ازای $i = 1, 2, 3$ میدان های قابی طبیعی $\mathbb{R}^3$ هستند. ماتریس ضرایب $A = (a_{ij})$ را نوشته، فرم های التصاق مربوط به آن را به دست آورید. راهنمایی. جواب خود را با عبارت زیر مقایسه کنید.

$$\omega_1^2 = \cos \varphi d\theta, \quad \omega_1^3 = d\varphi, \quad \omega_2^3 = \sin \varphi d\theta.$$

۱.۳.۹ اتحاد ریچی و اتحاد بیانچی

اتحادهای ریچی و بیانچی^{۱۴} در ساختار کارتان مشابه معادلاتی به همین نام در التصاق لوی چی ویتا هستند و کاربردهای زیادی در محاسبات تانسوری روی منیفلدها دارند. در گزاره زیر ریچی و بیانچی رابطه بین ۱-فرم التصاق و ۲-فرم انحنا و مشتقات آنها را به دست آوردند.

گزاره ۷.۳.۹. الف. شکل سرتاسری و موضعی اتحاد ریچی به صورت زیر نوشته می شود.

$$\bullet = \theta \wedge \Omega, \quad (14.9)$$

$$\bullet = \theta^j \wedge \Omega^i_j.$$

ب. شکل سرتاسری و موضعی اتحاد دوم یا اتحاد بیانچی به صورت زیر نوشته می شود.

$$d\Omega = \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega, \quad (15.9)$$

$$d\Omega^i_j = \Omega^i_k \wedge \omega^k_j - \omega^i_k \wedge \Omega^k_j.$$

اثبات. باید توجه داشته باشیم که خاصیت پادمقارن بودن ضرب خارجی، برای ضرب ماتریسها در رابطه (۱۵.۹) برقرار نیست. برای به دست آوردن اتحاد اول کافی است از طرفین معادلات اول ساختاری یا رابطه (۴.۹) دیفرانسیل بگیریم.

$$\bullet = dd\theta^j = d(\theta^j \wedge \omega^i_j) = d\theta^j \wedge \omega^i_j - \theta^j \wedge d\omega^i_j$$

$$\bullet = \theta^k \wedge \omega^i_k \wedge \omega^j_j - \theta^j \wedge (\Omega^i_j - \omega^i_k \wedge \omega^k_j).$$

با استفاده از رابطه (۱۰.۹) داریم

$$\begin{aligned} \bullet &= -\theta^j \wedge \Omega_j^i + \theta^j \wedge \omega_k^i \wedge \omega_j^k + \theta^k \wedge \omega_k^j \wedge \omega_j^i \\ \bullet &= -\theta^j \wedge \Omega_j^i + \theta^j \wedge \omega_k^i \wedge \omega_j^k - \theta^k \wedge \omega_j^i \wedge \omega_k^j \\ \bullet &= -\theta^j \wedge \Omega_j^i. \end{aligned}$$

برای به دست آوردن اتحاد دوم یا اتحاد بیانچی کافی است از طرفین معادلات دوم ساختاری یا رابطه (۱۰.۹) دیفرانسیل بگیریم.

$$\begin{aligned} d\Omega_j^i &= d(dw_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k) = d\omega_k^i \wedge \omega_j^k - \omega_k^i \wedge d\omega_j^k \\ &= (\Omega_k^i - \omega_l^i \wedge \omega_k^l) \wedge \omega_j^k - \omega_k^i \wedge (\Omega_j^k - \omega_l^k \wedge \omega_j^l). \end{aligned}$$

□

از اینجا رابطه (۱۵.۹) نتیجه می شود.

تمرین ۸.۳.۹. فرض کنیم $M = \mathbb{R}^n$ باشد.

الف) قاب مختصات دکارتی $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ را می توان به عنوان یک قاب متعامد یکه با دوگان $\theta = (dx^1, \dots, dx^n)$ در نظر گرفت. نشان دهید که فرم های التصاق و انحنا ی مربوط به آن صفر هستند.

ب) نشان دهید که برای قاب متعامد یک دلخواه $\{E_i\}$ با دوگان $\theta = (\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ روی $M = \mathbb{R}^n$ داریم

$$d\theta = -\omega \wedge \theta, \quad (۱۶.۹)$$

$$\bullet = d\omega + \omega \wedge \omega. \quad (۱۷.۹)$$

از رابطه (۱۶.۹) می توان استفاده نموده و مشابه آنچه در فصل زیرمنیفلدهای ریمانی دیدیم، با استفاده از ارتباط بین التصاق های روی M و $\mathbb{R}^n$ معادلات ساختاری زیرمنیفلدهای $M \subset \mathbb{R}^n$ را نوشت. این روابط در جلد پنجم کتاب [۷۲] درج گردیده است.

نظریه کلاف ها

مقدمه

گاهی اوقات در هندسه اتفاق می افتد که می خواهیم با کنار هم قرار دادن یا با اجتماع منیفلدها، منیفلد جدیدی بسازیم. برای انجام این کار باید یک ساختار دیفرانسیل پذیری روی این خانواده از منیفلدها تعریف کنیم. این عمل را کلاف کردن خانواده‌ای از منیفلدها به یکدیگر و این ساختار جدید را ساختار کلافی می نامند.

برای استفاده از این ساختار، خصوصا در فیزیک نظری، احتیاج به عمل مشتق گیری همگرد

روی این منیفلدها یا با تعبیر جدید، مشتق‌گیری همگرد روی کلاف‌ها داریم. این مطالعات تحت نام نظریه کلاف‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد. نظریه کلاف‌ها بخش مهمی از هندسه دیفرانسیل را تشکیل می‌دهد و یکی از اهداف این نظریه ارائه یک تعریف جامع از مشتق‌گیری همگرد^۱ از تانسورها است. همانطوری که در هندسه منیفلدها ابتدای بحث حسابان روی منیفلدها با تعریف میدان برداری به عنوان یک m -تایی از توابع آغاز می‌شود، در نظریه کلافها نیز بحث ما با تعمیم تعریف کلاسیک میدان برداری روی کلاف‌ها آغاز می‌گردد. در این نظریه از مفهوم برش یک کلاف برداری به عنوان تعمیمی از مفهوم میدان برداری روی کلاف‌ها استفاده می‌کنند. به عبارت دیگر می‌دانیم خانواده بردارهای مماس بر یک منیفلد تشکیل یک منیفلد می‌دهند که آنرا منیفلد یا کلاف مماس نامیده و میدان‌های برداری رابه عنوان برش‌هایی از آن تعریف کردیم. (رجوع شود به کتاب [۲]، ۰). مشتق‌گیری همگرد از یک میدان برداری نیز روی برش‌های این کلاف‌ها تعریف گردید. تعمیم این مفاهیم از بردارها به تانسورها به عنوان برش‌هایی از یک کلاف دلخواه، یکی از اهداف این نظریه است.

در بخش اول این فصل به تعریف کلاف تار می‌پردازیم. در بخش دوم به یکی دیگر از روش‌های ساخت منیفلد‌های با ابعاد بالاتر با استفاده از نظریه کلاف‌ها پرداخته می‌شود. در بخش سوم به تعریف یکی از کلافهای بسیار جالب به نام کلاف برداری پرداخته ایم. بخش چهارم به معرفی برشهای کلاف برداری به عنوان تعمیم میدان‌های برداری روی منیفلدها اختصاص دارد. در بخش‌های بعد به مفاهیم فضای دوگان مماس، کلاف برگردان، کلاف افقی و عمودی و در نهایت التصاق روی کلاف‌های برداری پرداخته می‌شود.

این مفاهیم در هندسه ریمانی، هندسه فینسلری و کاربرد آنها در فیزیک مورد نیاز هستند.

^۱covariant derivative

۱.۱۰ کلاف تار یا فضای فیبره

اگر بخواهیم تعریف کلاف تار را در یک جمله ساده بیان کنیم، باید بگوییم که یک کلاف تار یک فضای توپولوژیک است که به طور موضعی مشابه حاصلضرب مستقیم دو فضای توپولوژیک دیگر است. به عنوان مثال قبلا دیدیم که کلاف مماس بر یک منیفلد به این روش ساخته می شود که به هر نقطه x از منیفلد m بعدی M یک فضای برداری m بعدی $T_x M$ نسبت داده می شود و کلاف مماس از کلاف کردن یا به عبارت دقیق تر از اجتماع مجزای این فضاها می ساخته می شود. این کلاف مماس خود یک ساختار منیفلدی دارد. هرچند که عموما منیفلد TM با $M \times \mathbb{R}^m$ به طور سرتاسری دیفئومورف نیست اما برای هر نقطه $x \in M$ همسایگی باز U حول x وجود دارد به طوریکه کلاف مماس بر U با $U \times \mathbb{R}^m$ دیفئومورف است. ویژگی اخیر در بسیاری از ساختارهای هندسی ظاهر می گردد و مبنای تعریف کلاف تار^۲ است.

تعریف ۱.۱.۱۰. فرض کنیم E, B و F منیفلدهایی C^r و $\pi: E \rightarrow B$ یک نگاشت C^r پوشا باشد. چهارتایی (E, π, B, F) را یک کلاف تار می نامیم هرگاه برای هر $b \in B$ زیر مجموعه بازی از B چون U حول b و دیفئومورفیسمی C^r مانند $\phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ موجود باشد به طوری که نمودار زیر جابجایی باشد. یعنی $\pi \circ \phi = pr_1$.

$$\begin{array}{ccc} E \supset \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi} & U \times F \\ & \searrow \pi & \swarrow pr_1 \\ & & U \end{array}$$

^۲ fiber bundle (espace fibré)

E را فضای کل^۳، B را منیفلد پایه^۴، π را نگاشت تصویر^۵، $pr_1 : U \times F \rightarrow U$ را نگاشت تصویر روی مولفه اول و F را تار^۶ کلاف می نامیم. برای هر $b \in B$ ، $\pi^{-1}(b)$ را تار روی b نامیده و با نماد E_b نمایش می دهیم (شکل ۱.۱۰ را ببینید). زوج (U, ϕ) یک کارت کلاف تار^۷ نام دارد. واضح است که بعد منیفلد E برابر است با جمع ابعاد M و F است.

$$\dim E = \dim M + \dim F.$$

چنانچه ابهامی پیش نیاید، به جای نماد (E, π, B, F) از نماد $\pi : E \rightarrow B$ یا تنها از نماد E برای معرفی یک کلاف تار^۸ استفاده می کنیم.

مثال ۲.۱.۱۰. فرض کنیم M یک منیفلد m بعدی C^{r+1} باشد. بنابر آنچه گفته شد TM یک منیفلد $2m$ بعدی C^r است و نگاشت تصویر π نیز C^r می باشد. به راحتی می توان نشان داد $(TM, \pi, M, \mathbb{R}^m)$ یک کلاف تار^۹ C^r است که آن را کلاف مماس منیفلد^۸ می نامند. تارهای این کلاف تار^۹ فضا^{۱۰}های مماس $T_p M = \pi^{-1}(p)$ هستند. شکل ۱.۱۰ در صفحه ۲۳۹ را ببینید.

تعریف ۳.۱.۱۰. مجموعه $\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ از کارت های کلاف تار^۹ را یک اطلس^۹ برای کلاف تار^۹ (E, π, B, F) می نامیم هرگاه U_α ها B را بپوشانند. از تعریف ۱.۱۰ بلافاصله نتیجه زیر حاصل می شود:

^۳total space

^۴base manifold

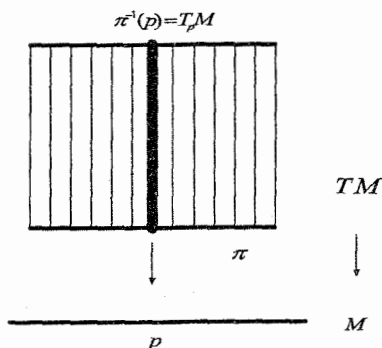
^۵projection map (projection)

^۶fiber

^۷fiber over b (fibre sur b)

^۸tangent bundle

^۹atlas



شکل ۱.۱۰: تارهای کلاف تارِ مماس.

نتیجه ۴.۱.۱۰. نگاشت تصویر π یک نگاشت باز است.

از دوسویی بودن $\phi|_{E_b}$ ، نتیجه زیر حاصل میگردد.

نتیجه ۵.۱.۱۰. $\phi|_{E_b}$ یک دیفئومورفیسم C^r بین E_b و F است.

تعریف ۶.۱.۱۰. کلاف تارِ (E, π, B, F) را C^r کلاف بدیهی یا بدیهی شونده^{۱۰} می نامیم اگر داده های کلاف همگی C^r باشند و دیفئومورفیسمی C^r مانند $H: E \rightarrow B \times F$ موجود باشد بطوریکه $\pi = pr_1 \circ H$. در نتیجه برای چنین کلاف تارِ داریم $E \simeq B \times F$. در این صورت H را یک بدیهی سازی^{۱۱} کلاف E می نامند.

تعریف ۷.۱.۱۰. فرض کنیم B و F دو منیفلد C^r ، $E = B \times F$ و $pr_1(B \times F) = B$ باشند. در این صورت $(B \times F, pr_1, B, F)$ باکارت کلاف (B, I_E) یک کلاف تارِ است که کلاف حاصلضرب^{۱۲} کلاف بدیهی نامیده می شود.

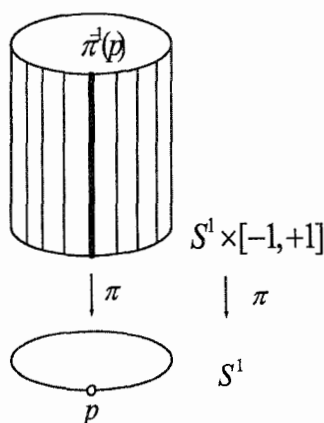
^{۱۰}trivial bundle

^{۱۱}trivialisation

^{۱۲}product bundle (fibré produit)

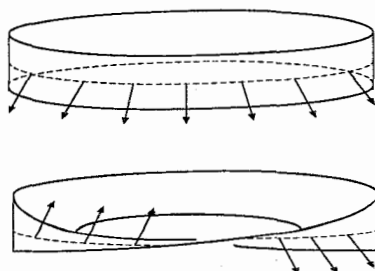
روشن است که هر کلاف حاصلضرب یک کلاف بدیهی شونده است و همچنین هر کارت (U, ϕ) از یک کلاف یک بدیهی سازی $E|_{\pi^{-1}(U)}$ است.

مثال ۸.۱.۱۰. در استوانه مستدیر قائم می توان حاصلضرب $S^1 \times [-1, +1]$ را به عنوان فضای کل، S^1 را به عنوان منیفلد پایه، و خطوط عمودی روی استوانه را به عنوان تارهای یک کلاف حاصلضرب در نظر گرفت. استوانه یک کلاف تار بدیهی شونده است. شکل ۲۴۰ را ببینید.



شکل ۲.۱۰: تارهای کلاف تار حاصلضرب که یک کلاف بدیهی روی استوانه است.

مثال ۹.۱.۱۰. در مثال قبل استوانه مستدیر قائم را می توان از به هم چسبانیدن دو سر یک نوار مستطیل شکل بدون تغییر جهت آنها بدست آورد. حال اگر دو سر این نوار مستطیل شکل را با تغییر جهت یکی از آنها به هم بچسبانیم، نوار موبیوس حاصل می شود که مثالی از یک کلاف تار غیر بدیهی است. زیرا نوار موبیوس، به طور سرتاسری با $S^1 \times [-1, +1]$ همئومورف نیست. نوار موبیوس یک کلاف تار غیر بدیهی بوده و فقط به طور موضعی بدیهی شونده است. کتاب [۲] بخش منیفلدهای جهت پذیر و شکل ۳.۱۰ در صفحه ۲۴۱ را ببینید.



شکل ۳.۱۰: استوانه یک کلاف تار بدیهی و نوار موبیوس یک کلاف تار غیر بدیهی است.

مثال ۱.۰.۱.۱۰. کلاف $(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}, \pi, S^n, \mathbb{R}^+)$ که در آن نگاشت تصویر $\pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow S^n$ توسط $v \rightarrow \frac{v}{\|v\|}$ تعریف میشود یک کلاف تار بدیهی شونده است. در اینجا نگاشت بدیهی سازی دیفئومورفیزی است که توسط کارت سرتاسری $\phi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow S^n \times \mathbb{R}^+$ با فرض $\phi(v) = (\frac{v}{\|v\|}, \|v\|)$ تعریف می شود.

۲.۱.۰ کلاف کروی واحد یا کلاف تار یک

حال با استفاده از متریک ریمانی میتوانیم یک کلاف تار به نام کلاف کروی واحد یا کلاف تار یک^{۱۳} تعریف کنیم که از اهمیت خاصی در هندسه منیفلدها برخوردار است.

تعریف ۱.۲.۱۰. فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی n بعدی با متریک ریمانی g از کلاس C^r باشد. زیر مجموعه $S(M)$ از TM را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$S_x(M) =: \{v \in T_x M | g(v, v) = 1\}$$

$$S(M) =: \bigcup_{x \in M} S_x(M)$$

^{۱۳}Sphere Bundle, Unitary Fiber Bundle (fibre' unitaire)

اگر $\pi|_{S(M)}$ را با نماد π نشان دهیم آنگاه $(S(M), \pi, M, S^{n-1})$ یک کلاف تارِی خواهد بود که آنرا کلاف کروی واحد می‌نامیم. اگر (M, g) یک منیفلد فینسلری باشد، آنگاه کلاف کروی واحد را به علت شباهتی که تارهای آن با شاخص یا ایندیکاتریکس دارد، کلاف ایندیکاتریکس^{۱۴} نیز می‌نامند.

در حقیقت $S_x(M)$ باکره S^{n-1} دیفیئومورف است، در نتیجه بعد آن برابر $n - 1$ است و $S(M)$ یک زیر منیفلد $(2n - 1)$ بعدی C^r از TM است. تارهای این کلاف $\pi : SM \rightarrow M$ نگاشت تصویر $S_x(M) = \pi^{-1}(x) \subset S(M)$ است که در آن نگاشت تصویر $\pi(x, v) = x$ توسط $\pi(x, v) = x$ تعریف می‌شود. لذا با ثابت ماندن x می‌توان نتیجه گرفت که

$$S_x(M) = \pi^{-1}(x) = \{v \in T_x M \mid \|v\| = 1\}.$$

باکره S^{n-1} دیفیئومورف است.

تمرین ۲.۲.۱۰. نشان دهید که $S(M)$ یک زیر منیفلد $2n - 1$ بعدی از TM است.

راهنمایی. زیر منیفلد بودن $S(M)$ را می‌توان با استفاده از روش ساخت زیرمنیفلدها و در نظر گرفتن نگاشت دیفرانسیل پذیر $\{0\} \cup \mathbb{R}^+ : TM \rightarrow f$ که توسط رابطه $v \mapsto \|v\|$ تعریف می‌کنیم نیز تحقیق کرد. $S(M) = f^{-1}(1)$ به فصل روش ساخت زیرمنیفلدها از کتاب [۲] مراجعه کنید.

۱.۲.۱۰ کلاف کروی تصویری^{۱۵}

در در س منیفلد ۱ با مفهوم فضای تصویری^{۱۶} $IP^n(\mathbb{R})$ آشنا شده‌ایم. از نظر هندسی، فضای تصویری از کلیه خطوط راست گذرنده از مبدا در $\{0\} - \mathbb{R}^{n+1}$ تشکیل شده است.

^{۱۴}Indicatrix Bundle

^{۱۵}Projective Sphere Bundle

^{۱۶}Projective Space (espace projective)

کتاب [۲] صفحه ۱۴۱ را ببینید. در حقیقت در روی $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ یک رابطه هم ارزی به صورت زیر تعریف می کردیم.

$$\forall x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \quad \forall y \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \quad x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda > 0 : x = \lambda y$$

سپس خارج قسمت $IP^n(\mathbb{R}) := (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\sim$ را فضای تصویری و نگاشت

$$\eta : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\sim$$

با ضابطه $x \mapsto [x]$ را نگاشت تصویر آن نامیدیم. در اینجا می خواهیم این تعریف را برای منیفلدها تعمیم دهیم.

فرض کنیم M^n یک منیفلد بوده و $p \in M$ باشد. واضح است که می توان به جای $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ هر فضای برداری مانند $T_p M$ با حذف $p \in M$ یعنی $T_p M - \{0\}$ را در نظر گرفت. بنابراین می توانیم در هر نقطه p از M فضای مماس $T_p M$ را در نظر گرفته یک فضای خارج قسمتی روی آن تعریف کنیم. می توان نشان داد که فضای خارج قسمتی $(T_p M - \{0\})/\sim$ با کلاف کروی واحد SM دیفیئومورف و حتی با رعایت شرایط ایزومتریک است. کتاب [۲۰] را ببینید.

توجه نمایید که با استفاده از این رابطه هم ارزی، فضای خارج قسمتی $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ را می توان با کره S^{n+1} یکی در نظر گرفت، کتاب [۲] صفحه ۱۳۷ را ببینید.

حال اگر قرار دهیم $SM = \cup_{p \in M} (T_p M - \{0\})/\sim$ آنگاه مشابه بخش قبل می توان نشان داد که (SM, p, M, S^{2n-1}) تشکیل یک کلاف تار با تار نمونه S^{2n-1} می دهد که آن را کلاف کروی تصویری می نامیم.

گزاره ۳.۲.۱۰. SM همواره یک منیفلد جهت پذیر است، خواه M جهت پذیر باشد یا خیر.^{۱۷} همچنین SM فشرده است هرگاه M فشرده باشد.^{۱۸}

^{۱۷} صفحه ۲۳ از کتاب [۷۳] را ببینید.

^{۱۸} [۲۱] را ببینید.

توضیح ۴.۲.۱۰. مطالعه توابع همگن یعنی توابعی که با تغییر y به λy تغییری نمی کنند، در روی کلاف کروی بهتر انجام می شود. زیرا با توجه به این رابطه هم ارزی تفاوتی ندارد که آن اشیاء هندسی روی TM تعریف شوند یا روی کلاف کروی SM . لذا مطالعه این اشیاء هندسی در روی کلاف کروی به مراتب راحت تر صورت می گیرد. از طرف دیگر SM فشرده است اگر M فشرده باشد، و همواره جهت پذیر است و از این جهت می توان روی SM انتگرال تعریف نمود، حال آنکه این عمل را نمی توان در روی TM انجام داد. برای اطلاعات بیشتر و یک کاربرد از کلاف کروی می توانید بخش ۱۸.۱۰ در صفحه ۲۷۲ و مقاله [۳۰] را ببینید.

۳.۱۰ استفاده از نظریه کلاف ها جهت ساخت منیفلد های با ابعاد بالاتر

با قرار دادن یک منیفلد در کنار یک منیفلد دیگر به روش های مختلف می توان منیفلد جدیدی ساخت، که از آن جمله میتوان به منیفلد حاصل ضرب اشاره کرد. یکی دیگر از روش های ساخت منیفلد ها استفاده از نظریه کلاف هاست به عنوان مثال قبلاً دیدیم که بردارهای مماس بر نقطه x از منیفلد M تشکیل یک فضای برداری یا یک منیفلد m -بعدی می دادند که با کلاف کردن آن به صورت $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$ یک منیفلد $2m$ -بعدی تشکیل میشود. حال فرض کنیم E یک فضای برداری باشد، با استفاده از یک اطلس کلاف روی E ، می توان یک ساختار C^∞ روی E تولید کرد. در عمل گاهی برای ایجاد یک ساختار کلاف روی یک مجموعه E ، در ابتدا یک نگاشت پوشای $\pi : E \rightarrow M$ تعریف کرده و سپس یک پوشش باز $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ از M و یک اطلس کلاف مناسب که توسط $\{\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F \mid \alpha \in I\}$ تعریف می شود را در نظر گرفته و دیفنومورفیسم بودن نگاشتهای تغییر کارت کلاف بررسی می شود. برای راحتی در ساخت

منیفلدهای با ابعاد بالاتر تعریف کلاف تار را به شرح زیر بیان می کنیم.

می گوئیم اگر E, B و F منیفلدهایی C^r بوده و $\pi : E \rightarrow B$ یک نگاشت C^r پوشا باشد، آنگاه چهارتایی (E, π, B, F) یک کلاف تار است، هرگاه برای هر $b \in B$ زیر مجموعه بازی از B چون U حول b و نگاشت C^r مانند $\psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow F$ موجود باشد به طوری که نگاشت $(\pi, \psi) : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ یک دیفیئومورفسم C^r باشد.

قضیه ۱.۳.۱۰. فرض کنید M و F دو منیفلد C^∞ ، E یک مجموعه و $\pi : E \rightarrow M$ یک نگاشت پوشا باشد. همچنین فرض کنید $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ یک پوشش باز موضعا متناهی M بوده و برای هر $\alpha \in I$ نگاشت $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow F$ موجود باشد به طوری که نگاشت $(\pi, \psi_\alpha) : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$ دوسویی بوده و برای هر $\alpha, \beta \in I$ که $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ، نگاشت زیر یک دیفیومورفسم باشد.

$$f_{\alpha, \beta} := (\pi, \psi_\beta) \circ (\pi, \psi_\alpha)^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$$

تحت این شرایط E به نحوی یکتا دارای ساختار یک منیفلد است به طوری که با این ساختار، (E, π, M, F) یک کلاف تار C^∞ می باشد و مجموعه $\{(\pi, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ یک اطلس این کلاف خواهد بود.

اثبات. به مراجع [۱] و [۶۷] مراجعه شود. □

۴.۱۰ نگاشت گذر یا تغییر کارت یک کلاف تار

تعریف ۱.۴.۱۰. فرض کنید (U_α, ϕ_α) و (U_β, ϕ_β) دو کارت کلاف تار باشند و همواره داشته باشیم $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ آنگاه

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}|_{(U_\alpha \cap U_\beta) \times F} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$$

یک دیفئومورفیسیم C^r است که نقطه (b, u) را به نقطه ای چون (b, u') می نگارد. u' را با $(\phi_{\beta\alpha}(b))(u)$ نمایش می دهیم. لذا برای هر $b \in U_\alpha \cap U_\beta$ نگاشت $\phi_{\beta\alpha}(b)$ یک دیفئومورفیسیم C^r از F به F است. بنابراین می توان نوشت:

$$\phi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \text{Diff}^r(F)$$

که در آن $\text{Diff}^r(F)$ مجموعه دیفئومورفیسیم های C^r از F به F می باشد و می دانیم که $\text{Diff}^r(F)$ با عمل ترکیب توابع تشکیل یک گروه می دهد. نگاشت $\phi_{\alpha\beta}$ را نگاشت تغییر کارت یا تغییر مختصات یا نگاشت گذر^۱ از کارت کلاف تاری از U_α به U_β می نامیم.

گزاره ۲.۴.۱۰. در تعریف بالا روابط زیر به سادگی قابل تحقیق اند:

$$b \in U_\alpha, \phi_{\alpha\alpha}(b) = 1_F \quad (۱)$$

$$b \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma, \phi_{\alpha\beta}(b) \circ \phi_{\beta\gamma}(b) = \phi_{\alpha\gamma}(b) \quad (۲)$$

$$\phi_{\gamma\beta}^{-1}(b) = \phi_{\beta\gamma}(b) \quad (۳)$$

اثبات. به عنوان تمرین واگذار می شود.

۵.۱۰ کلافهای برداری

بریف ۱.۵.۱۰. فرض کنیم (E, π, B, F) یک کلاف تاری باشد. می گوئیم (E, π, B, F) یک کلاف برداری^۲ است اگر F یک فضای برداری به بعد m بوده و این کلاف دارای اطلسی باشد که نگاشتهای گذر آن در هر نقطه ایزومورفیسیم های خطی باشند.

^۱transition function of a fiber bundle

^۲vector bundle (fibré vectoriel)

فرض کنیم $GL(F)$ مجموعه تبدیلات خطی نامنفرد از F در F باشد. در این صورت هر نگاشت گذر یا تغییر مختصات $\phi_{\alpha\beta}$ یک تابع از $U_\alpha \cap U_\beta$ متعلق به $GL(F)$ خواهد بود زیرا یک ایزومورفیسم بین دو فضای برداری همبعد است. لذا به ازای هر $b \in U_\alpha \cap U_\beta$ نگاشت $\phi_{\alpha\beta}(b)$ یک نگاشت خطی از F به F خواهد بود. رتبه^۳ یک کلاف برداری E را با نماد $\text{rank}(E)$ نشان داده و با $\text{rank}(E) := \dim(F)$ تعریف می کنیم.

اگر $((E, \pi, B, F), A)$ یک کلاف برداری باشد در این صورت دیفئومورفیسم $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$ وجود دارد. بنابر این $\phi_\alpha|_{E_b}$ تناظری یک به یک میان E_b و F برقرار می سازد. به کمک این تناظر می توانیم یک ساختار فضای برداری m بعدی حقیقی روی E_b القاء نماییم. این ساختار فضای برداری بستگی به کارت انتخاب شده ندارد. (چرا؟)

مثال ۲.۵.۱۰. کلاف مماس یک منیفلد C^{r+1} مانند M یک کلاف برداری C^r می باشد. زیرا اگر (U_α, ψ_α) و (U_β, ψ_β) دو کارت منیفلد M باشند بطوریکه $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ آنگاه برای $b \in U_\alpha \cap U_\beta$

$$\psi_{\beta\alpha}(b) = (\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1})_{*} \psi_\alpha(b)$$

اگر M یک منیفلد n -بعدی باشد آنگاه TM یک کلاف برداری از رتبه n خواهد بود و بطور کلی برای یک کلاف برداری (E, π, B, F) رابطه زیر را داریم:

$$\dim(E) = \dim(B) + \dim(F) = \dim(B) + \text{rank}(E) \quad (۱.۱۰)$$

که در آن $\dim(E)$ بعد منیفلد E می باشد.

مثال ۳.۵.۱۰. توجه داریم که کلاف کروی واحد یک کلاف تار است ولی کلاف برداری نیست زیرا فیبرهای آن فضای برداری نیست.

^۳rank(rang)

پس از این در یک کلاف برداری مانند بالا F را فضای $\mathbb{R}^m$ فرض خواهیم کرد و لذا یک کلاف برداری را با نماد (E, π, B) نمایش خواهیم داد مگر آنکه نیاز به ذکر رتبه کلاف باشد. در کاربرد ها معمولاً جهت برخی ملاحظات بهتر است با رسته هایی از اشیاء سر و کار داشته باشیم. بنابراین برای اینکه کلاس کلافهای برداری از رتبه مفروض n تشکیل یک رسته دهد به یک مورفیزم یا همریختی بین کلافهای برداری نیاز است.

۶.۱۰ همریختی کلاف های برداری

تعریف ۱.۶.۱۰. فرض کنیم (E, π, B) و (E', π', B') دو کلاف برداری C^r باشند. دوتایی (H, h) از نگاشت های $H : E \rightarrow E'$ و $h : B \rightarrow B'$ را یک همریختی کلاف برداری^۴ C^r از E به E' می نامیم هرگاه اولاً داشته باشیم $\pi' \circ H = h \circ \pi$ و ثانیاً برای هر $b \in B$ نگاشت $H|_{E_b} : E_b \rightarrow E'_{h(b)}$ یک نگاشت خطی باشد. اگر نگاشت خطی $H|_{E_b}$ یک یکرختی و h دیفئومورفیزم باشد، آنگاه (H, h) را یک یکرختی کلافهای برداری نامیده و می نویسیم $E \cong E'$. (H, h) را یک همریختی قوی^۵ کلافهای برداری می نامیم هرگاه $B = B'$ و $h = 1_B$.

مثال ۲.۶.۱۰. فرض کنیم $f : M \rightarrow N$ یک نگاشت C^r باشد. در این صورت (f_*, f) یک همریختی کلاف برداری می باشد. نشان می دهیم $f_* \pi_M = \pi_N f_*$. می دانیم به ازای هر $p \in M$ داریم $T_p M \xrightarrow{(f_*)_p} T_{f(p)} N$. اکنون فرض کنیم $X_p \in T_p M$. در این صورت $Y_{f(p)} = f_*(X_p)$ وجود دارد به طوریکه $(f_*)_p X_p = Y_{f(p)}$. در نتیجه $\pi_N((f_*)_p X_p) = \pi_N(Y_{f(p)}) = f(p) = f(\pi_M X_p)$ لذا (f_*, f) در شرط

^۴Fiber bundle Morphism

^۵strong morphism

همریختی کلاف برداری بودن صدق می کند.

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{f_*} & TN \\ \pi_M \downarrow & & \downarrow \pi_N \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

قضیه ۳.۶.۱۰. فرض کنیم B یک منیفلد C^r ، F یک فضای برداری به بعد m ، $\{U_\alpha\}$ پوشش بازی برای B بوده و به ازای هر $U_\beta \cap U_\alpha \neq \emptyset$ نگاشتی C^r بصورت: $\phi_{\alpha\beta}$ $U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow Gl(F)$ داده شده است به نحوی که هرگاه $b \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ آنگاه:

$$\phi_{\alpha\beta}(b) \circ \phi_{\beta\gamma}(b) = \phi_{\alpha\gamma}(b), \quad \phi_{\alpha\alpha}(b) = b$$

در این صورت کلاف برداری C^r مانند (E, π, B) با اطلس $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ وجود دارد که نگاشتهای تغییر مختصات آن $\phi_{\alpha\beta}(b)$ ها می باشند. همچنین این کلاف برداری تا حد یکریختی کلاف برداری روی B یکتاست.

□

اثبات. مراجعه شود به [۷۱].

۷.۱۰ برشهای کلاف برداری

همانطوری که در مقدمه فصل ذکر شد یکی از اهداف این نظریه تعریف اشیای هندسی روی کلاف های برداری است. در این بخش، روی کلاف های برداری اشیایی مشابه میدانهای برداری روی یک منیفلد معرفی می کنیم.

تعریف ۱.۷.۱۰. فرض کنیم (E, π, B) یک کلاف برداری C^r باشد. هر نگاشت C^s که به صورت $X: B \rightarrow E$ تعریف می شود یک برش کلاف برداری ^{s} از کلاس C^s

^svector bundle section

نامیده می شود، هرگاه $\pi \circ X = \text{id}_B$. به عبارت دیگر به ازای هر $b \in B$ داشته باشیم $X(b) \in E_b$.

همچنین یک برش موضعی X به نگاشتی C^s اطلاق می گردد که در آن دامنه X زیر مجموعه بازی مانند B' از B باشد بطوریکه $X : B' \rightarrow E$ و $\pi \circ X = \text{id}_{B'}$. برشهای کلاف برداری (E, π, B) را با نماد $\Gamma(E, B)$ یا $\Gamma(E)$ نمایش می دهیم.

مثال ۲.۷.۱۰. هر میدان برداری روی منیفلد M یک برش از کلاف برداری TM است. لذا برش های این کلاف برداری را میتوان توسط $\Gamma(TM, M)$ نیز نمایش داد.

مثال ۳.۷.۱۰. برش های سراسری روی کلاف های برداری همواره وجود دارند. زیرا اگر به ازای هر $b \in B$ عضو صفر فضای برداری E_b را با نماد $\cdot_b$ نشان دهیم آنگاه $\zeta : B \rightarrow E$ با ضابطه $b \mapsto \cdot_b$ یک برش سراسری TM خواهد بود که آن را برش بدیهی^۷ نیز می نامند.

همانگونه که در مثال بالا دیدیم برشهای سراسری بدیهی همواره وجود دارند. برشهای سراسری نابديهی از اهمیت خاصی برخوردارند. به عنوان مثال یک برش سراسری از کلاف (TM, π_*, TM) وجود دارد که آن را میدان موقعیت یا برش موقعیت^۸ می نامیم. برش های دیگری نیز وجود دارند که به طور موضعی روی یک همسایگی تعریف می شوند. آنها نیز دارای اهمیت هستند. فرض کنیم U یک زیر مجموعه باز M بوده و $X : U \rightarrow E$ یک نگاشت C^s باشد به طوری که $\pi \circ X = \text{id}_U$. در این صورت X را برش موضعی E می نامیم. فرض کنیم $\text{rank}(E) = n$ و $\{E_i\}_{i=1}^n$ مجموعه ای از برش های موضعی روی یک مجموعه باز M مانند U باشند. در این صورت $\{E_i\}_{i=1}^n$ را یک پایه موضعی برای E می نامیم هرگاه به ازای هر $p \in U$ ، مجموعه $\{(E_i)_p\}_{i=1}^n$ تشکیل یک پایه برای E_p

^۷trivial section

^۸position vector field (champ de vecteur de position)

دهد. برای یک مجموعه باز $\pi^{-1}(U)$ در TM پایه موضعی $\{\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\}$ را پایه موضعی مربوط به دستگاه مختصات یا پایه طبیعی نسبت به $\pi^{-1}(U)$ می نامیم.

۸.۱۰ کلاف برداری دوگان

فرض کنیم (E, π, F) کلاف برداری باشد. قرار می دهیم $E^* = \cup_{p \in M} E_p^*$. E^* دارای ساختار کلاف برداری است و نگاشت تصویر $\pi : v \in E_p^* \mapsto p \in M$ می باشد. دلیل این موضوع نیز مشابه قسمت قبل قابل بررسی است. با فرضیات بالا، E^* را کلاف برداری دوگان^۹ E می نامیم.

مثال ۱.۸.۱۰. کلاف مماس منیفلد M یعنی (TM, π, M) را در نظر می گیریم. کلاف دوگان همان کلاف (T^*M, π, M) است.

مثال ۲.۸.۱۰. بنابر آنچه از مثالهای بخش ۱.۱۰ می دانیم $E = M \times \mathbb{R}^m$ یک کلاف برداری روی M است و داریم $E^* = \cup_{p \in M} \{p\} \times (\mathbb{R}^m)^* = M \times (\mathbb{R}^m)^*$.

۹.۱۰ جمع مستقیم ویتنی دو کلاف برداری

از جمله کلافهای برداری که با در دست داشتن دو کلاف برداری می توان ساخت جمع مستقیم ویتنی^{۱۰} دو کلاف برداری است. فرض کنیم (E, π, M) و (E', π', M) دو کلاف برداری روی M باشند. جمع مستقیم ویتنی این دو کلاف را با نماد $E \oplus E'$ نشان داده، به صورت زیر تعریف و وجود یک چنین کلاف برداری را بررسی می کنیم. به ازای هر $p \in M$ قرار

^۹dual vector bundle (fibre' dual)

^{۱۰}Whitney sum

می دهیم:

$$(E \oplus E')_p = E_p \oplus E'_p,$$

$$E \oplus E' = \cup_{p \in M} E_p \oplus E'_p.$$

اکنون نگاشت تصویر آن یعنی π را معرفی می کنیم.

$$\pi : E \oplus E' \longrightarrow M,$$

$$(v, w) \mapsto \pi(v) = \pi(w).$$

فرض کنیم $\{(U, \phi)\}$ و (U, ψ) کارتهای کلاف برداری E و E' باشند در این صورت کارت (U, θ) از $E \oplus E'$ به صورت زیر به دست می آید:

$$\theta : \pi^{-1}(U) \longrightarrow F \oplus F',$$

$$(a, b) \mapsto (\phi(a), \psi(b)).$$

اکنون اطلسی برای $E \oplus E'$ می سازیم. فرض کنیم $\{(U_i, \phi_i)\}_i \in I$ و $\{(U_i, \psi_i)\}_i \in I$ به ترتیب کارتهای E و E' باشند و نگاشتهای تغییر کارت آنها نسبت به پوشش باز $A = \{U_i\}_i \in I$ را با $\{g_{ij} | U_i \cap U_j \neq \emptyset\}$ و $\{h_{ij} | U_i \cap U_j \neq \emptyset\}$ نشان دهیم. در این صورت نگاشت تغییر کارت برای $E \oplus E'$ نسبت به همین پوشش باز عبارت خواهد بود از

$$k_{ij} = \begin{pmatrix} g_{ij} & \circ \\ \circ & h_{ij} \end{pmatrix} \in Gl(F \oplus F'), U_i \cap U_j \neq \emptyset. \quad (2.10)$$

روند بالا را می توان برعکس نیز طی نمود بدین صورت که نسبت به پوشش باز A نگاشتهای تغییر کارت g_{ij} و h_{ij} بدست می آیند. اکنون قرار می دهیم:

$$k_{ij} = \begin{pmatrix} g_{ij} & \circ \\ \circ & h_{ij} \end{pmatrix} \in Gl(F \oplus F'), U_i \cap U_j \neq \emptyset.$$

در این صورت روابط زیر به سادگی قابل تحقیق می باشند:

$$k_{ii}(p) = \begin{pmatrix} g_{ij}(p) & \circ \\ \circ & h_{ii}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_F & \\ \circ & 1'_F \end{pmatrix} = 1_{F \oplus F'},$$

$$k_{ij}(p).k_{jl}(p).k_{li}(p) = 1_{F \oplus F'}.$$

می دانیم بنابر قضیه ۳.۶.۱۰ (تا حد یکریختی کلافهای برداری) یک کلاف برداری با نگاشتهای تغییر کارت نسبت به پوشش باز A وجود دارد به طوری که نگاشتهای تغییر کارت آن همان توابع $\{k_{ij}\}$ هستند که در رابطه (۲.۱۰) تعریف شده اند.

تعریف ۱.۹.۱۰. فرض کنیم (E, π, M) و (E', π', M) دو کلاف برداری روی M باشند. کلاف برداری $E \oplus E'$ را جمع مستقیم (ویتی) E و E' می نامیم.

۱.۹.۱۰ میدان های تانسوری روی کلاف های برداری

تعریف ۲.۹.۱۰. فرض کنیم (E, π, M) یک کلاف برداری باشد. در این صورت به ازای هر $x \in M$ تار E_x یک فضای برداری است. مجموعه تانسورهای $-p$ مرتبه همگرد و $-q$ مرتبه ناهمگرد را، با نماد $\otimes_p^q(E_x)$ نمایش می دهیم. اگر $\otimes_p^q(E) = \bigcup_{x \in M} \otimes_p^q(E_x)$ یک میدان تانسوری کلاف برداری^{۱۱} از نوع $-p$ مرتبه همگرد^{۱۲} و $-q$ مرتبه ناهمگرد^{۱۳} ω ، عبارت است از یک نگاشت $\omega : M \rightarrow \otimes_p^q(E)$ به طوری که

$$\omega_x : \overbrace{E_x \times \dots \times E_x}^{q \text{ times}} \times \overbrace{E_x^* \times \dots \times E_x^*}^{p \text{ times}} \rightarrow \mathbb{R}$$

^{۱۱} tensor field (champ de tenseurs)

^{۱۲} covariant (covariant)

^{۱۳} contravariant

و w روی M دیفرانسیل پذیر باشد. به همین صورت می توان p -فرم های دیفرانسیلی روی E را تعریف نمود ($0 \leq p \leq n$) و از آن یک میدان p -فرم روی E به دست آورد. مجموعه p -فرم های روی E را با نماد

$$\Gamma(\overbrace{E_x^* \wedge \dots \wedge E_x^*}^{p \text{ times}})$$

نمایش می دهیم.

۱۰.۱۰ کلاف برگردان

فرض می کنیم (E, π, N, F) یک کلاف تار و $f: M \rightarrow N$ یک نگاشت هموار بین دو منیفلد باشد. با استفاده از ساختار کلاف تار N باشد، می توان یک ساختار کلاف تار روی M با همان فیبر F تعریف نمود. این ساختار جدید که کاربرد های فراوانی در هندسه و فیزیک دارد را ساختار برگردان می نامیم.

تعریف ۱۰.۱۰.۱۰. فرض می کنیم (E, π, N, F) یک کلاف تار و $f: M \rightarrow N$ یک نگاشت هموار باشد. کلاف برگردان E^* توسط f را با نماد f^*E نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f^*E = \{(x, v) \in M \times E \mid f(x) = \pi(v)\}$$

جالب است توجه کنیم که، F_b تارهای کلاف برگردان f^*E در نقطه b یک کپی از $F_{f(b)}$ تارهای E می باشند. f^*E با نگاشت تصویر مولفه اول $pr_1: f^*E \rightarrow M$ که توسط $(x, v) \in M \times E \mapsto x \in M$ تعریف می شود، یک کلاف تار روی M است. اگر

^{۱۴}pullback bundle (fibré image réciproque)

نگاشت تصویر مولفه دوم $pr_2 : f^*E \rightarrow E$ توسط $v \mapsto (x, v)$ تعریف شود، آنگاه نگاشت بین کلاف ها در نمودار زیر جابجایی است.

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{pr_2} & E \\ pr_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

قضیه ۲.۱۰.۱۰. فرض می‌کنیم E یک کلاف برداری روی N و نگاشت $f : M \rightarrow N$ هموار باشد. آنگاه f^*E یک کلاف برداری روی M است.

اثبات. مراجعه شود به [۶۷] گزاره ۱.۱۸، یا [۶۳]. $\square$

تمرین ۳.۱۰.۱۰. فرض کنیم $\pi : TM \rightarrow M$ نگاشت تصویر باشد.

(الف) کلاف برگردان π^*TM را تعریف کنید.

(ب) نشان دهید فیبرهای π^*TM از فضاهاى مماس $T_x M$ تشکیل شده است.

۱۱.۱۰ زیرکلاف ها

تعریف ۱.۱۱.۱۰. اگر (E_1, π_1, M_1, F_1) و (E_2, π_2, M_2, F_2) دو کلاف برداری باشند به طوری که E_2, M_2 و F_2 به ترتیب زیرمینفدهای E_1, M_1 و F_1 باشند آنگاه E_2 رازیرکلاف E_1 می‌گوییم اگر برای هر کارت کلافی (π_2, ψ_2) روی $U_2 \subseteq M_2$ در کلاف E_2 ، یک همسایگی $U_1 \subseteq M_1$ و یک کارت کلافی (π_1, ψ_1) روی U_1 در کلاف E_1 وجود داشته باشد به طوری که

$$(\pi_1, \psi_1)|_{\pi_1^{-1}(U_1 \cap U_2)} = (\pi_2, \psi_2)|_{\pi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)} \quad (3.10)$$

هرگاه $E = TM$ باشد، آنگاه آن دسته از زیرکلافهای برداری آن که منیفلد پایه آن کل M است را توزیع^{۱۶} روی M می نامیم.

مثال ۲.۱۱.۱۰. هرگاه N یک زیر منیفلد از M باشد در این صورت TN یک زیرکلاف برداری از TM می باشد.

تعریف ۳.۱۱.۱۰. اگر $\Delta \subseteq TM$ یک توزیع روی M باشد Δ را انتگرالپذیر می نامیم هرگاه به ازای هر $p \in M$ زیر منیفلدی چون N_p از M وجود داشته باشد به طوریکه $\Delta_q = T_q N_p, \forall q \in N$.

قضیه ۴.۱۱.۱۰. (قضیه فروبنیوس) توزیع $\Delta \subseteq TM$ انتگرالپذیر است اگر و تنها اگر نسبت به گروه لی بسته باشد.

اثبات. مراجعه شود به [۲] یا [۶۷]. □

۱۲.۱۰ کلاف عمودی و برش موقعیت

فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر به بعد n و $\pi : E \rightarrow M$ نگاشت تصویر کلاف برداری باشد. اگر (E, π, M, F) یک کلاف برداری روی M از رتبه $m = \dim F$ باشد، قرار می دهیم $E = \cup_{\zeta \in E} V_{\zeta} E$ که در آن $\zeta \in E$ و $V_{\zeta} E = \ker(\pi_*)_{\zeta}$. حال تعریف می کنیم

$$\pi_v : w \in V_{\zeta} E \mapsto \zeta \in E$$

^{۱۶}distribution

نگاشت $\pi_v : VE \rightarrow E$ را که تحدید تصویر کلاف مماس E می باشد به عنوان نگاشت تصویر کلاف عمودی در نظر می گیریم. آنگاه می توان بررسی نمود که (VE, π_v, E) یک کلاف برداری از رتبه m است.

تعریف ۱.۱۲.۱۰. کلاف برداری (VE, π_v, E) را کلاف عمودی $E^{\vee}$ می نامیم.

مثال ۲.۱۲.۱۰. فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر به بعد n و $\pi : E \rightarrow M$ نگاشت تصویر کلاف برداری باشد. TM یک کلاف برداری روی M از رتبه n است. اگر TM را به جای E به کار ببریم، VTM کلاف عمودی روی TM است که آن را با VTM یا (VTM, π_v, TM) نمایش می دهیم. رتبه این کلاف n است.

می توان یک اطلس کلاف برای VE شامل کارت هایی به صورت زیر در نظر گرفت

$$\pi_v^{-1}(\pi^{-1}(U) \cup \phi^{-1}(V)) \longrightarrow (\pi^{-1}(U) \cup \phi^{-1}(V)) \times \mathbb{R}^m$$

که در آن U, ϕ یک کارت کلاف E در M و (V, x) یک کارت منیفلد F است.

مثال ۳.۱۲.۱۰. فرض کنیم می خواهیم کلاف عمودی $VT\mathbb{R}^2$ و پایه های آن را به دست آوریم. داریم $T\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ یعنی

$$T\mathbb{R}^2 = \{((x, y), (u, v)) | x, y, u, v \in \mathbb{R}\}$$

و می دانیم اگر $\zeta = ((x, y), (u, v))$ آنگاه

$$(\pi_*)_{\zeta} : T_{\zeta}T\mathbb{R}^2 \longrightarrow T_{(x,y)}M$$

که در آن π_* به صورت زیر تعریف می شود.

$$(\pi_*)_{\zeta}(\zeta, w^1, w^2, w^3, w^4) = ((x, y), (w^1, w^2))$$

لذا به سادگی می توان نتیجه گرفت که

$$\ker(\pi_*)_{\zeta} = \{\zeta\} \times \{(\cdot, \cdot, w^{\natural}, w^{\flat}) | w^{\natural}, w^{\flat} \in \mathbb{R}\}.$$

به عبارت دیگر می توان نوشت: $V_{\zeta}T\mathbb{R}^{\natural} = \{(\zeta, (\cdot, \cdot, w^{\natural}, w^{\flat}) | w^{\natural}, w^{\flat} \in \mathbb{R})\}$

لذا داریم $T\mathbb{R}^{\natural} \subseteq T_{\zeta}T\mathbb{R}^{\natural}$. حال اگر $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}$ میدانهای برداری موضعی پایه

باشد در این صورت میدانهای برداری موضعی پایه $TT\mathbb{R}^{\natural}$ به صورت

$$\{\frac{\partial}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial}{\partial \bar{y}}, \frac{\partial}{\partial \bar{u}}, \frac{\partial}{\partial \bar{v}}\}$$

خواهند بود و نمایش موضعی آنها به صورت زیر است:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} : T\mathbb{R}^{\natural} \longrightarrow TT\mathbb{R}^{\natural} = \mathbb{R}^{\natural} \times \mathbb{R}^{\natural}$$

$$((x, y), (u, v)) \mapsto (((x, y), (u, v)), (\cdot, \cdot, \cdot, \cdot))$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{y}} : T\mathbb{R}^{\natural} \longrightarrow TT\mathbb{R}^{\natural} = \mathbb{R}^{\natural} \times \mathbb{R}^{\natural}$$

$$((x, y), (u, v)) \mapsto (((x, y), (u, v)), (\cdot, \cdot, \cdot, \cdot))$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{u}} : T\mathbb{R}^{\natural} \longrightarrow TT\mathbb{R}^{\natural} = \mathbb{R}^{\natural} \times \mathbb{R}^{\natural}$$

$$((x, y), (u, v)) \mapsto (((x, y), (u, v)), (\cdot, \cdot, \cdot, \cdot))$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{v}} : T\mathbb{R}^{\natural} \longrightarrow TT\mathbb{R}^{\natural} = \mathbb{R}^{\natural} \times \mathbb{R}^{\natural}$$

$$((x, y), (u, v)) \mapsto (((x, y), (u, v)), (\cdot, \cdot, \cdot, \cdot))$$

با توجه به اینکه TIR^2 بدیهی شونده است، $TTIR^2$ نیز بدیهی شونده است. لذا این پایه های موضعی را می توان به پایه های سراسری برای کلاف $TTIR^2$ گسترش داد. اکنون با نماد گذاری سابق $\zeta = ((x, y), (u, v))$ داریم:

$$(\pi_*)_{\zeta} \left(\frac{\partial}{\partial x}(\zeta) \right) = (\pi_*)_{\zeta}(\zeta, (1, 0, 0, 0)) = ((x, y), (1, 0)) = \frac{\partial}{\partial x} \pi(\zeta)$$

بنابراین $\frac{\partial}{\partial x}$ و $\frac{\partial}{\partial \bar{x}}$ با هم $-\pi$ مرتبط می باشند. همچنین داریم:

$$(\pi_*)_{\zeta} \left(\frac{\partial}{\partial u}(\zeta) \right) = (\pi_*)_{\zeta}(\zeta, (0, 0, 1, 0)) = ((x, y), (0, 0)) = 0 \in T_{(x, y)}M$$

و نیز $0 = (\pi_*)_{\zeta} \left(\frac{\partial}{\partial v}(\zeta) \right) = (\pi_*)_{\zeta} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{u}}(\zeta) \right)$. یعنی $\frac{\partial}{\partial v}$ و $\frac{\partial}{\partial \bar{u}}$ پایه های موضعی کلاف عمودی $VTIR^2$ هستند.

لم ۴.۱۲.۱۰. فرض کنیم (U, x) یک کارت روی M ، $y \in T_x M$ و $\pi^{-1}(U)$ مجموعه باز القایی از U روی TM باشد. اگر $(\bar{x}^i, \bar{y}^i)$ مختصات موضعی روی TM باشد، آنگاه $\frac{\partial}{\partial x^i}$ و $\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}$ ، $-\pi$ مرتبط هستند. همچنین به عنوان دو تابع $\bar{y}^i = dx^i$

اثبات. ابتدا نشان می دهیم $\bar{y}^i = dx^i$ در اینجا dx^i و $\bar{y}^i$ توابعی خطی به صورت $T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ هستند. می دانیم $\bar{y}^i \frac{\partial}{\partial x^j} = \delta_j^i$ که در آن نماد کرونگر^{۱۸} است. با توجه به یکتایی پایه دوگان dx^i نتیجه می شود $\bar{y}^i = dx^i$ اکنون نشان می دهیم $\pi_* \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} \right) = \frac{\partial}{\partial x^i}$ می دانیم

$$\pi_* = \begin{pmatrix} I_{n \times n} & 0 \end{pmatrix}_{n \times 2n}$$

در نتیجه $\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}$ را با یک ماتریس ستونی نشان می دهیم که ۱ در سطر i ام آن قرار دارد. در

^{۱۸}Kronecker

این صورت

$$\pi_* \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \begin{pmatrix} I_{n \times n} & 0 \end{pmatrix}_{n \times 2n} \begin{pmatrix} \cdot \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ \cdot \end{pmatrix}_{2n \times 1} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ \cdot \end{pmatrix}_{n \times 1} = \frac{\partial}{\partial x^i}$$

□

در نتیجه $\frac{\partial}{\partial x^i}$ و $\frac{\partial}{\partial x^i}$ -مرتبط می باشند.

۱.۱۲.۱۰ برش موقعیت

در توپولوژی مقدماتی و آنالیز دیدیم که اگر f و g دو تابع پیوسته بر بازهای U و V باشند، برای آنکه f و g قابل توسیع به تابعی چون F باشد به طوریکه $F|_U = f, F|_V = g$ کافیت است داشته باشیم: $\forall x \in U \cap V : f(x) = g(x)$. اکنون فرض کنیم (x^i, y^i) با دامنه U و $(\bar{x}^i, \bar{y}^i)$ با دامنه V دو کارت TM باشند و $U \cap V \neq \emptyset$. در این صورت رابطه بین y^i و $\bar{y}^i$ و نیز x^i و $\bar{x}^i$ به صورت زیر به دست می آید.

$$\begin{cases} \bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, \dots, x^n), \\ \bar{y}^i = B_j^i(x) y^j, \end{cases} \quad (۴.۱۰)$$

که در آن فرض کرده ایم $B_j^i(x) = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}$. در نتیجه رابطه بین اعضای پایه $\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}$ و $\frac{\partial}{\partial \bar{y}^i}$ به صورت زیر بیان می شود.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x^i} = B_i^j(x) \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} + B_{ik}^j y^k \frac{\partial}{\partial \bar{y}^j}, \\ \frac{\partial}{\partial y^i} = B_i^j(x) \frac{\partial}{\partial \bar{y}^j}. \end{cases} \quad (۵.۱۰)$$

که در آن فرض کرده ایم $B_{ik}^j(x) = \frac{\partial^2 \bar{x}^j}{\partial x^i \partial x^k}$

میدان های برداری موضعی $X = y^i \frac{\partial}{\partial y^i}$ و $\bar{X} = \bar{y}^i \frac{\partial}{\partial \bar{y}^i}$ را در نظر می گیریم. می خواهیم X و $\bar{X}$ را به میدان برداری چون W روی $U \cup V$ گسترش دهیم به طوری که $W|_U = X, W|_V = \bar{X}$. بنابر آنچه در بالا دیدیم، اگر X و $\bar{X}$ روی $U \cap V$ مساوی باشند می توانیم چنین میدان برداری را روی $U \cup V$ بیابیم. اما بنا بر روابط (۴.۱۰) و (۵.۱۰) روی $U \cap V$ داریم:

$$X = y^i \frac{\partial}{\partial y^i} = y^i B_{ij}^j \frac{\partial}{\partial \bar{y}^j} = \bar{y}^i (B_i^j)^{-1} B_{ij}^j \frac{\partial}{\partial \bar{y}^j} = \bar{y}^i \frac{\partial}{\partial \bar{y}^i} = \bar{X}$$

بنابراین میدان برداری X به دستگاه مختصات y^i و $\bar{y}^i$ بستگی نداشته و در نتیجه یک میدان برداری سرتاسری است. بنا بر آنچه گفته شد، می توانیم میدان برداری W روی $U \cup V$ را طوری بیابیم که $W|_U = X, W|_V = \bar{X}$.

تعریف ۵.۱۲.۱۰. بنابر این می توانیم یک میدان برداری سراسری روی TM بیابیم که در هر مختصات موضعی (x^i, y^i) به صورت $y^i \frac{\partial}{\partial y^i}$ نوشته شود. این میدان برداری را برش موقعیت^{۱۹} روی کلاف برداری عمودی می نامیم و آن را با نماد $V = y^i \frac{\partial}{\partial y^i}$ نمایش می دهیم.

قضیه ۶.۱۲.۱۰. فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر و $\xi \in TM$ باشد. در این صورت کلاف عمودی برابر است با $V_\xi TM = T_\xi T_{\pi(\xi)} M$.

اثبات. فرض می کنیم که $v \in T_\xi T_{\pi(\xi)} M$ باشد و نشان می دهیم که $\pi_{*\xi}(v) = 0$. این منظور فرض می کنیم که $C : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow T_{\pi(\xi)} M$ یک منحنی روی $T_{\pi(\xi)} M$ باشد به طوری که $C(0) = \xi$ و $C'(0) = v$. می دانیم که $C'_*(t) = C_{*t} \circ \frac{d}{dt}$ ؛ در نتیجه

$$\pi_{*\xi}(v) = \pi_{*\xi}(C'(\cdot)) = \pi_{*\xi}(C_{*t} \circ \frac{d}{dt}(\cdot)) \quad (۶.۱۰)$$

اما می توان دید که $\pi \circ C$ ثابت است. زیرا $\pi \circ C : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ و همچنین به ازای هر $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ $\pi \circ C(t) = \pi(\xi) = p \in M$ در نتیجه

$$\pi_{*\xi} \circ C_{*t} = (\pi \circ C)_{*t} = 0.$$

رابطه دوم (۵.۱۰) نتیجه می دهد که $\pi_{*\xi}(v) = 0$ لذا داریم

$$T_{\xi}T_{\pi(\xi)}M \subseteq V_{\xi}TM.$$

با توجه به اینکه $\dim T_{\xi}T_{\pi(\xi)}M = \dim V_{\xi}TM$ ، بنا بر جبر خطی مقدماتی می توان نتیجه گرفت که

$$V_{\xi}TM = T_{\xi}T_{\pi(\xi)}M.$$

این موضوع اثبات را کامل می کند. □

نتیجه ۷.۱۲.۱۰. کلاف عمودی به عنوان یک توزیع TM انتگرال پذیر بوده، در نتیجه نسبت به گروه لی بسته است.

۲.۱۲.۱۰ یکرختی کلاف عمودی و کلاف برگردان

از قضیه زیر نتیجه می شود که کلاف های عمودی و برگردان قابل معاوضه بوده و می توان با توجه به شرایط مناسب از آنها به طور معادل استفاده کرد. این موضوع در تعریف التصاق در روی فضاها ی فینسلری به کار می رود. به این معنی که بعضی از نویسندگان از کلاف عمودی و بعضی از نویسندگان از کلاف برگردان برای تعریف التصاق فینسلری استفاده می کنند.

فرض کنیم U یک زیر مجموعه باز M باشد. در این صورت با توجه به آنچه در بخش ۱۰.۱۰ کلاف برگردان بیان شد، f^*E با نگاشت تصویر مولفه اول $pr_1 : f^*E \rightarrow M$

که توسط $(x, v) \in M \times E \mapsto x \in M$ تعریف می شود، یک کلاف تاروی روی M است.

$$pr_1^{-1}(U) = \{(z, v) | z \in U, v \in E_{f(z)}\} = U \times \bigcup_{z \in U} E_{f(z)} \cong U \times \mathbb{R}^n$$

می توان بررسی کرد که نگاشتهای تغییر کارت، اعضای $GL(n, \mathbb{R})$ هستند و f^*E یک کلاف برداری است.

قضیه ۸.۱۲.۱۰. کلاف عمودی (VTM, p, TM) و کلاف برگردان (π^*TM, pr_1, TM) از نظر کلاف برداری یکرخت هستند.

اثبات. فرض کنیم U یک مجموعه باز M باشد. در این صورت بنا بر قضیه ۶.۱۲.۱۰، به ازای هر $x \in M$ و $y \in T_x M$ داریم $V_{(x,y)} TM = T_y T_x M$. حال فرض می کنیم $\{E_i\}$ یک پایه موضعی VTM روی $\pi^{-1}(U)$ باشد. یعنی به ازای هر $(x, y) \in TM$ ، $\{(E_i)_{(x,y)}\}$ یک پایه موضعی $V_{(x,y)} TM = T_y T_x M$ می باشد. از طرفی می دانیم $T_y T_x \simeq T_x M \simeq \{y\} \times T_x M$ ، که در آن یکرختی با رابطه $\Psi : E_i \mapsto (y, e_i)$ داده می شود که در آن پایه ای موضعی $T_x M$ روی U می باشد. اما با توجه به تعریف ۱.۱۰.۱۰ واضح است که تارهای π^*TM در (x, y) به صورت $\{y\} \times T_x M$ می باشند. لذا همریختی کلاف برداری $(\Psi, 1_{TM})$ یک یکرختی کلاف برداری خواهد بود. $\square$

۱۳.۱۰ زیرکلاف افقی

تعریف ۱۰.۱۳.۱۰. فرض کنیم که (E, π, M) یک کلاف برداری روی M باشد. اگر بتوان TE را به صورت جمع مستقیم (ویتنی) دو زیرکلاف به شکل زیر تجزیه کرد

$$TE = VE \oplus HE,$$

که در آن VE زیرکلاف عمودی است، آنگاه زیرکلاف برداری HE را یک زیرکلاف افقی^{۲۰} می نامیم.

باید توجه داشت که در تجزیه فوق زیرکلاف افقی یکتا نیست.

در قضیه زیر شرط لازم و کافی برای وجود زیرکلافهای افقی TTM بیان می شود.

قضیه ۲.۱۳.۱۰. فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر به بعد n باشد. آنگاه یک زیرکلاف افقی HTM از TTM وجود دارد اگر و تنها اگر در هر کارت موضعی (x, U) ، توابع دیفرانسیل پذیری مانند $N_i^j(x, y)$ روی TM موجود باشند به طوری که

$$N_i^j(x, y)B_j^k(x) = \overline{N}_h^k(\overline{x}, \overline{y})B_i^h(x) + B_{ih}^k(x)y^h, \quad (۷.۱۰)$$

که در آن (x^i, y^i) مولفه های $(x, y) \in TM$ در کارت (x, U) بوده و i, j, k, h مقادیر $1, 2, \dots, n$ را اختیار می کنند.

اثبات. مراجعه شود به [۲۲]. □

نتیجه ۳.۱۳.۱۰. درکلاف TTM هر زیرکلاف افقی با n^2 تابع دیفرانسیل پذیر $\{N_j^i\}$ که در شرط (۷.۱۰) صدق می کنند، کاملاً مشخص می شود.

فرض کنیم $z \in TM$ ، چنانچه یک زیرکلاف افقی HTM روی TTM موجود باشد، آنگاه می توان هر بردار $\hat{X}_z$ از $T_z TM$ را به جمع دو بردار عمودی و افقی $vX \in VTM$ و $hX \in HTM$ تجزیه کرد، به گونه ای که $\hat{X}_z = vX + hX$. در اینجا از نگاشتهای تصویر زیر استفاده شده است.

$$v_z : T_z TM \longrightarrow V_z TM, \quad h_z : T_z TM \longrightarrow H_z TM.$$

^{۲۰} horizontal subbundle

نتیجه ۴.۱۳.۱۰. چنانچه یک زیرکلاف افقی روی TM موجود باشد، آنگاه می توان فضای مماس دوم $T_z TM$ را به دو زیرفضای عمودی و افقی به صورت

$$T_z TM = V_z TM \oplus H_z TM,$$

تجزیه نمود، که در آن $z = (x, y) \in TM$

همچنین هر برش روی $\mathcal{X}(TM)$ را می توان به صورت زیر تجزیه کرد.

$$\mathcal{X}(TM) = \Gamma(VTM) \oplus \Gamma(HTM),$$

که در آن $\Gamma(HTM)$ و $\Gamma(VTM)$ به ترتیب برش های زیرکلاف عمودی و برش های زیرکلاف افقی هستند. اکنون می توانیم دو همریختی به صورت زیر تعریف کنیم. به ازای هر برش $\mathcal{X}(TM)$ و هر نقطه $z \in TM$

$$V : \mathcal{X}(TM) \longrightarrow \Gamma(VTM), \quad H : \mathcal{X}(TM) \longrightarrow \Gamma(HTM),$$

$$(V\hat{X})_z := V\hat{X}_z, \quad (H\hat{X})_z := h\hat{X}_z.$$

۱۴.۱۰ التصاق غیرخطی روی کلافهای برداری

در این بخش به تعریف مفهومی به نام التصاق غیرخطی روی کلافهای برداری می پردازیم. باید یادآوری کنیم که در اینجا به تعریف مفهوم عمومی التصاق غیرخطی روی کلافهای تار می گوییم. بعضا آن را التصاق ارسمان^{۲۱} نیز می گویند [۶۳]. زیرا کاربرد التصاق ارسمان کمی تخصصی است و در چشم انداز این کتاب قرار ندارد، لذا خواننده علاقه مند را به مراجع مربوطه در کتابنامه ارجاع می دهیم. اما باید بدانیم که یکی از شرایط وجود التصاق ارسمان روی کلاف های تار وجود ۱- فرم التصاق و زیرکلاف افقی روی آن کلاف تار

^{۲۱}Ehresman

است. شاید یک دلیل برای غیرخطی خواندن این التصاق، معادل بودن وجود این التصاق با وجود یک سری توابع غیرخطی است که به نام ضرایب التصاق غیرخطی مشهور است.

تعریف ۱۰.۱۴.۱۰. در یک کلاف برداری (E, π, M) هر زیرکلاف افقی E را یک التصاق غیرخطی^{۲۲} روی E می نامیم.

حال فرض کنیم که (TM, π, M) یک کلاف برداری روی M باشد. بنابر نتیجه ۱۰.۱۳.۱۰ هر التصاق غیر خطی روی TTM توسط توابع موضعی N_j^i تعریف شده روی بازی از TM کاملاً مشخص می شود. لذا در صورت وجود زیرکلاف افقی این ضرایب وجود داشته و تعریف فوق را می توان به صورت زیر نوشت.

تعریف ۱۰.۱۴.۱۰. هر زیرکلاف افقی HTM از TTM را یک التصاق غیرخطی^{۲۳} روی TM و توابع دیفرانسیل پذیری $N_j^i(x, y)$ روی TM را ضرایب التصاق غیرخطی^{۲۴} می نامند.

فرض کنیم HTM یک زیرکلاف افقی TTM باشد. در این صورت بنابر قضیه ۱۰.۱۳.۱۰، در هر کارت موضعی (x, U) ، توابع دیفرانسیل پذیری مانند $N_j^i(x, y)$ روی TM وجود دارند به طوری که در رابطه (۷.۱۰) صدق کنند.

در هر کارت موضعی (x, U) روی M مختصات موضعی نقطه $(x, y) \in TM$ را با (x^i, y^i) نمایش می دهیم. لذا می توانیم به طور طبیعی پایه موضعی $\{\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\}$ روی فضای مماس بر TM را در نظر بگیریم. قرار می دهیم $\frac{\delta}{\delta x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} - N_j^i \frac{\partial}{\partial y^i}$. می توان نشان داد که $\{\frac{\delta}{\delta x^i}\}$ ، یک پایه موضعی برای HTM و $\{\frac{\partial}{\partial y^i}\}$ یک پایه موضعی برای VTM تشکیل می دهند که آنها را به ترتیب پایه های افقی و عمودی^{۲۵} می

^{۲۲}non-linear connection (connexion non-linéaire)

^{۲۳}non-linear connection

^{۲۴}coefficient of non-linear connection

^{۲۵}horizontal and vertical basis

نامیم.

نتیجه ۳.۱۴.۱۰. اگر یک زیرکلاف افقی روی TTM موجود باشد، آنگاه $\{\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\}$ پایه های متناظر با تجزیه فوق برای $T_x TTM$ است.

همچنین اگر فرض کنیم که $\{dx^i\}$ پایه دوگان فضای دوگان $T_x^* M$ باشد، آنگاه می توان نشان داد که $\{dx^i, \delta y^i\}$ پایه های دوگان $\{\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\}$ هستند که در آن δy^i به صورت زیر تعریف می شود.

$$\delta y^i = dy^i + N_j^i dx^j.$$

۱۵.۱۰. التصاق خطی روی کلافهای برداری

تعریف ۱.۱۵.۱۰. فرض کنیم که (E, π, M) یک کلاف برداری روی M باشد. اگر $\Gamma(E, M)$ خانواده برش های کلاف برداری روی E باشد، آنگاه عملگر ∇ را یک التصاق خطی روی کلاف برداری E می نامیم

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \Gamma(E, M) \longrightarrow \Gamma(E, M).$$

اگر به ازای هر برش کلاف برداری $\widehat{Z}, \widehat{W} \in \Gamma(E, M)$ ، هر برش $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ و هر تابع حقیقی $f, g \in C^\infty(M)$ در شرایط زیر صدق کند.

$$\nabla_{fX+gY} \widehat{Z} = f \nabla_X \widehat{Z} + g \nabla_Y \widehat{Z}.$$

$$\nabla_X (\widehat{Z} + \widehat{W}) = \nabla_X \widehat{Z} + \nabla_X \widehat{W}.$$

$$\nabla_X g \widehat{Z} = g \nabla_X \widehat{Z} + X(g) \widehat{Z}.$$

ثابت می شود که به هر التصاق خطی روی E یک مشتق همگرد ∇ روی E ، و به هر مشتق همگرد ∇ روی E یک التصاق خطی روی E وابسته می شود. برای اثبات می توانید به [۶۷] مراجعه کنید. بنابراین التصاق خطی روی کلاف برداری E را مشتق همگرد روی کلاف برداری $E^{\vee}$ نیز می نامیم و چنانچه احتمال اشتباه نرود از این دو مفهوم به جای یکدیگر استفاده می کنیم.

اگر (E, π, M) یک کلاف برداری روی M و عملگر ∇ یک التصاق خطی روی کلاف برداری E باشد، آنگاه ∇ یک مشتق همگرد روی کلاف دوگان E^* تعریف می کند. به عنوان مثال اگر ω یک برش از کلاف دوگان باشد $\omega \in \Gamma(E^*, M)$ آنگاه تعریف می کنیم برای هر $\hat{X} \in \Gamma(E, M)$ و $U \in \mathcal{X}(M)$

$$(\nabla_U \omega)(\hat{X}) = U \cdot \omega(\hat{X}) - \omega(\nabla_U \hat{X})$$

و اگر $\omega_1, \dots, \omega_r \in \Gamma(E^*, M)$ آنگاه مشتق همگرد ضرب تانسوری و ضرب خارجی برشهای کلاف دوگان را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\begin{aligned} \nabla_U(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \dots \otimes \omega_r) &= \nabla_U \omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \dots \otimes \omega_r \\ &\quad + \omega_1 \otimes \nabla_U \omega_2 \otimes \dots \otimes \omega_r \\ &\quad + \dots + \omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \dots \otimes \nabla_U \omega_r. \\ \nabla_U(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_r) &= \nabla_U \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_r + \omega_1 \wedge \nabla_U \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_r \\ &\quad + \dots + \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \nabla_U \omega_r. \end{aligned}$$

تذکر ۲.۱۵.۱۰. بنا بر آنچه در قضیه ۸.۱۲.۱۰ دیدیم کلاف عمودی (VTM, p, TM) و کلاف برگردان (π^*TM, pr_1, TM) از نظر کلاف برداری یکرخت هستند. در نتیجه هر مشتق گیری همگرد روی VTM یک مشتق گیری همگرد روی π^*TM تعریف می کند که هر دو دارای یک ۱-فرم التصاق مشترک هستند.

۱۶.۱۰ ۱- فرم التصاق روی یک کلاف برداری

فرض کنیم (E, π, M) یک کلاف برداری باشد. در این صورت به هر التصاق خطی ∇ روی E یک مشتق همورد روی E وابسته می شود و به هر مشتق همورد ∇ روی E یک ۱-فرم التصاق نسبت داده می شود که به صورت زیر تعریف می گردد. فرض کنیم $\{E_i\}$ یک پایه موضعی برای $\Gamma(E, M)$ باشد، در این صورت $\{\omega_j^i\} \in \Omega^1(M)$ را ۱-فرم التصاق^{۲۸} ∇ می نامیم هرگاه داشته باشیم:

$$\nabla E_i(X) = \nabla_X E_i = \omega_j^i(X) E_j, \quad X \in \mathcal{X}(M), \quad E_i \in \Gamma(E, M).$$

می توان بررسی کرد که ∇E_i خواص یک ۱-فرم روی M با مقادیر در $\mathcal{X}(M)$ را دارا است. یک التصاق خطی، با ۱-فرم های التصاق خود کاملاً مشخص می گردد.

مثال ۱۶.۱۰. فرض کنیم ∇ یک التصاق روی کلاف VTM یا π^*TM باشد. با توجه به یکرختی موجود بین دو کلاف VTM و π^*TM نتایج به دست آمده روی هر یک از این دو کلاف بر یکدیگر منطبق می شود. در این صورت

$$\nabla : \mathcal{X}(TM) \times \Gamma(\pi^*TM) \longrightarrow \Gamma(\pi^*TM)$$

بنابر این ۱-فرم التصاق وابسته به ∇ یک ۱-فرم روی TM است که به صورت زیر تعریف می شود.

$$\omega_j^i = A_{jk}^i dx^k + B_{jk}^i dy^k$$

حال فرض کنیم که (x^i, y^i) مختصات موضعی روی TM وابسته به کارت (x, U) روی

^{۲۸}connection 1-forms

منیفلد M باشد. در این صورت اگر قرار دهیم

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial y^i} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial y^k}, \quad (۸.۱۰)$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^j}} \frac{\partial}{\partial y^i} = C_{ij}^k \frac{\partial}{\partial y^k}.$$

در فصل ۹ دیدیم که ۱- فرم های وابسته به التصاق ∇ روی منیفلد M را می توان به صورت $\omega_i^k = \Gamma_{ij}^k dx^j$ نوشت. در این جا به روشی مشابه می توان دید که ۱- فرم های وابسته به التصاق ∇ روی کلاف برداری π^*TM را می توان به صورت زیر نوشت.

$$\omega_i^k = \Gamma_{ij}^k dx^j + F_{ij}^k dy^j.$$

۱۷.۱۰ ۲- فرم انحنا روی یک کلاف برداری

فرض کنیم ∇ یک مشتق همگرد روی کلاف برداری E باشد. در این صورت برای هر $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ و هر برش کلاف برداری $Z \in \Gamma(M, E)$ ، Ω را به صورت زیر تعریف نموده

$$\Omega(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

آن را تانسور انحنا ی وابسته به ∇ می نامیم. $\Omega(X, Y)$ به ازای هر $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ یک تانسور از نوع (۱) روی E می باشد. فرض کنیم ∇ یک مشتق همگرد روی $E = TM$ باشد، در این صورت

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \quad X, Y \in \mathcal{X}(M)$$

T را تاب ${}^{29} \nabla$ می نامیم. یادآوری می کنیم که تانسور تاب فقط روی کلاف مماس TM به طور طبیعی به صورت فوق قابل تعریف است و برای تعریف آن روی کلاف های برداری

در حالت کلی، احتیاج به مقدمات دیگری نیز داریم، که کمی تخصصی است و در این کتاب به آن نمی پردازیم. خواننده علاقه مند می تواند به کتب، مقالات و پایان نامه هایی مراجعه کند که در کتابنامه این کتاب در مورد هندسه فینسلر آورده شده است.

تعریف ۱.۱۷.۱۰. فرض کنیم (E, π, M) یک کلاف برداری و ∇ یک التصاق روی E و $\{E_i\}$ یک پایه $\Gamma(M, E)$ باشند. در این صورت $\Omega_j^i \in \Omega^2(M)$ ۲-فرم انحنای^{۳۰} وابسته به ∇ می نامیم هرگاه برای هر $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ داشته باشیم:

$$\Omega(X, Y)E_j = \Omega_j^i(X, Y)E_i$$

مشابه آنچه در فصل ۹ در گزاره کارتان ۱.۳.۹ در صفحه ۲۲۶ در مورد ۲-فرم های انحنای دیدیم در اینجا نیز قضیه زیر را داریم.

قضیه ۲.۱۷.۱۰. فرض کنیم (E, π, M) یک کلاف برداری و ∇ یک التصاق روی E با ۱-فرم های التصاق ω_j^i باشد. اگر Ω_j^i ۲-فرم انحنای ∇ باشد، آنگاه

$$\Omega_j^i = d\omega_j^i - \omega_j^k \wedge \omega_k^i$$

اثبات. فرض کنیم (E, π, M) یک کلاف برداری، ∇ یک التصاق روی E ، $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ و $\{e_i\}$ یک پایه موضعی برای کلاف برداری E باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} \Omega(X, Y)e_i &= \nabla_X \nabla_Y e_i - \nabla_Y \nabla_X e_i - \nabla_{[X, Y]} e_i \\ &= \nabla_X \omega_i^k(Y) e_k - \nabla_Y \omega_i^k(X) e_k - \omega_i^k([X, Y]) e_k \\ &= \omega_i^k(Y) \omega_k^j(X) e_j + X. \omega_i^k(Y) e_k - \omega_i^k(X) \omega_k^j(Y) e_j - \\ &\quad Y. \omega_i^k(X) e_k - \omega_i^k([X, Y]) e_k \end{aligned}$$

^{۳۰} curvature 2-forms

از آنجا داریم

$$\Omega(X, Y) = \{\omega_i^k \otimes \omega_k^j - \omega_k^j \otimes \omega_i^k\}(X, Y) + d\omega_k^j(X, Y)$$

با توجه به تعریف ضرب خارجی، رابطه (۲.۹) در صفحه ۲۲۲ داریم

$$\Omega(X, Y) = \{d\omega_k^j - \omega_k^j \wedge \omega_i^k\}(X, Y)$$

از تعریف ۱۰.۱۷.۱۰ داریم

$$\Omega_k^j = d\omega_k^j + \omega_k^j \wedge \omega_i^k$$

و با توجه به خواص ضرب $\wedge$ نتیجه می شود

$$\Omega_k^j = d\omega_k^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j$$

□ همان حکم مورد نظر است.

۱۸.۱۰ التصاق جهتی^{۳۱}

گفتیم که مطالعه توابع همگن روی کلاف کروی بهتر انجام می شود. توضیح شماره ۴.۲.۱۰ در صفحه ۲۴۴ را ببینید. در اینجا می خواهیم با استفاده از یک التصاق که روی کلاف کروی تعریف شده است، یک التصاق روی کلاف مماس TM تعریف کنیم. برای اینکار باید یک ۱-فرم التصاق که روی SM تعریف شده است را توسط یک نگاشت برگردان به روی کلاف مماس TM برگردانیم.

فرض کنید تابع حقیقی $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ داده شده است. می خواهیم شرایطی پیدا کنیم که f برگردان یک تابع حقیقی روی فضای تصویری $(\mathbb{R}^n(\mathbb{R}))$ $g \in C^\infty$ باشد.

^{۳۱}Directional Connection

گزاره ۱۰.۱۸.۱۰. فرض کنیم $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$. در این صورت تابع $g \in C^\infty(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$ وجود دارد به طوریکه $\eta^*g = f$ اگر و تنها اگر هرگاه داشته باشیم

$$x = \lambda y, \quad x, y \in (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}), \quad \lambda > 0,$$

آنگاه

$$f(x) = f(y).$$

به عبارت دیگر تابع f در شرط همگنی درجه یک $f(\lambda y) = f(y)$ صدق کند.

اثبات. فرض کنیم یک تابع حقیقی روی فضای تصویری، مانند $g \in C^\infty(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$ وجود دارد به طوری که $\eta^*g = f$ و $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ و $x = \lambda y$ در این صورت

$$f(x) = \eta^*g(x) = g(\eta(x)) = g([x]) = g([y]) = g(\eta(y)) = \eta^*g(y) = f(y).$$

بر عکس فرض کنیم که اگر داشته باشیم $x = \lambda y$ آنگاه $f(x) = f(y)$. در این صورت تعریف می کنیم

$$g : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$g([x]) = f(x)$$

تابع g با تعریف بالا خوشتعریف است. زیرا اگر $[x] = [y]$ آنگاه به ازای یک $\lambda > 0$ داریم $x = \lambda y$. در این صورت $f(x) = f(y)$. در نتیجه $g([x]) = g([y])$. $\square$

حال اگر f یک تابع حقیقی روی کلاف مماس TM و g یک تابع حقیقی روی کلاف کروی SM باشد، گزاره فوق را می توان به صورت زیر نوشت.

گزاره ۲۰.۱۸.۱۰. فرض کنیم $f \in C^\infty(TM)$. در این صورت تابع $g \in C^\infty(SM)$ وجود دارد به طوریکه $\eta^*g = f$ اگر و تنها اگر، در صورتیکه داشته باشیم

$$x = \lambda y, \quad x, y \in T_pM - \{0\}, \quad \lambda > 0, \quad p \in M$$

$$\text{آنگاه } f(p, x) = f(p, y).$$

قضیه‌های مشابهی بر ای میدان‌های برداری و فرم‌های دیفرانسیل از درجات متفاوت وجود دارد.

قضیه ۳.۱۸.۱۰. فرض کنیم $\omega \in \Omega^1(TM)$. در این صورت $\bar{\omega} \in \Omega^1(SM)$ وجود دارد به طوریکه $\eta^*\bar{\omega} = \omega$ اگر و تنها اگر، در صورتیکه داشته باشیم

$$x = \lambda y, \quad x, y \in T_p M - \{0\}, \quad \lambda > 0.$$

$$\text{آنگاه } \omega_x = \omega_y.$$

اثبات. روش اثبات کم و بیش مشابه روش به کار رفته در گزاره فوق است. برای جزئیات اثبات به صفحه ۱۰ از [۱۴] مراجعه شود. $\square$

تذکر ۴.۱۸.۱۰. نظر به اینکه در منیفلد‌های فینسلری تابع اساسی $F(y)$ و اغلب اشیاء هندسی همگن هستند، با توجه به آنچه در توضیح شماره ۴.۲.۱۰ در صفحه ۲۴۴ بیان شد، هندسه فینسلر در واقع مطالعه منیفلد SM به جای M است. لذا به همین صورت لازم است که التصاق‌های مورد نیاز را روی SM تعریف نماییم. اما با توجه به این که کار روی SM مشکل می‌نماید، با استفاده از نگاشت برگردان التصاق‌ها را روی TM تعریف می‌کنیم. در اینجا است که التصاق جهتی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

در این بخش التصاق‌های خطی خاصی روی VTM معرفی می‌شوند که به طور معینی قابل برگرداندن به SM هستند. این التصاق‌ها از آن جهت دارای اهمیت هستند که در صورت وجود آنها دیگر نیازی به تعریف التصاق روی کل فضای مماس دوم TTM نیست.

تعریف ۵.۱۸.۱۰. فرض کنیم $SM \leftarrow TM : \eta$ نگاشت کانونی $x \mapsto [x]$ باشد. در این صورت التصاق ∇ روی کلاف $TM \leftarrow \pi^* TM$ را یک التصاق جهتی^{۳۲} می

^{۳۲}directional connection (connexion de direction)

گویم هرگاه ∇ برگردان یک التصاق $SM \rightarrow \pi^*TM$ توسط η باشد.

قضیه زیر را می توان به عنوان قضیه اساسی التصاق های جهتی روی TM معرفی کرد. به عبارت دیگر در این قضیه شرط لازم و کافی برای وجود ۱- فرم التصاق جهتی روی TM بیان می گردد.

قضیه ۱۸.۱۰. فرض کنیم $\omega_j^i = \Gamma_{jk}^i dx^k + C_{jk}^i dy^k$ ۱- فرم التصاق مربوط به التصاق ∇ روی TM باشد که در آن $F_{jk}^i \in C^\infty(TM)$ ، Γ_{jk}^i می باشند. برای آنکه ∇ التصاق جهتی روی TM باشد لازم و کافی است که $\Gamma_{jk}^i(x, y)$ ، روی y همگن مثبت از مرتبه ۰، $C_{jk}^i(x, y)$ روی y همگن مثبت از مرتبه ۱- بوده و $y^k C_{jk}^i = 0$ باشند.

در اینجا برای جلوگیری از اطاله کلام فقط به صورت این قضیه اکتفا می نمایم. برای اثبات این قضیه، خواننده علاقه مند می تواند به صفحه ۱۰ از مقاله [۱۴] مراجعه نماید.

۱۹.۱۰ التصاق فینسلری

نظر به کاربردهای زیادی که اخیراً از هندسه فینسلر در مهندسی و علوم پیدا شده است، لازم است که دانشجویان هندسه اطلاعاتی هر چند مقدماتی از این مفهوم داشته باشند. لذا در این فصل مفهوم التصاق های فینسلری را معرفی می کنیم. از میان همه التصاق های روی کلاف برداری، آن دسته از التصاق هایی که می توانند به یک مفهوم معین، تعمیم التصاق های روی TM باشند را تحت عنوان التصاق های فینسلری منظم معرفی می کنیم. سپس به بیان مفاهیم انحنا و تاب این التصاق می پردازیم. در فصل بعد فقط به تعریف دو التصاق فینسلری به نام التصاق های کارتان و چرن که در هندسه و کاربرد آن زیاد به چشم می خورند و تعمیم طبیعی مشتق گیری همگرد ریمانی هستند، می پردازیم. التصاق های دیگری نیز در هندسه فینسلری موجود است که از افق دید این کتاب خارج بوده و در اینجا به آن اشاره

نمی شود. اما کلی ترین التصاق فینسلری که تاکنون تعریف گردیده است، التصاق فینسلری عمومی^{۳۴} است که همه التصاق های دیگر را به عنوان حالت خاص در بر می گیرد. مقالات [۳۲] و [۳۳] را ببینید.

۱.۱۹.۱۰ مقدمات ساختار فینسلری^{۳۵}

فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر n -بعدی، $T_x M$ فضای مماس بر آن در نقطه x و $TM := \bigcup_{x \in M} T_x M$ کلاف مماس بر M باشد. فرض کنیم $TM := TM \setminus \{0\}$. TM و $\pi : TM \rightarrow M$ کلاف برداری متشکل از بردارهای غیر صفر M باشد. هر نقطه TM را با دوتایی $z = (x, y)$ نمایش می دهیم که در آن $x = \pi z \in M$ و $y \in T_x M$. ساختار فینسلری F و منیفلد فینسلری (M, g) که در صفحه ۲۱ در تعریف ۱.۳.۲ بیان شد، را در نظر می گیریم. اگر $g_{ij}(x, y)$ به $y \neq 0$ بستگی نداشته باشد آن را متریک ریمانی می نامیم. کلاف برگردان $\pi^* TM := \{(x, y, v) \mid 0 \neq y, v \in T_x M\}$ و دوگان آن $\pi^* T^* M := \{\pi^* \theta \mid \theta \in T^* M\}$ روی کارت (x, U) از M مختصات موضعی (x^i) و پایه های $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ و $\{dx^i\}$ را به ترتیب روی کلاف های TM و $T^* M$ در نظر می گیریم. یادآوری می کنیم که در هر نقطه $z = (x, y)$ از TM ، تار $\pi^* TM$ فضای برداری مماس $T_x M$ و تار $\pi^* T^* M$ فضای برداری دوگان $T_x^* M$ است. لذا $\frac{\partial}{\partial x^i}$ و dx^i همان برشهای کلاف برگردان و دوگان آن هستند. بنابراین برای سادگی، چنانچه احتمال اشتباه نرود، همچنان از دو نماد $\frac{\partial}{\partial x^i}$ و dx^i برای نمایش پایه های کلاف مماس و کلاف برگردان و دوگان آنها استفاده می کنیم.

فرض کنیم F یک ساختار فینسلری روی منیفلد M باشد. در هر نقطه مفروض $F(z) = F(y^i \frac{\partial}{\partial x^i})$ ، $x \in M$ تابعی از $F(z)$ تابعی از $\mathbb{R}^n$ است. تانسور اساسی g به

^{۳۴}General Finsler connection

^{۳۵}elements of Finsler structure

صورت زیر تعریف می شود.

$$g : \pi^*TM \otimes \pi^*TM \rightarrow [0, \infty),$$

که مولفه های آن عبارتند از $g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) = g_{ij}(x, y)$. لذا (π^*TM, g) یک کلاف برداری ریمانی روی TM است. حال تعریف تانسور تاب کارتان C در صفحه ۲۲ را به صورت زیر بیان می کنیم. تانسور

$$A : \pi^*TM \otimes \pi^*TM \otimes \pi^*TM \rightarrow \mathbb{R}$$

با مولفه های $A(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}) = A_{ijk}(x, y)$ را که در آن

$$A_{ijk}(x, y) = \frac{1}{F} F(x, y) [F^{\vee}(x, y)]_{y^i y^j y^k}$$

تانسور تاب کارتان می نامیم. علت این نماد گذاری مجدد آن است که ترجیح می دهیم با اشیا همگن از درجه خاص کار کنیم. توجه کنید که $A = C/F$ رابطه بین این دو نماد است.

تمرین ۱.۱۹.۱۰. درجه همگنی تانسورهای C و A را تعیین کنید.

تمرین ۲.۱۹.۱۰. نشان دهید اگر $A = 0$ آنگاه F ریمانی است.

برش کانونی ℓ از π^*TM را به صورت $\ell_{(x,y)} := \frac{y^i}{F} \frac{\partial}{\partial x^i}$ تعریف نموده آن را برش لیوویل^{۳۶} می نامیم. دوگان برش لیوویل را ۱-فرم هیلبرت می نامند و با ω نمایش می دهند. در اینجا داریم $\omega(\ell) = 1$

تمرین ۳.۱۹.۱۰. درجه همگنی برش کانونی ℓ را تعیین کنید.

تمرین ۴.۱۹.۱۰. نشان دهید که برش کانونی ℓ یک برش سرتاسری است، یعنی به دستگاه مختصات بستگی ندارد.

راهنمایی. این میدان برداری را در دو کارت مختلف با مختصات (x, y) و $(\tilde{x}, \tilde{y})$ نوشته و نشان دهید مقدار آن در دو دستگاه مختصات با هم برابر است.

۲.۱۹.۱۰ التصاق فینسلری^{۳۷}

فرض کنیم ∇ یک التصاق خطی روی کلاف برداری π^*TM و $\Gamma(\pi^*TM)$ خانواده برش های π^*TM باشد.

$$\nabla : T_z TM. \times \Gamma(\pi^*TM) \longrightarrow \Gamma(\pi^*TM),$$

$$(\hat{X}, Y) \mapsto \nabla_{\hat{X}} Y.$$

تعریف ۵.۱۹.۱۰. فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر به بعد n باشد. فرض کنیم ∇ یک مشتق همگرد روی کلاف برگردان π^*TM بوده و HTM یک التصاق غیر خطی روی TM باشد. دو تایی (HTM, ∇) را یک التصاق فینسلری روی M می نامیم.

مجددا یادآوری می نماییم که با توجه به یکرخت بودن کلاف برگردان π^*TM و کلاف عمودی VTM می توان التصاق خطی را روی کلاف عمودی تعریف نمود. این روش در کتاب [۱۵] و مقالات [۱۴] و [۱۰] به کار رفته است.

بنا بر آنچه در رابطه (۸.۱۰) در صفحه ۲۷۰ دیدیم شرط لازم و کافی برای وجود التصاق خطی ∇ وجود ضرایب Γ_{ij}^k و C_{ij}^k است. از طرف دیگر در قضیه ۲.۱۳.۱۰ در صفحه ۲۶۴ دیدیم که شرط لازم و کافی برای وجود زیرکلاف افقی HTM ، وجود توابع N_j^k است معروف به ضرایب التصاق غیرخطی. بنا بر این قضیه زیر را داریم.

قضیه ۶.۱۹.۱۰. یک تناظر یک به یک بین التصاق فینسلری (HTM, ∇) و سه تایی $(N_j^k, \Gamma_{ij}^k, C_{ij}^k)$ وجود دارد که در آن توابع موضعی هموار روی TM هستند.

ابنابر قضیه بالا می توان تعریف معادل دیگری از التصاق های فینسلری به شکل موضعی ارائه نمود.

تعریف ۷.۱۹.۱۰. یک التصاق فینسلری عبارت است از یک سه تایی مانند $(N_j^k, \Gamma_{ij}^k, C_{ij}^k)$ که در آن توابع موضعی هموار روی TM هستند و در روابط (۷.۱۰) و (۸.۱۰) در صفحات ۲۶۴ و ۲۷۰ صدق می کنند.

۳.۱۹.۱۰ التصاق فینسلری منظم^{۳۸}

دیدیم که منظور از تعریف التصاق فینسلری بررسی وجود دو مفهوم روی یک منیفلد بود. یکی وجود یک مشتقگیری همگرد ∇ روی کلافهای برداری که به وسیله آن می توانیم میزان تغییرات اشیا هندسی روی آن کلاف ها را محاسبه کنیم و دیگری وجود یک زیرفضای افقی HTM که به وسیله آن می توان فضای مماس دوم را به جمع مستقیم دو زیرفضا تجزیه کرد. حال ببینیم چه ارتباطی بهتر است بین ∇ و HTM برقرار باشد، اگر چه در حالت کلی هیچ گونه رابطه ای بین این دو مفهوم وجود ندارد. از میان همه زیر کلاف های افقی HTM ، آن زیر کلافی مفید تر است که به طور خاصی که بیان خواهد شد، با ∇ در ارتباط باشد.

یک التصاق فینسلری (HTM, ∇) در نظر می گیریم. خواهیم دید که ارتباط بین این دو مفهوم را طوری برقرار می کنیم که نیازی به ارائه دو نماد برای تعریف التصاق فینسلری مورد نظر ما، نبوده و می توان آن را با یک نماد ∇ مانند التصاق ریمانی معرفی کرد.

فرض کنیم ∇ یک التصاق خطی روی π^*TM باشد. به عبارت دیگر

$$\nabla : T_z TM. \times \Gamma(\pi^*TM) \longrightarrow \Gamma(\pi^*TM),$$

$$(\hat{X}, Y) \mapsto \nabla_{\hat{X}} Y.$$

یک نگاشت خطی به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\mu_z : T_z TM. \longrightarrow T_{\pi z} M,$$

$$\hat{X} \mapsto \mu_z(\hat{X}) = \nabla_{\hat{X}} F\ell.$$

که در آن $\hat{X} \in T_z TM.$

تعریف ۸.۱۹.۱۰. التصاق فینسلری (HTM, ∇) را یک التصاق فینسلری منظم گوئیم

اگر به ازای هر $z \in TM.$ یک نگاشت خطی μ_z موجود باشد به طوری که

$$H_z TM = \ker \mu_z.$$

یا به عبارت معادل التصاق فینسلری را منظم گوئیم اگر نگاشت خطی μ_z یک همریختی

از $V_z TM$ به روی $T_{\pi z} M$ باشد. در این صورت فضای مماس $TTM.$ در z را می

توان به صورت زیر تجزیه کرد.

$$T_z TM. = H_z TM \oplus V_z TM, \quad (9.10)$$

که در آن $H_z TM = \ker \mu_z$ فضای افقی یا التصاق غیر خطی است که توسط ∇ تعریف

شده است.

فرض کنیم

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} = F_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k},$$

آنگاه

$$\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = y^j \Gamma_{ji}^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad \mu\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = (\delta_i^k + y^j F_{ij}^k) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

تحدید μ را به فضای عمودی $V_z TM$ با $d := \mu|_{V_z TM}$ نشان داده و شکل ماتریسی d را با $d_j^i = (y^k F_{kj}^i + \delta_j^i)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۹.۱۹.۱۰. فرض کنیم $\{\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\}$ پایه موضعی TTM باشد. قرار می دهیم

$$D_j^i = y^k \Gamma_{kj}^i - N_j^i, \quad d_j^i = (y^k F_{kj}^i + \delta_j^i)$$

D و d را به ترتیب $-h$ انحراف^{۴۰} و $-v$ انحراف^{۴۱} می نامیم.

قضیه ۱۰.۱۹.۱۰. التصاق فینسلری (HTM, ∇) منظم است اگر و تنها اگر d_j^i وارون پذیر بوده و $-h$ انحراف آن صفر باشد، یا

$$y^k \Gamma_{kj}^i = N_j^i. \quad (۱۰.۱۰)$$

برای اثبات می توانید [۱۹]، [۱۰] یا [۲۲] را ببینید.

تذکر ۱۱.۱۹.۱۰. دیدیم که هر التصاق فینسلری (HTM, ∇) را می توان با سه تایی داریم $(N_j^k, \Gamma_{ij}^k, C_{ij}^k)$ نمایش داد. حال فرض کنیم (HTM, ∇) یک التصاق فینسلری منظم بوده و $\{N_j^i\}$ ضرایب التصاق غیر خطی HTM باشد. بنا بر قضیه ۱۰.۱۰ می توان ضرایب $\{N_j^i\}$ را بر حسب Γ_{kj}^i نوشت. $N_j^i = y^k \Gamma_{kj}^i$. لذا هر التصاق فینسلری منظم می تواند فقط با ضرایب التصاق خطی یا دوتایی $(\Gamma_{ij}^k, C_{ij}^k)$ نمایش داده می شود. بنابراین می توان هر التصاق فینسلری منظم را مانند التصاق ریمانی فقط با یک نماد ∇ نمایش داد.

^{۴۰} h - deflection

^{۴۱} v - deflection

اگر (HTM, ∇) یک التصاق فینسلری منظم باشد، در قضیه ۱۰.۱۰ دیدیم که ماتریس (d_i^k) وارون پذیر است. اگر وارون آن را با $(d_i^k)^{-1}$ نمایش دهیم آنگاه می توان نشان داد که پایه های $H_z TM$ یا پایه افقی $\{\frac{\delta}{\delta x^i}\}$ را می توان به صورت زیر نوشت.

$$\frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - N_i^k \frac{\partial}{\partial y^k},$$

که در آن $N_i^k = (d_r^k) y^j \Gamma_{ji}^r$. کتاب [۱۹] را ببینید. اگر پایه های $\{\frac{\delta}{\delta x^i}, F \frac{\partial}{\partial y^i}\}$ پایه های موضعی TTM با توجه به تجزیه (۹.۱۰) و خاصیت همگنی باشند، آنگاه پایه های دوگان آن را با $\{dx^i, \frac{\delta y^i}{F}\}$ نمایش می دهیم.

مثال ۱۲.۱۹.۱۰. نشان دهید که اگر التصاق فینسلری منظم روی منیفلد M موجود باشد، آنگاه هر بردار $\hat{X} \in T_z TM$ روی کلاف مماس را می توان به صورت موضعی به دو مولفه افقی و عمودی تجزیه کرد.

اثبات. یکی از نتایج جالب توجه در التصاق فینسلری منظم و در نتیجه وجود تجزیه (۹.۱۰) آن است که هر بردار مماس $\hat{X} \in T_z TM$ در z را می توان به

$$\hat{X} = H\hat{X} + V\hat{X}. \quad (۱۱.۱۰)$$

تجزیه کرد، که در آن $H\hat{X} \in H_z TM$ و $V\hat{X} \in V_z TM$.

فرض کنیم $\{\frac{\delta}{\delta x^i}\}$ و $\{\frac{\partial}{\partial y^i}\}$ به ترتیب پایه های موضعی دو زیرفضای افقی و عمودی HTM و VTM باشند. $\{\frac{\delta}{\delta x^i}\}$ و $\{\frac{\partial}{\partial y^i}\}$ را به ترتیب پایه های افقی و عمودی می نامیم. با استفاده از این پایه ها هر بردار $\hat{X} \in T_z TM$ روی کلاف مماس را می توان به صورت موضعی زیر به دو مولفه افقی و عمودی تجزیه کرد.

$$\hat{X} = X^{h^i} \frac{\delta}{\delta x^i} + X^{v^i} \frac{\partial}{\partial y^i},$$

که در آن X^{h^i} و X^{v^i} به ترتیب مولفه های موضعی افقی و عمودی بردار $\hat{X}$ هستند. $\square$

مشابه تجزیه (۱۱.۱۰) یک التصاق فینسلری را نیز می شود به شکل زیر به دو بخش افقی و عمودی تجزیه کرد.

تعریف ۱۳.۱۹.۱۰. فرض کنیم (HTM, ∇) یک التصاق فینسلری روی π^*TM باشد. در این صورت دو التصاق فینسلری افقی و عمودی^{۴۲} روی π^*TM را با نماد ${}^h\nabla$ و ${}^v\nabla$ نمایش داده و به ازای هر $\hat{X} \in \mathcal{X}(TM.)$ و هر $Y \in \Gamma(\pi^*TM)$ به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\mathcal{X}(TM.) \times \Gamma(\pi^*TM) \longrightarrow \Gamma(\pi^*TM),$$

$${}^h\nabla_{H\hat{X}}Y = \nabla_{H\hat{X}}Y, \quad {}^v\nabla_{V\hat{X}}Y = \nabla_{V\hat{X}}Y,$$

$(HTM, {}^h\nabla)$ و $(HTM, {}^v\nabla)$ را به ترتیب مؤلفه های افقی و عمودی التصاق فینسلری (HTM, ∇) می نامیم.

۴.۱۹.۱۰ انحنا و تاب التصاق فینسلری^{۴۳}

یک التصاق فینسلری (HTM, ∇) روی منیفلد M در نظر می گیریم. فرض کنیم TTM کلاف مماس TM بوده و ρ نگاشت کانونی خطی زیر باشد،

$$\rho : TTM. \longrightarrow \pi^*TM,$$

که توسط رابطه $\rho(\hat{X}) = (z, \pi_*(\hat{X}))$ که در آن $\hat{X} \in T_zTM.$ و $z \in TM.$ تعریف می شود. در حقیقت داریم

$$\rho_z : T_zTM. \longrightarrow T_{\pi z}M,$$

^{۴۲}Horizontal and Vertical connections

^{۴۳}regular Finsler Connection

و $\rho_z = \pi_{*z}$. لذا در مختصات موضعی اثر آن بر اعضای پایه به صورت زیر است.

$$\rho_z\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)|_z = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)|_{\pi z}, \quad \rho_z\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)|_z = 0.$$

اگر مجموعه بردارهای عمودی در نقطه z یا به عبارت دیگر مجموعه بردارهای مماس بر تار گذرنده از z را با $V_z TM$ نمایش دهیم، آنگاه می توان نشان داد که $V_z TM = \ker \rho_z$.

تمرین ۱۴.۱۹.۱۰. نشان دهید که $V_z TM = \ker \rho_z$.

تعریف ۱۵.۱۹.۱۰. معادلات ساختاری التصاق فینسلری ∇ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\tau(\hat{X}, \hat{Y}) = \nabla_{\hat{X}} Y - \nabla_{\hat{Y}} X - \rho[\hat{X}, \hat{Y}], \quad (12.10)$$

$$\Omega(\hat{X}, \hat{Y})Z = \nabla_{\hat{X}} \nabla_{\hat{Y}} Z - \nabla_{\hat{Y}} \nabla_{\hat{X}} Z - \nabla_{[\hat{X}, \hat{Y}]} Z, \quad (13.10)$$

که در آن $X = \rho(\hat{X})$, $Y = \rho(\hat{Y})$ و $Z = \rho(\hat{Z})$. تانسور τ و تانسور Ω را به ترتیب تانسورهای تاب و انحنای التصاق فینسلری ∇ می نامیم.

با توجه به تجزیه (۱۱.۱۰) تانسورهای تاب و انحنای التصاق فینسلری توسط دو تانسور تاب S و T و سه تانسور انحنا R , P و Q بیان می شوند.

$$S(X, Y) = \tau(H\hat{X}, H\hat{Y}), \quad (14.10)$$

$$T(\dot{X}, Y) = \tau(V\hat{X}, H\hat{Y}),$$

$$R(X, Y) = \Omega(H\hat{X}, H\hat{Y}), \quad (15.10)$$

$$P(X, \dot{Y}) = \Omega(H\hat{X}, V\hat{Y}),$$

$$Q(\dot{X}, \dot{Y}) = \Omega(V\hat{X}, V\hat{Y}),$$

که در آن $X = \rho(\hat{X})$, $Y = \rho(\hat{Y})$, $\dot{X} = \mu(\hat{X})$ و $\dot{Y} = \mu(\hat{Y})$.

نامگذاری این تانسورهای تاب و انحنا نیز با توجه به استفاده از بخش های افقی $H\hat{X}$ و عمودی $V\hat{X}$ از بردار $\hat{X}$ در تجزیه (11.10) صورت می گیرد. به عنوان مثال اگر در تانسور تاب $\tau(\hat{X}, \hat{Y})$ از دو مولفه افقی $H\hat{X}$ و $H\hat{Y}$ استفاده شود، آنگاه آن مولفه از تانسور تاب را تاب- hh می نامند. لذا در رابطه (14.10) معادله اول را تاب- hh ، معادله دوم را تاب- vh ، معادله سوم را انحنا- hh و ... الی آخر می نامند.

فرض کنیم (HTM, ∇) یک التصاق فینسلری روی منیفلد M باشد، تعریف می کنیم ∇ التصاق $\omega_j^i(v) \frac{\partial}{\partial x^j} := \nabla_v \frac{\partial}{\partial x^i}$ که در آن $v \in T_z TM$ و $\{\omega_j^i\}$ ۱-فرم های التصاق ∇ هستند. لذا تاب و انحناى این التصاق که در روابط (12.10) و (13.10) تعریف شده اند را می توان به صورت زیر نوشت.

$$\tau(\hat{X}, \hat{Y}) = \tau^i(\hat{X}, \hat{Y}) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

$$\Omega(\hat{X}, \hat{Y})Z = Z^j \Omega_j^i(\hat{X}, \hat{Y}) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

که در آن τ^i مولفه های تانسور تاب و $\{\Omega_j^i\}$ ۲-فرم انحناى التصاق ∇ است.

$$\tau^i = \omega_k^i \wedge dx^k,$$

$$\Omega_j^i = d\omega_j^i - \omega_j^k \wedge \omega_k^i.$$

بخش ۱۷.۱۰ در همین فصل را ببینید.

۲۰.۱۰ التصاق های کارتتان و چرن^{۴۴}

در این فصل به بیان مقدماتی در مورد مفهوم التصاق های کارتتان و چرن می پردازیم تا خوانندگانی که می خواهند اطلاعات اولیه ای در این مورد داشته باشند مجبور به مراجعه به

^{۴۴}Cartan and Chern connection

کتب دیگر نباشند. در این بخش به تعریف دو التصاق فینسلری مشهور به نام التصاق کارتان و التصاق چرن می پردازیم. لازم به یادآوری است که اخیرا یک التصاق فینسلری عمومی نیز تعریف گردیده است که همه التصاق های دیگر را به عنوان حالت خاص در بر می گیرد. مقالات [۳۲] و [۳۳] را ببینید.

۱.۲۰.۱۰ التصاق کارتان

التصاق کارتان به عنوان اولین التصاق فینسلری سازگار با متریک و (نیم) تاب آزاد است که توسط خود او در سال ۱۹۳۳ به صورت موضعی بیان گردید. این التصاق طبیعی ترین تعمیم از التصاق ریمانی است. در حقیقت خاصیت سازگاری با متریک موجب می شود که بتوان انتقال موازی در طول یک منحنی را برای منیفلد های فینسلری تعمیم داد. با استفاده از خاصیت انتقال موازی می توان میدان های قابی را در طول یک منحنی به طور موازی انتقال داد. این خاصیت جالب است که به ما کمک می کند تا یک خاصیت موضعی روی یک منیفلد را به یک خاصیت سرتاسری روی آن منیفلد تعمیم داد. این التصاق توسط اکبرزاده در سال ۱۹۵۶ به شکل سرتاسری نوشته شد. وی اولین کسی بود که در پایان نامه دکتری خود [۱۵] در دانشگاه پاریس التصاق کارتان را به شکلی که در این کتاب نوشته شده است، مطرح نمود. کتاب [۱۴] [۱۹] یا [۲۲] را ببینید. مشابه قضیه اساسی هندسه ریمانی، اکبرزاده در [۱۵] ثابت نمود که روی هر منیفلد فینسلری یک و تنها یک التصاق فینسلری سازگار با متریک و (نیم) تاب آزاد وجود دارد، که آن را التصاق کارتان می نامیم. در این بخش تمام اشیاء هندسی مربوط به التصاق کارتان را با استفاده از نماد c نمایش می دهیم.

تعریف ۱.۲۰.۱۰. فرض کنیم (M, g) یک منیفلد فینسلری باشد. التصاق فینسلری منظم

∇^c را یک التصاق کارتان ^{۴۵} می نامیم اگر در شرایط زیر صدق کند.

$$۱. (\nabla_{\hat{X}} g)(Y, Z) = 0,$$

$$۲. S(X, Y) = 0, \quad (۱۶.۱۰)$$

$$۳. g(T(\hat{X}, Y), Z) = g(T(\hat{X}, Z), Y).$$

که در آن از نمادهای $\hat{X} = \mu(V\hat{X})$, $\hat{Y} \in TTM$. و $\hat{Z} \in TTM$ استفاده کرده ایم.

از شرایط فوق نتیجه می شود که ۱- فرم التصاق کارتان با توجه به پایه های دوگان $\{dx^i, \frac{\delta y^i}{F}\}$ به صورت زیر نوشته می شود.

$${}^c\omega_j^i = \Gamma_{jk}^i dx^k + A_{jk}^i \frac{\delta y^k}{F}. \quad (۱۷.۱۰)$$

که در آن ضرایب Γ_{jk}^i و A_{jk}^i را به ترتیب ضرایب افقی و عمودی التصاق کارتان نامیده به صورت زیر بیان می کنند.

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{g^{is}}{2} \left(\frac{\delta g_{sj}}{\delta x^k} - \frac{\delta g_{jk}}{\delta x^s} + \frac{\delta g_{ks}}{\delta x^j} \right), \quad A_{jk}^i = g^{ih} A_{hjk}. \quad (۱۸.۱۰)$$

صفحه ۳۹ از کتاب [۲۰] را ببینید. در تعریف ۱۳.۱۹.۱۰ در صفحه ۲۸۳ مفهوم التصاق افقی و عمودی برای یک التصاق فینسلری را بیان نمودیم. در این جا فرمول های مشتق گیری همگرد افقی و عمودی مربوط به التصاق کارتان را می آوریم.

فرض کنیم $T_j^i(x, y)$ مولفه های یک تانسور دلخواه از نوع (1) روی کلاف مماس TM باشد. در دستگاه مختصات موضعی فرمول مشتقات همگرد افقی و عمودی در

^{۴۵}Cartan connection

التصاق کارتانه از یک تانسور دلخواه $T(x, y)$ به ترتیب به صورت زیر نوشته می شوند.

$${}^h\nabla_k T^i_j := T^i_{j|k} = \frac{\delta T^i_j}{\delta x^k} + T^l_j \Gamma^i_{lk} - T^i_l \Gamma^l_{jk}, \quad (۱۹.۱۰)$$

$${}^v\nabla_k T^i_j := T^i_{j/(k)} = \frac{\partial T^i_j}{\partial y^k} + T^l_j C^i_{lk} - T^i_l C^l_{jk}. \quad (۲۰.۱۰)$$

با استفاده از تعریف انحنا و تاب التصاق فینسلری منظم، از روابط (۱۳.۱۰) و

(۱۵.۱۰) مولفه تانسورهای hh -انحنا، hv -انحنا و vv -انحنای التصاق کارتانه نتیجه می شود.

$${}^cR^i_{jkl} = \frac{\delta \Gamma^i_{jl}}{\delta x^k} - \frac{\delta \Gamma^i_{jk}}{\delta x^l} + \Gamma^i_{hk} \Gamma^h_{jl} - \Gamma^i_{hl} \Gamma^h_{jk} + A^i_{jh} R^h_{kl},$$

$${}^cP^i_{jkl} = F \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial y^l} - A^i_{j|l|k} + A^i_{jr} \dot{A}^r_{kh},$$

$${}^cQ^i_{jkl} = A^r_{jk} A^i_{rl} - A^r_{jl} A^i_{rk},$$

که در آن $\nabla_{\hat{e}} := \dot{A}$ و نماد $|_k$ در معادله دوم، مربوط به مشتق گیری همگرد افقی در التصاق کارتانه است که در رابطه (۱۹.۱۰) بیان گردید.

۲.۲۰.۱۰ التصاق چرن

فرض کنیم (M, g) یک منیفلد فینسلری باشد. اس. اس. چرن^{۴۶} ثابت نمود که یک و تنها یک التصاق فینسلری روی کلاف برگردان $\pi^* TM$ وجود دارد که به ازای هر برش از کلاف برگردان $\forall X, Y, Z \in \Gamma(\pi^* TM)$ در شرایط زیر صدق کند.

$$۱. \tau(X, Y) = ۰.$$

$$(۲۱.۱۰)$$

$$۲. (\nabla_{\hat{X}} g)(Y, Z) = {}^2F^{-1} A(\mu(\hat{X}), Y, Z).$$

صفحه ۳۸ از کتاب [۲۰] را ببینید.

تعریف ۲۰۲۰.۱۰. فرض کنیم (M, g) یک منیفلد فینسلری باشد. التصاق فینسلری منظم ∇ را التصاق چرن^{۴۷} می گوئیم اگر در شرایط ۲۱.۱۰ به ترتیب موسوم به شرط تاب آزادی^{۴۸} و شرط تقریبا سازگاری با متریک^{۴۹} صدق کند.

۱- فرم های التصاق چرن به صورت زیر تعریف می شوند.

$$\omega_j^i = \Gamma_{jk}^i dx^k. \quad (22.10)$$

تذکر ۳۰۲۰.۱۰. از مقایسه ۱- فرم های التصاق کارتتان و چرن یعنی رابطه (۱۷.۱۰) و رابطه (۲۲.۱۰) نتیجه می شود که التصاق چرن همان التصاق کارتتان است که بخش عمودی ضرایب التصاق آن صفر فرض شده است. بعدها ثابت شد که التصاق چرن و التصاق راند^{۵۰} بر یکدیگر منطبق می شوند.

در تعریف ۱۳.۱۹.۱۰ در صفحه ۲۸۳ مفهوم التصاق افقی و عمودی برای یک التصاق فینسلری را بیان نمودیم. در این جا فرمول های مشتق گیری همگرد افقی و عمودی مربوط به التصاق چرن را می آوریم. فرض کنیم $T_j^i(x, y)$ مولفه های یک تانسور دلخواه از نوع (۱) روی کلاف مماس TM باشد. در دستگاه مختصات موضعی فرمول مشتقات همگرد افقی و عمودی در التصاق چرن از یک تانسور دلخواه $T(x, y)$ به ترتیب به صورت زیر نوشته می شوند.

$$T_{j|k}^i := \frac{\delta T_j^i}{\delta x^k} + T_j^l \Gamma_{lk}^i - T_l^i \Gamma_{jk}^l,$$

$$T_{j;k}^i := F \frac{\partial T_j^i}{\partial y^k}.$$

^{۴۷}Chern connection

^{۴۸}Torsion freeness

^{۴۹}Almost metric compatibility

^{۵۰}Rund connection

با استفاده از تعریف انحنا در التصاق فینسلری منظم یا (۱۳.۱۰) و (۱۵.۱۰) مولفه تانسورهای hh -انحنا، hv -انحنا و vv -انحنای التصاق چرن به دست می آید.

$$R_{j \quad kl}^i = \frac{\delta \Gamma_{jl}^i}{\delta x^k} - \frac{\delta \Gamma_{jk}^i}{\delta x^l} + \Gamma_{hk}^i \Gamma_{jl}^h - \Gamma_{hl}^i \Gamma_{jk}^h,$$

$$P_{j \quad kl}^i = F \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial y^l},$$

$$Q_{j \quad kl}^i = 0.$$

از روابط (۱۳.۱۰) و (۲۱.۱۰) مولفه های تانسور تاب به دست می آید.

$$S_{jk}^i = 0,$$

$$T_{jk}^i = 0.$$

صفحه ۵۲ از کتاب [۲۰] را ببینید.

گروه و جبر لی

با به هم آمیختن مفاهیم گروه و منیفلد در ریاضی به مفهوم جدیدی به نام گروه لی دست می یابیم. گروه و جبر لی مبحثی بسیار وسیع و گسترده است که مطالعه آن در یک فصل نمی گنجد. اما به جرعت می توان گفت که به خاطر عمل متقابل بین جنبه های جبری و هندسی این دو مفهوم یکی از زیباترین مثال ها از منیفلدها که در هندسه و فیزیک مطرح است مثال هایی از گروه های لی است. تعدادی از این مثال ها را می توانید در [۲] صفحات ۱۲۲ الی ۱۲۵ و ۱۴۳ الی ۱۴۹ ببینید. از طرف دیگر نیاز روزافزون دانشجویان رشته های فنی مهندسی به آشنایی هر چند مقدماتی با این مفاهیم را نمی شود نادیده گرفت. لذا نمی توان

این کتاب را بدون اشاره به این دریای مفاهیم جالب خاتمه داد.

در این فصل ما به اختصار با مفاهیم گروه و جبر لی آشنا می شویم. این نظریه به صورت موضعی در دهه ۱۸۸۰ تا ۱۸۹۰ بوسیله لی^۱ پدید آمد و موضوع اصلی آن بحث در مورد گروه تبدیلات پیوسته^۲ بود که کاربرد زیادی در حل برخی از معادلات دیفرانسیل دارد. این نوع معادلات دیفرانسیل به موازات نظریه گالوا از معادلات جبری تشکیل می شوند. همچنین بسیاری از گروهها در هندسه مانند گروه تبدیلات ایزومتري و یا گروه هایی که در فیزیک اهمیت اساسی دارند، نظیر گروه اقلیدسی، گروه لورنتس، گروه اسپینور و گروه پوانکاره، گروههای لی هستند. اما نظریه سرتاسری گروه و جبر لی مبحثی بسیار گسترده و زیبا است که مطالعه آن به بوسیله کارتان^۳ و ویل^۴ در سال ۱۹۲۰ آغاز شد. درک مفاهیم گروه و جبر لی و کاربرد آنها، احتیاج به مطالعه کتب و مقالات زیادی دارد که ما به چند کتاب که تجدید چاپ شده و در حال حاضر قابل دسترسی است اشاره می کنیم [۸]، [۳۶]، [۳۸]، [۶۰]، [۵۳]، [۵۴]، [۶۳]، [۷۱].

۱.۱۱ گروه توپولوژیک

ابتدا مفاهیم گروه و فضای توپولوژیک را بهم آمیخته مفهوم گروه توپولوژیک^۵ را بیان می کنیم. یادآوری می کنیم که فضای توپولوژیک عبارت است از یک مجموعه همراه با یک خانواده از زیرمجموعه های آن مجموعه، که در سه شرط زیر صدق می کنند. اولاً شامل خود مجموعه و مجموعه تهی باشد. ثانیاً هر اجتماع دلخواه از اعضای این زیرمجموعه در آن قرار

^۱S. Lie

^۲continus group of transformations

^۳E. Cartan

^۴H. Weyl

^۵topological group

داشته باشد. ثالثا اشتراک هر تعداد متناهی از اعضای این زیرمجموعه در آن قرار داشته باشد.

تعریف ۱.۱.۱۱. فرض کنیم G یک فضای توپولوژیک بوده و بعلاوه دارای ساختار گروه نیز باشد. G را یک گروه توپولوژیک می نامیم هرگاه توابع زیر پیوسته باشند.

$$\begin{aligned}\mu : G \times G &\longrightarrow G & \tau : G &\longrightarrow G \\ (g_1, g_2) &\mapsto g_1 \cdot g_2 & g &\mapsto g^{-1}\end{aligned}$$

آنچه که بین ساختارهای جبری و توپولوژیکی یک گروه توپولوژیک ارتباط برقرار می کند پیوستگی دو نگاشت μ و τ است. در اینجا با چند مثال از گروههای توپولوژیک آشنا می شویم.

مثال ۲.۱.۱۱. گروههای اعداد حقیقی $(\mathbb{R}, +)$ ، اعداد مختلط $(\mathbb{C}, +)$ و اعداد گویا $(\mathbb{Q}, +)$ با توپولوژی های معمولی گروههای توپولوژیک هستند. زیرا در حقیقت اگر فرض کنیم $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دو دنباله همگرا در هر یک از این فضاها باشند، یعنی اگر $x_n \rightarrow x$ و $y_n \rightarrow y$ آنگاه $x_n + y_n \rightarrow x + y$ و $x_n \rightarrow -x$ به عبارت دیگر نگاشتهای τ و μ پیوسته هستند.

مثال ۳.۱.۱۱. اگر فرض کنیم $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ ، $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ و $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$ آنگاه گروههای ضربی $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ ، $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ ، $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ و $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ همگی گروههای توپولوژیک هستند. زیرا در حقیقت اگر فرض کنیم $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دو دنباله همگرا در هر یک از این فضاها باشند به طوری که $x_n \rightarrow x$ و $y_n \rightarrow y$ آنگاه داریم $x_n \cdot y_n \rightarrow x \cdot y$ و $-x_n \rightarrow -x$ و در نتیجه نگاشتهای τ و μ پیوسته هستند.

مثال ۴.۱.۱۱. می دانیم مجموعه $\{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ همراه با عمل ضرب زیر موسوم به ضرب کواترنیونی $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ ، $ij = k = -ji$ ، $jk = i = -kj$ ، $ki = j = -ik$ ،

$i = -kj$, $ki = j = -ik$ تشکیل یک گروه می دهد که آن را گروه^۶ کواترنیونهای ناصفر نامیده و با $(IH, .)$ نمایش می دهیم. $(IH, .)$ یک گروه توپولوژیک است، زیرا اولاً می دانیم کواترنیونهای ناصفر با ضرب تشکیل یک گروه می دهند. ثانیاً کواترنیونهای ناصفر $I\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$ یک فضای توپولوژیک است، چون روی $I\mathbb{H}^*$ توپولوژی معمولی $\{0\} - \mathbb{R}^4$ توپولوژی القا شده از $\mathbb{R}^4$ به زیرفضای خود یعنی $\{0\} - \mathbb{R}^4$ را می توان در نظر گرفت. ثالثاً توابع μ و τ پیوسته هستند، زیرا اگر فرض کنیم $a = a_1 + a_2i + a_3j + a_4k$ و $b = b_1 + b_2i + b_3j + b_4k$ آنگاه

$$\begin{aligned}\mu(a, b) &= ab \\ &= (a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4) + (a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3 + a_1b_2)i + \\ &\quad (a_3b_1 + a_4b_2 + a_1b_3 - a_2b_4)j + (a_4b_1 + a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_4)k\end{aligned}$$

حال اگر $\{q_n\}$ و $\{q'_n\}$ دو دنباله از کواترنیونها باشند، شکل حاصلضرب دو عدد کواترنیونی نشان میدهد که وقتی $q_n \rightarrow q$ و $q'_n \rightarrow q'$ آنگاه $q_n q'_n \rightarrow qq'$ یعنی μ پیوسته است. از طرف دیگر $\tau(a) = a^{-1} = \frac{a_1 - a_2i - a_3j - a_4k}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}$ بنابراین وقتی $q_n \rightarrow q$ آنگاه داریم $-q'_n \rightarrow -q'$ یعنی τ پیوسته است.

یادآوری می کنیم که $I\mathbb{H}$ را می توان به عنوان یک فضای برداری نرم دار روی میدان اعداد حقیقی در نظر گرفت که پایه های استاندارد آن عبارتند از

$$1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, i = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, j = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

یک نرم طبیعی روی $I\mathbb{H}$ تعریف می شود که مشابه نرم مختلط است و به صورت زیر معرفی می شود.

$$norm(z) = z \cdot \bar{z}$$

^۶ quaternion group

مثال ۵.۱.۱۱. هر فضای برداری نرم دار روی $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ تحت عمل جمع یک گروه توپولوژیک است.

مثال ۶.۱.۱۱. اگر $(E_1, \|\cdot\|_1)$ و $(E_2, \|\cdot\|_2)$ دو فضای برداری نرم دار باشند آنگاه $L(E_1, E_2)$ مجموعه کلیه نگاشتهای خطی از E_1 به E_2 با جمع تابعی روی $\mathbb{R}$ (یا $\mathbb{C}$) یک گروه توپولوژیک است. زیرا این فضا با نرم $\|f\|_2 = \sup_{\|x\|_1} \|f(x)\|_2$ نرم دار می شود.

مثال ۷.۱.۱۱. گروههای کلاسیک حقیقی مانند $GL(n, \mathbb{R})$ و بعضی زیرگروههای تشکیل یک گروه توپولوژیک می دهند. $GL(n, \mathbb{R})$ یا گروه خطی عام که عبارتست از مجموعه تمام تبدیلات خطی وارون پذیر از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^n$ یا به طور معادل مجموعه ماتریسهای معکوس پذیر $n \times n$ یک گروه توپولوژیک است. زیرا اولاً با عمل ترکیب توابع، یا به طور معادل ضرب ماتریسی، تشکیل یک گروه می دهد و از طرفی چون $GL(n, \mathbb{R}) \subseteq L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ پس زیرفضای توپولوژیک هم هست. بررسی پیوستگی τ و μ مشابه مثال ۴.۱.۱۱ است.

۱.۱.۱۱ زیرگروه یک گروه توپولوژیک

اگر G یک گروه توپولوژیک باشد، هر زیرگروه جبری آن با توپولوژی القا شده، یک گروه توپولوژیک خواهد بود، زیرا اگر τ و μ که توابعی پیوسته روی G هستند را تحدید نماییم، همچنان پیوسته خواهند بود. لذا هر زیرگروه جبری یک گروه توپولوژیک با توپولوژی القا شده را زیرگروه توپولوژیک^۸ می نامیم.

مثال ۸.۱.۱۱. دایره $(S^1, \cdot)$ زیرگروهی توپولوژیک از $\mathbb{C}$ است. در اینجا S^1 به عنوان

^۷General Linear group

^۸topologic subgroup

اعضایی از C^* در نظر گرفته شده است که اندازه آنها یک است.

۲.۱۱ گروه لی

مقدمه اگر ما در تعریف گروه توپولوژیک فضای توپولوژیک را با یک منیفلد دیفرانسیل پذیر و شرط پیوستگی توابع را با شرط دیفرانسیل پذیری C^∞ ، تعویض نماییم، آنچه بدست می آید یک گروه لی است. می توان کلاس نگاشت ها را به جای C^∞ ، تحلیلی یا C^ω در نظر گرفت.^۹ با شگفتی زیاد ساختار گروه، ساختار منیفلدی را با چنان دقتی تحت تاثیر قرار می دهد که اگر نگاشت های C^ω را در نظر بگیریم، در عمومیت مسئله تغییری پیدا نمی شود.^{۱۰}

گلیسن، مونت گومری و زیپین^{۱۱} در سال ۱۹۵۲ ثابت کردند که گروه توپولوژیکی موضعا اقلیدسی، یا گروهی که اعضای آن یک منیفلد C^∞ است، همراه با شرط پیوستگی عمل گروه، دارای یک ساختار تحلیلی منحصر بفرد است که عمل گروه در آن تحلیلی یا C^∞ است. به عبارت دیگر با شرایط ضعیف بالا می توان یک منیفلد منحصر بفرد روی G طوری یافت، که G تبدیل به یک گروه لی شود. این موضوع به حل مسئله پنجم هیلبرت معروف است.^{۱۲}

تعریف ۱.۲.۱۱. یک گروه لی گروهی است که اعضای آن نقاطی از یک منیفلد دیفرانسیل پذیر C^∞ با بعد متناهی باشد و نگاشت $\varphi : G \times G \rightarrow G$ که با عمل گروه توسط $\varphi(g, h) = gh$ تعریف می شود از کلاس C^∞ باشد.

^۹ در اینجا ω یک عدد اردینال است.

^{۱۰} برای مثال می توان به کتاب [۶۸]، بخش ۵۶ مراجعه کرد.

^{۱۱}Gleason Montgomery Zippin

^{۱۲}بخش ۲.۱۵ از کتاب [۶۱] را ببینید.

۱.۲.۱۱ مقایسه تعریف گروه توپولوژیک و گروه لی

قضیه‌ای وجود دارد که نشان می‌دهد C^∞ بودن تابع φ در تعریف گروه لی کافی است و نظیر گروه‌های توپولوژیک احتیاج به بحث روی دو نگاشت نیست. به عبارت دیگر شرط دیفرانسیل پذیری نگاشت دوم به خودی خود برقرار است. این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم.^{۱۳}

قضیه ۲.۲.۱۱. اگر G یک گروه لی باشد، نگاشت $\tau : G \rightarrow G$ که $\tau(g) = g^{-1}$ نگاشتی C^∞ است.

۲.۲.۱۱ چند مثال از گروه‌های لی

مثال ۳.۲.۱۱. $(\mathbb{C}^*, +)$ و $(\mathbb{R}^*, +)$ گروه‌های لی هستند. منیفلد بودن و گروه بودن به وضوح قابل بررسی است. تنها باید بگوییم که نگاشت $\mu(z, z') = z + z'$ از کلاس C^∞ است، که آن هم از خطی بودن μ ، نتیجه می‌شود.

مثال ۴.۲.۱۱. $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ و $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ نیز گروه‌های لی هستند. گروه بودن واضح است. $\mathbb{C}^*$ و $\mathbb{R}^*$ منیفلد‌های یک کارتی هستند. به عنوان مثال $\mathbb{C}^*$ با اطلس یک کارتی زیر پوشیده می‌شود

$$\varphi : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$z = (x + iy) \mapsto (x, y),$$

در اینجا $\varphi(\mathbb{C}^*)$ زیر مجموعه باز $\mathbb{R}^2$ است. همچنین نگاشت

$$\mu(z, z') = zz' = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1),$$

C^∞ است، زیرا هر یک از مولفه‌های آن توابع چند جمله‌ای است.

^{۱۳} برای اثبات خواننده علاقه مند را به صفحه ۲۴۶ از کتاب [۶۰] ارجاع می‌دهیم.

مثال ۵.۲.۱۱. $(IH^*, \cdot)$ یا کواترانیونهای ناصفر یک گروه لی است. اثبات دقیقاً مانند حالت $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ است.

مثال ۶.۲.۱۱. گروه خطی عام $GL(n, \mathbb{R})$ نیز گروه لی است. در حقیقت اولاً، با ترکیب نگاشتها (یا ضرب ماتریسی) گروه است. ثانیاً، می دانیم که $GL(n, \mathbb{R})$ زیرمجموعه بازی است از $\mathbb{R}^{n^2} \simeq M(n, \mathbb{R})$ مجموعه ماتریسهای $n \times n$ روی میدان $\mathbb{R}$ ، زیرا تصویر معکوس مجموعه باز $\mathbb{R} - \{0\}$ تحت تابع پیوسته دترمینان است. صفحه ۲۰ از کتاب [۲] را ببینید. بنابراین با توجه به اینکه هر زیرمجموعه باز از یک منیفلد C^∞ ، خود منیفلدی C^∞ است، پس $GL(n, \mathbb{R})$ منیفلد C^∞ است. ثالثاً نگاشت $\mu(A, B) = A \cdot B$ نیز C^∞ است، چون هرکدام از درایه های ماتریس حاصلضرب AB را می توان به صورت توابع چند جمله ای از درایه های A و B نوشت. پس $GL(n, \mathbb{R})$ یک گروه لی است.

مثال ۷.۲.۱۱. دایره S^1 یک گروه لی است. اولاً، می توان ثابت کرد که S^1 زیرگروه ضربی از $(\mathbb{C}^*, +)$ است. در حقیقت S^1 را می توان به صورت اعداد مختلطی که اندازه آنها برابر یک است در نظر گرفت. $S^1 = \{z = x + iy \in \mathbb{C}^* \mid |z| = x^2 + y^2 = 1\}$ برای هر $z_1, z_2 \in S^1$ داریم $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = 1$ بنابراین $z_1 z_2 \in \mathbb{C}^*$ همچنین برای هر $z = x + iy \in S^1$ ، $\bar{z} = x - iy \in S^1$ زیرا $|\bar{z}| = x^2 + y^2 = 1$ و نیز $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = 1 = \bar{\bar{z}} \cdot z$ بنابراین $(S^1, \cdot)$ یک گروه است. ثانیاً، S^1 یک منیفلد است. ثالثاً، نگاشت $\varphi : S^1 \times S^1 \rightarrow S^1$ به طوریکه $\varphi(z_1, z_2) = z_1 \cdot z_2$ ، به علت چند جمله ای بودن C^∞ است. پس S^1 یک گروه لی است.

۳.۱۱ مولفه همانی یک گروه لی

تعریف ۱.۳.۱۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. رابطه هم ارزی زیر را در نظر می گیریم. می گوئیم $x \sim y$ اگر و تنها اگر یک زیرمجموعه همبند مانند X موجود باشد

که شامل x و y باشد. هریک از کلاس های هم‌ارزی به وجود آمده با این رابطه هم‌ارزی را یک مولفه همبندی^{۱۴} می‌نامیم.

قضیه ۲.۳.۱۱. $A \subset X$ یک مولفه همبندی X شامل $x \in X$ است، اگر و تنها اگر بزرگترین زیرمجموعه همبند X باشد که شامل x است.

تعریف ۳.۳.۱۱. فرض کنید G یک گروه لی و $e \in G$ عنصر همانی این گروه باشد. مولفه همبندی G که شامل e است را مولفه همانی^{۱۵} می‌نامیم و آن را با G^* نمایش می‌دهیم.

قضیه ۴.۳.۱۱. مولفه همانی G^* یک زیرگروه باز گروه لی G است.

اثبات. چون G یک گروه لی است نگاشت عمل گروه $G \times G \rightarrow G$ از کلاس C^∞ است. چون G^* همبند است $G^* \times G^*$ نیز همبند می‌باشد. با توجه به پیوستگی φ ، $\varphi(G^* \times G^*)$ نیز همبند است. از طرف دیگر چون $e \in G^*$ داریم $(e, e) \in G^* \times G^*$ و از آنجا $e.e = e$ ، $\varphi((e, e)) = e.e = e$ چون $e \in G^*$ پس $\varphi(G^* \times G^*)$ یک مجموعه همبند شامل e است و با توجه به قضیه ۲.۳.۱۱ داریم $\varphi(G^* \times G^*) \subset G^*$. لذا اگر $a, b \in G^*$ آنگاه $\varphi((a, b)) = a.b$ در نتیجه $a, b \in G^*$ و G^* یک زیرگروه G است. حال فرض کنیم $p \in G^*$ باشد. کارت (y, U) را در G به صورت زیر در نظر می‌گیریم: $y: U \rightarrow y(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ برای هر $p \in U$ چون $\mathbb{R}^n$ همبند است و $y(U)$ یک همسایگی $y(p)$ است، همواره یک زیرمجموعه همبند باز مانند $V \subseteq y(U)$ موجود است. حال چون y یک هومئومورفیسم است، $y^{-1}(V)$ باز و همبند است. چون $y^{-1}(V)$ همبند و شامل p است $y^{-1}(V) \subseteq G^*$ است. و چون $p \in y^{-1}(V) \subseteq G^*$ در نتیجه G^* باز است. □

^{۱۴}connected component

^{۱۵}componet of identity

۴.۱۱ حاصلضرب گروه‌های لی

برای تعریف حاصلضرب گروه‌های لی^{۱۶} احتیاج به یادآوری تعریف منیفلد حاصلضرب داریم. کتاب [۲] را ببینید. اگر M و N به ترتیب توسط اطلسهای $\{(u_i, \varphi_i)\}$ و $\{(v_j, \psi_j)\}$ پوشیده شوند آنگاه $u_i \times v_j$ ، $M \times N$ را می‌پوشاند و اگر فرض کنیم $\varphi_i \times \psi_j : u_i \times v_j \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ کارت حاصلضربی باشد به طوری که همواره $(p, q) \rightarrow (\varphi_i(p), \psi_j(q))$ آنگاه $\{(u_i \times v_j, \varphi_i \times \psi_j)\}$ یک اطلس C^∞ برای $M \times N$ است. توضیح اینکه C^∞ بودن این اطلس از آنجا نتیجه می‌شود که اگر $\{(u_i \times v_j, \varphi_i \times \psi_j)\}$ و $\{(u_k \times v_l, \varphi_k \times \psi_l)\}$ دو کارت موضعی باشند که

$$(u_i \times v_j) \cap (u_k \times v_l) \neq \emptyset \Rightarrow u_i \cap u_k \neq \emptyset, v_j \cap v_l \neq \emptyset.$$

آنگاه

$$\begin{aligned} (\varphi_k \times \psi_l) \circ (\varphi_i \times \psi_j)^{-1} &= (\varphi_k \times \psi_l) \circ (\varphi_i^{-1} \times \psi_j^{-1}) \\ &= (\varphi_k \circ \varphi_i^{-1} \times \psi_l \circ \psi_j^{-1}). \end{aligned}$$

به طوری که

$$\varphi_i(u_i \cap u_k) \times \psi_j(v_j \cap v_l) \rightarrow \varphi_k(u_i \cap u_k) \times \psi_l(v_j \cap v_l).$$

اگر این نگاشت روی هر زوج مرتب عمل کند، یک زوج مرتب $(\varphi_k \circ \varphi_i^{-1}(p), \psi_l \circ \psi_j^{-1}(q))$ تشکیل می‌دهد که با توجه به C^∞ بودن توابع مولفه‌ای، C^∞ بودن نگاشت کلی نتیجه می‌شود.

قضیه ۱.۴.۱۱. حاصلضرب مستقیم $G_1 \times G_2$ دو گروه لی G_1 و G_2 ، یک گروه لی است با ساختار دیفرانسیل پذیری حاصلضرب دو منیفلد.

^{۱۶}direct product of Lie groups

اثبات. حاصلضرب مستقیم دو گروه G_1 و G_2 ، یک گروه است که با $G_1 \times G_2$ نمایش داده می شود. عمل گروه $G_1 \times G_2$ به صورت مولفه ای با $\varphi((g_1, g_2), (g'_1, g'_2)) = (g_1 g'_1, g_2 g'_2)$ نشان داده می شود. همچنین حاصلضرب دو منیفلد G_1 و G_2 ، منیفلد حاصلضرب $G_1 \times G_2$ است که تنها می ماند که بگوییم ترکیب اشاره شده در بالا نگاشتی C^∞ است. بعلت اینکه G_1 و G_2 گروه لی هستند، به ترتیب مولفه های اول و دوم زوج مرتب بالا C^∞ می باشند، پس خود φ ، C^∞ است. $\square$

به همین صورت می توان حاصلضرب تعداد متناهی از گروه های لی را تعریف کرد. یعنی اگر $G_1, \dots, G_n$ ، گروه های لی باشند آنگاه حاصلضرب $G_1 \times \dots \times G_n$ ، نیز یک گروه لی است.

مثال ۲.۴.۱۱. استوانه $T = [0, 1] \times S^1$ ، یک گروه لی است.

مثال ۳.۴.۱۱. چنبره n بعدی یک گروه لی است. زیرا $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$.

مثال ۴.۴.۱۱. با استفاده از قضیه بالامی توان به نوعی دیگر گفت که $(\mathbb{C}, +)$ یک گروه لی است. در حقیقت می توان مجموعه اعداد مختلط را توسط $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ نمایش داد.

۵.۱۱ زیرگروه های یک گروه لی

در این بخش ابتدا به یادآوری چند تعریف می پردازیم.

تعریف ۱.۵.۱۱. فرض کنیم N یک منیفلد C^∞ به بعد n و M یک زیرمجموعه آن باشد. می گوییم زیرمجموعه M خاصیت m زیرمنیفلدی^{۱۷} $m < n$ دارد اگر برای هر $p \in M$ یک کارت موضعی (U, φ) از منیفلد N با مختصات موضعی $x^1 \dots x^n$ موجود باشد به طوری که در سه شرط زیر صدق کند. اولاً $\varphi(p) = (0, \dots, 0)$ ، ثانیاً، $\varphi(U) = C^n_\varepsilon(0)$.

^{۱۷}m-submanifold property

که در آن $C_\varepsilon^n(\cdot)$ یک مکعب باز n -بعدی به مرکز مبدا و شعاع $\varepsilon > 0$ است. ثالثاً،

$$\varphi(U \cap M) = \{x \in C_\varepsilon^n(\cdot) \mid x_m + 1 = x_m + 2 = \dots = x_n = 0\}$$
 در این صورت مختصات x^i را مختصات متمایز می نامیم.

تعریف ۲.۵.۱۱. فرض کنیم N یک منیفلد C^∞ به بعد n باشد. هر زیرمجموعه (توپولوژیکی) M از N که دارای خاصیت m -زیرمنیفلدی است و در مختصات متمایز ساختار C^∞ دارد را زیرمنیفلد منظم N می نامیم.

به عبارت دیگر، اگر زیرمجموعه M از N ، دارای خاصیت m -زیرمنیفلدی باشد به طوری که حوزه تعریف کارتهای مختصاتی M همان ناحیه هایی باشند که توسط خاصیت m -زیرمنیفلدی M تعریف می شوند، آنگاه M زیرمنیفلد منظم N است.

تعریف ۳.۵.۱۱. زیرگروه (جبری) H از G که زیرمنیفلدی از گروه لی G است، را زیرگروه لی G می نامند، هرگاه H دارای ساختار دیفرانسیل پذیری به عنوان زیرمنیفلد جادهنده G بوده و H با این ساختار یک گروه لی باشد.

نکته. اگر M_1 زیرمنیفلد منظم N_1 و M_2 زیرمنیفلد منظم N_2 باشد، آنگاه $M_1 \times M_2$ زیرمنیفلد منظم $N_1 \times N_2$ خواهد بود. زیرا برای هر $(p, q) \in M_1 \times M_2$ داریم $p \in M_1$ و $q \in M_2$ پس (U, φ) از N_1 و (V, ψ) از N_2 وجود دارند به طوری که خاصیت مزبور برقرار باشد. در نتیجه کارت موضعی $(U \times V, \varphi \times \psi)$ از $N_1 \times N_2$ دارای خواص زیر است.

$$\varphi \times \psi(p, q) = (\varphi(p), \psi(q)) = (o, \dots, o) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2},$$

$$\varphi \times \psi(U, V) = (\varphi(U), \psi(V)) = (C_\varepsilon^{n_1}(\cdot), C_\varepsilon^{n_2}(\cdot)) = C_\varepsilon^{n_1+n_2}(\cdot).$$

چون اجتماع دو اطلس باز اطلسی را برای یک منیفلد ایجاد می کند، ما می توانیم ε_1 و ε_2 را طوری انتخاب کنیم که $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$. (مثلاً یکی را کوچک کنیم، تا در اثر این

خاصیت، به دیگری برسد.)

$$\begin{aligned} \varphi \times \psi(U \times V \cap M_1 \times M_2) &= \varphi \times \psi(U \cap M_1, v \cap M_2) \\ &= (\varphi(U \cap M_1), \psi(V \cap M_2)), \\ &= (\{x \in C_\varepsilon^{m_1}(\cdot) | x_{m_1+1} = \dots = x_{n_1} = \cdot\}, \\ &\quad \{y \in C_\varepsilon^{m_2}(\cdot) | x_{m_2+1} = \dots = x_{n_2} = \cdot\}), \\ &= \{x \in C_\varepsilon^{m_1+n_2}(\cdot) | (x_{m+1}, y_{m+1}) = \\ &\quad \dots = (x_{m+2}, y_{m+2}) = (x_n, y_n) = \cdot\}. \end{aligned}$$

۴.۵.۱۱. فرض کنید A و N منیفلدهای C^∞ بوده و $f: A \rightarrow N$ یک نگاشت C^∞ باشد به طوری که $f(A) \subseteq M$ و $M \subset N$ یک زیرمنیفلد منظم N باشد. آنگاه $f: A \rightarrow M$ نیز یک نگاشت C^∞ خواهد بود.^{۱۸}

قضیه ۵.۵.۱۱. اگر H زیرگروه جبری گروه لی G ، زیرمنیفلد منظم G نیز باشد، آنگاه H یک گروه لی با همان ساختار زیرمنیفلدی خواهد بود.

اثبات. از آنجا که H زیرمنیفلد منظم G است، از نکته‌ای که در بالا بیان شد نتیجه می‌شود که $H \times H$ زیرمنیفلدی منظم از $G \times G$ است. به سادگی ثابت می‌شود که نگاشت $i: H \times H \rightarrow G \times G$ یک نگاشت نشاننده- C^∞ ^{۱۹} می‌باشد. از طرف دیگر چون نگاشت $f: G \times G \rightarrow G$ ، $(g_1, g_2) \rightarrow g_1 g_2$ نگاشتی C^∞ است (G یک گروه لی است) پس نگاشت $F = f \circ i: H \times H \rightarrow G$ نگاشتی C^∞ است که با توجه به گروه بودن $H \times H$ برد F داخل H خواهد افتاد یعنی $F: H \times H \rightarrow H$ به طوری که $F(H \times H) \subseteq H$ و H زیرمنیفلدی منظم است. در نتیجه بنابر لم ۴.۵.۱۱ نگاشت

^{۱۸} برای اثبات می‌توان به کتاب [۶۰] صفحه ۲۴۸ مراجعه کرد.

□ C^∞ است پس H یک گروه لی است.

زیرمجموعه H از یک گروه لی G را یک زیرگروه مجرد^{۲۰} گوئیم، اگر (بدون توجه به ساختار دیفرانسیل پذیری) یک زیرگروه G باشد. بنابراین H یک زیرگروه مجرد از G است، اگر به ازای هر $g, h \in H$ داشته باشیم $gh^{-1} \in H$. اگر بعلاوه H دارای ساختار زیرمنیفلدی نیز باشد، آنگاه H یک گروه لی می شود زیرا ضرب $H \times H \rightarrow H$ تحدید ضرب دیفرانسیل پذیر $G \times G \rightarrow G$ است.

قضیه ۶.۵.۱۱. یک زیرگروه مجرد H از یک گروه لی G یک زیرگروه لی است، اگر و تنها اگر H در G بسته باشد.

برای اثبات قضیه ۶.۵.۱۱ می توانید به صفحه ۲۸ از کتاب [۳۸] مراجعه نمایید.

۶.۱۱ همریختی و یکریختی گروههای لی

تعریف ۱.۶.۱۱. اگر G_1 و G_2 گروههای لی باشند، آنگاه نگاشت $f : G_1 \rightarrow G_2$ را یک همریختی یا همومورفیسم^{۲۱} گروههای لی می گوئیم هرگاه یک همریختی گروهی بوده و نگاشتی C^∞ باشد.

تعریف ۲.۶.۱۱. اگر G_1 و G_2 گروههای لی باشند، آنگاه نگاشت $f : G_1 \rightarrow G_2$ را یک یکریختی یا ایزومورفیسم^{۲۲} گروههای لی گوئیم هرگاه یک همریختی گروههای لی بوده و همچنین f یک دیفئومورفیسم باشد.

تعریف بالا معادل با این است که بگوئیم f یک یکریختی گروهی بوده و f و f^{-1} از کلاس C^∞ هستند. در تعریف بالا هرگاه $G_1 = G_2$ باشد، f را خودریختی یا

^{۲۰} abstract subgroup

^{۲۱} homomorphism

^{۲۲} isomorphism

اوتومورفیزم^{۲۳} گروه‌های لی می‌نامیم.

مثال ۳.۶.۱۱. اگر فرض کنیم $G_1 = (\mathbb{R}, +)$ و $G_2 = S^1 \simeq \{e^{\sqrt{-1}it} | t \in \mathbb{R}\}$ باشد، که در آن $e^{\sqrt{-1}it} = \cos \sqrt{-1}it + i \sin \sqrt{-1}it$ ، آنگاه نگاشت $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ بطوری که $\varphi(t) = e^{\sqrt{-1}it}$ به وضوح یک همریختی گروه‌های لی است. اما یکرختی نیست، زیرا یک‌به‌یک نیست.

مثال ۴.۶.۱۱. با تعمیم مثال قبل، به طور کلی اگر $G_1 = \mathbb{R}^n$ و $G_2 = T^n$ باشد، آنگاه نگاشت $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow T^n$ به طوری که

$$\varphi(t_1, \dots, t_n) = (e^{\sqrt{-1}it_1}, \dots, e^{\sqrt{-1}it_n}).$$

یک همریختی گروه‌های لی است اما یکرختی نیست. هسته این همریختی عبارتست از n عامل، $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$.

مثال ۵.۶.۱۱. اگر $G_1 = GL(n, \mathbb{R})$ و $G_2 = GL(1, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^*$ ، آنگاه نگاشت $f: G_1 \rightarrow G_2$ به طوری که $f(A) = \det(A)$ یک همریختی گروه‌های لی است زیرا اولاً واضح است که همریختی گروهی است و ثانیاً f تابع دترمینان، تابعی است حقیقی که مقدار آن چند جمله‌هایی است از درایه‌های ماتریس A از متغیرهای حقیقی، و در نتیجه f نگاشتی C^∞ است. در این جا نیز f یکرختی نیست زیرا یک‌به‌یک نیست.

۷.۱۱ یافتن زیرگروه‌های لی و جبر لی

در اینجا اثبات قضیه‌ای را می‌آوریم که راه آسانی برای یافتن زیرگروه‌های لی از یک گروه لی از آن نتیجه می‌شود. ابتدا چند تعریف و گزاره را ذکر می‌کنیم که در اثبات این قضیه بکار می‌روند.

تعریف ۱.۷.۱۱. فرض کنیم g عضو مفروضی از گروه لی G باشد در این صورت نگاشت $L_g : G \rightarrow G$ که $h \rightarrow gh$ را انتقال چپ G می نامیم.

از تعریف گروه لی نتیجه می شود که L_g نگاشتی C^∞ است. از طرف دیگر چون $g^{-1} \in G$ پس $L_{g^{-1}}$ یا همان $(L_g)^{-1}$ نیز C^∞ است. در نتیجه L_g یک دیفئومورفسم C^∞ از G به G است. به همین صورت دیفئومورفسم انتقال راست را تعریف نموده و آن را با R_g نمایش می دهیم.

قضیه ۲.۷.۱۱. فرض کنیم M و N منیفلدهای C^∞ به ترتیب به ابعاد m و n باشند و $f : M \rightarrow N$ نگاشتی C^∞ با رتبه ثابت k روی m باشد. آنگاه برای هر نقطه $q \in f(M)$ ، مجموعه $f^{-1}(q)$ یک زیرمنیفلد منظم بسته از M با بعد $m - k$ است.

برای اثبات این قضیه می توان به کتاب [۶۹] صفحه ۱۱۸ مراجعه کرد.

قضیه ۳.۷.۱۱. فرض کنیم $f : G_1 \rightarrow G_2$ یک همریختی گروههای لی باشد، آنگاه داریم

۱. رتبه f ثابت است.

۲. هسته f زیرمنیفلد بسته منظم G_1 بوده و در نتیجه هسته f یک زیرگروه لی از G_1 است.

$$3. \dim \ker f = \dim G_1 - \text{rank } f.$$

اثبات. (۱) فرض کنیم $a \in G_1$ عضو دلخواهی از G_1 باشد و $b = f(a)$. آنگاه برای هر $x \in G_1$ داریم:

$$f(x) = f(aa^{-1}x) = f(a)f(a^{-1}x) = bf(a^{-1}x) = L_b \circ f \circ L_{a^{-1}}(x)$$

بنابراین

$$Df(x) = DL_b(f(a^{-1}x)).Df(a^{-1}x).DL_{a^{-1}}(x)$$

اگر x را همان a فرض کنیم داریم

$$Df(a) = DL_b(e_1) \cdot Df(e_1) DL_{a^{-1}}(a)$$

حال چون انتقال چپ دیفئومورفیسم است، بنابراین ماتریسهای G_1 و G_2 نامنفرد هستند در نتیجه خواهیم داشت $\text{rank } Df(a) = \text{rank } Df(e_1)$ یعنی در هر نقطه از G_1 ، رتبه ثابت دارد.

اثبات. (۲) و (۳) قضیه قبل و قسمت (۱) نشان می دهد که $\ker f = f^{-1}(e)$ یک زیرمنیفلد منظم بسته با بعد $\dim G_1 - \text{rank } f$ است و چون می دانیم که $\ker f$ زیرگروه (جبری) از گروه G_1 است، بنابر قضیه ۵.۵.۱۱ یک زیرگروه لی از G است. لذا داریم $\dim \ker f = \dim G_1 - \text{rank } f$. $\square$

به عنوان کاربردی از قضیه بالا به مثال زیر توجه می کنیم.

مثال ۴.۷.۱۱. ثابت کنید $\{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ یک $SL(n, \mathbb{R})$ زیرگروه و زیرمنیفلد منظم از $GL(n, \mathbb{R})$ است. سپس از آن نتیجه بگیرید که $SL(n, \mathbb{R})$ یک زیرگروه لی از $GL(n, \mathbb{R})$ است.

حل: در مثال ۵.۶.۱۱ دیدیم که نگاشت $\det = f : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(1, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^*$ به طوری که $f(X) = \det(X)$ ، یک همریختی گروه های لی است. در اینجا ثابت می کنیم که رتبه $\text{rank } f$ ثابت است. اگر a عضو دلخواهی از $GL(n, \mathbb{R})$ $f(A) = a \in GL(1, \mathbb{R})$ $\mathbb{R}^*$ ، بنابر رابطه ای که در ابتدای قضیه ۳.۷.۱۱ بدست آوردیم برای هر $\forall x \in GL(n, \mathbb{R})$ داریم $f(X) = L_a \circ f \circ L_{A^{-1}}(X)$ بنابراین

$$Df(X) = DL_a(f(A^{-1}X)) \cdot Df(A^{-1}X) \cdot DL_{A^{-1}}(X).$$

با جایگذاری A به جای X داریم $Df(A) = DL_a(f(I)) \cdot Df(I) \cdot DL_{A^{-1}}(A)$ در نتیجه برای هر A رتبه $\text{rank } Df(A) = \text{rank } Df(I)$ ، یعنی رتبه f ثابت است. حال می گوئیم چون $\mathbb{R}^*$ گروهی ضربی است بنابراین عضو همانی آن ۱ است

و در نتیجه هسته f عبارتست از ماتریسهای که دترمینان آنها یک است یا $\ker f = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\} = SL(n, \mathbb{R})$. اما قضیه قبل بیان می کند که $\ker f$ یا همان $SL(n, \mathbb{R})$ یک زیرگروه لی از گروه $GL(n, \mathbb{R})$ می باشد. از طرفی $\dim GL(n, \mathbb{R}) = n^2$ و نیز $\dim GL(1, \mathbb{R}) = 1$ بنابراین $\dim SL(n, \mathbb{R}) = n^2 - 1$. $SL(n, \mathbb{R})$ را گروه خطی خاص^{۲۴} می گوئیم. این گروه را می توان مستقیماً به عنوان زیرمنیفلدهای $GL(n, \mathbb{R})$ مورد مطالعه قرار داد. در این مورد می توانید به بخش روش ساخت زیرمنیفلدها در صفحه ۱۲۱ از کتاب [۲] مراجعه نمایید.

تعریف ۵.۷.۱۱. اگر $X \in \mathcal{X}(G)$ باشد آنگاه آن را چپ پایا^{۲۵} (یا به ترتیب راست پایا) گوئیم، اگر $\forall a \in G$ داشته باشیم $(L_a)_* X = X$ ، یا به ترتیب $((R_a)_* X = X)$.

تعریف ۶.۷.۱۱. مجموعه تمام میدان های برداری چپ پایای G را با عمل جمع معمولی، ضرب اسکالر و گروه لی، یک جبر لی^{۲۶}، $\mathcal{G}$ می نامیم و آن را با $\mathcal{G}$ نمایش می دهیم. جبر لی $\mathcal{G}$ را می توان به عنوان یک فضای برداری در نظر گرفت که با توجه به نگاشت زیر با $T_e(G)$ یکرخت است.

$$X \in \mathcal{G} \rightarrow X_e$$

لذا یک جبر لی یک زیر مجموعه از میدان های برداری روی G است که بعد آن برابر n ، یعنی بعد G است.

^{۲۴}Special Linear group

^{۲۵}left invariant or right invariant

^{۲۶}Lie algebra

۸.۱۱ عمل یک گروه لی روی یک منیفلد

با ریشه یابی عمل گروه روی یک مجموعه به نام آشنای گروه تبدیلات روی یک مجموعه برخورد می کنیم. بعنوان یاد آوری گروه تبدیلات روی مجموعه مفروض X ، گردایه G با اعضای است که هر $x \in X$ را به عنصر $y \in X$ می برد. به وضوح y می تواند خود x باشد و ضمناً عملی روی G تعریف می شود که اعضای G با آن عمل تشکیل یک گروه می دهند. مثلاً برای مجموعه مفروض X با n عنصر؛ گروه انتقال X می تواند گروه تقارنهای روی X متشکل از کلیه جایگشتهای روی X باشد که $n!$ عضو دارد.

برای اینکه این مطلب را بصورت واضحتری بیان کنیم، عملاً کلمه «تبدیلات» را با کلمه «عمل» تعویض می کنیم و از تعریف «عمل یک گروه روی یک مجموعه» که در زیر می آوریم برای بسط این موضوع استفاده می کنیم.

تعریف ۱.۸.۱۱. می گوئیم گروه G روی مجموعه M از سمت چپ عمل می کند، اگر نگاشتی مانند $\theta: G \times M \rightarrow M$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in M$ داشته باشیم

$$(۱) \quad \theta(e, x) = x$$

$$(۲) \quad \theta(g_1, \theta(g_2, x)) = \theta(g_1 g_2, x) \quad \forall g_1, g_2 \in G$$

در اینجا e عضو همانی G است. بعضاً $\theta(g, x)$ را به صورت $\theta_g(x)$ یا gx نیز می نویسیم.

از اینجا همچنین نتیجه می شود که برای هر $g \in G$ داریم $\theta_{g^{-1}} = \theta_g^{-1}$.

تبصره: اگر G یک گروه توپولوژیک باشد، X یک فضای توپولوژیک و θ یک نگاشت پیوسته در نظر گرفته می شود. اگر G یک گروه لی باشد، X یک منیفلد دیفرانسیل پذیر و θ یک نگاشت C^∞ در نظر گرفته می شود.

توضیح: عمل یک گروه روی یک مجموعه، نگاشت های مختلفی را روی آن مجموعه تعریف می کند. به این معنی که اگر $g \in G$ را عضو مفروضی در نظر بگیریم، این عمل توسط نگاشت $\theta : g \times X \rightarrow X$ یا $\theta_g : X \rightarrow X$ نمایش داده می شود. بررسی اینکه $\theta_{g_1} \circ \theta_{g_2} = \theta_{g_1 \cdot g_2}$ و در نتیجه $\theta_g \circ \theta_e = \theta_g = I_X$ آسان است. از این موضوع نتیجه می شود که θ_g معکوس پذیر است. همچنین نتیجه می شود که θ_g نگاشتی دو سوئی است. بنابراین $G = \{\theta_g \mid g \in G\}$ یک ساختار گروهی خواهد داشت و بنا بر ماهیت θ_g ها که نگاشت هایی از X به X هستند، G یک گروه تبدیلات روی مجموعه X است و این توضیحات مقدمه را توجیه می کند.

تعریف ۲.۸.۱۱. فرض کنیم G یک گروه لی، M یک منیفلد C^∞ و θ یک نگاشت C^∞ باشد. در این صورت می گوئیم θ یک عمل C^∞ بوده و گروه نگاشتهای تعریف شده توسط $\Theta_g = \{\theta_g \mid g \in G\}$ را گروه تبدیل لی یا گروه تابع لی^{۲۷} می گوئیم.

قضیه ۳.۸.۱۱. فرض کنیم X یک مجموعه و $C(X)$ گروه تبدیلات روی آن باشد. اگر G روی مجموعه X عمل کند آنگاه نگاشت $f : G \rightarrow C(X)$ باضابطه $g \rightarrow \theta_g$ یک همریختی گروهی است. برعکس هر همریختی گروهی $f : G \rightarrow C(X)$ باضابطه $g \rightarrow f(g)$ یک عمل θ روی X توسط $\theta(g, x) = \theta_g(x)$ تعریف می کند.

اثبات. فرض کنیم f نگاشتی باضابطه $\theta_g : g \rightarrow f(g)$ باشد. آنگاه f یک همریختی است زیرا به ازای هر $g_1, g_2 \in G$ از $f(g) = \theta_g$ نتیجه می شود

$$f(g_1 \cdot g_2) = \theta_{g_1 \cdot g_2} = \theta_{g_1} \circ \theta_{g_2} = f(g_1) \cdot f(g_2)$$

برعکس فرض کنیم $f : G \rightarrow C(X)$ یک همریختی باشد. چون $f(g) \in C(X)$ و $C(X)$ تبدیلات روی X هستند، پس $f(g)$ نیز نگاشتی است از X به X . عمل θ را به این صورت تعریف می کنیم

^{۲۷}Lie transformation group

$\theta(g, x) = \theta_g(x) =$ و یا $(g, x) \rightarrow f(g)(x)$ که $\theta : G \times X \rightarrow X$
 $(f(g))(x)$ از آنجا داریم

$$(۱) \theta(e, x) = f(e)x = 1_{C(X)}(x) = x$$

$$(۲) \theta(g_1, f(g_2)x) = f(g_1)f(g_2)x = \theta(g_1g_2)x = \theta(g_1g_2, x), \forall g_1, g_2 \in G$$

پس در واقع θ یک عمل گروه G روی X خواهد بود. $\square$

اعمال گروهها روی مجموعه ها با توجه به خواص آنها دسته بندی شده و نامهای گوناگونی پیدا می کند. برخی از این تعاریف را در زیر می آوریم. فرض کنیم $\theta : G \times M \rightarrow M$ یک عمل گروه G روی مجموعه M باشد.

تعریف ۴.۸.۱۱. برای نقطه مفروض $x \in M$ ، مجموعه نقاط $G_x = \{gx \mid g \in G\}$ از M راندار^{۲۸} x می گویم.

در حقیقت مدار x مجموعه نقاط بدست آمده در اثر عمل G روی مجموعه $\{x\}$ است.

تعریف ۵.۸.۱۱. عمل G روی M را متعدی^{۲۹} گوئیم، اگر برای هر دو عضو $x, y \in M$ یک $g \in G$ وجود داشته باشد به طوری که $\theta_g(x) = y$.

تعریف ۶.۸.۱۱. $x \in M$ را یک نقطه ثابت عمل G ^{۳۰} گوئیم هرگاه $G_x = x$.

تعریف ۷.۸.۱۱. مجموعه اعضایی از G مانند $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ که $x \in M$ را ثابت نگه می دارند، تشکیل یک زیرگروه از G می دهند که آن را گروه ایزوتروپی^{۳۱} x می گویند.

^{۲۸}orbit of x

^{۲۹}transitive

^{۳۰}fixed point

^{۳۱}isotropy group

تعریف ۸.۸.۱۱. می‌گوییم G به طور مؤثر^{۳۲} روی M عمل می‌کند، اگر از $gx = x$ برای هر $x \in M$ نتیجه بگیریم $g = e$.

می‌گوییم G به طور آزاد^{۳۳} روی M عمل می‌کند، اگر از $gx = x$ برای چند $x \in M$ نتیجه بگیریم $g = e$.

به عبارت دیگر می‌گوییم G به طور آزاد روی M عمل می‌کند اگر تنها دیفئومورفیسمی که دارای نقاط ثابت باشد نگاشت همانی است. در این صورت گاهی می‌گوییم G بدون نقطه ثابت عمل می‌کند.

نکته: G به طور آزاد روی M عمل می‌کند اگر تنها عضو G که نقطه ثابت دارد عضو همانی باشد. وقتی G به طور آزاد روی M عمل می‌کند برای هر $x \in M$ خواهیم داشت، $G_x = \{e\}$. بدیهی است که اگر G به طور آزاد روی M عمل کند، به طور مؤثر نیز عمل خواهد کرد.

مثال ۹.۸.۱۱. فرض کنیم $M = \mathbb{R}^3$ و بگیریم $a = (a_1, a_2, a_3)$ عضو مخالف صفر و ثابت از $\mathbb{R}^3$. همچنین $G = \mathbb{R}$ را به عنوان یک گروه لی فرض می‌کنیم. نگاشت زیر یک عمل از گروه لی $\mathbb{R}$ روی $\mathbb{R}^3$ تعریف می‌کند.

$$\theta : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$(t, x) \mapsto (x_1 + a_1 t, x_2 + a_2 t, x_3 + a_3 t).$$

نشان دهید که این نگاشت از سمت چپ عمل می‌کند. آیا θ متعدی است؟ آیا عمل θ نقطه ثابت دارد؟ آیا عمل θ به طور آزاد عمل می‌کند؟ آیا به طور مؤثر عمل می‌کند؟ گروه ایزوتروپی $x \in \mathbb{R}^3$ را در صورت وجود تعیین نمایید.

^{۳۲}effectively

^{۳۳}freely

واضح است که θ نگاشتی C^∞ است. همچنین داریم

$$(۱) \theta(0, x) = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\begin{aligned} (۲) \theta(t_1, \theta(t_2, x)) &= \theta(t_1, (x_1 + a_1 t_2, x_2 + a_2 t_2, x_3 + a_3 t_2)) \\ &= (x_1 + a_1 t_2 + a_1 t_1, x_2 + a_2 t_2 + a_2 t_1, x_3 + a_3 t_2 + a_3 t_1) \\ &= (x_1 + a_1(t_1 + t_2), x_2 + a_2(t_1 + t_2), x_3 + a_3(t_1 + t_2)) \\ &= \theta(t_1 + t_2, x) \end{aligned}$$

بنا براین می توان گفت گروه لی $(\mathbb{R}, +)$ روی منیفلد C^∞ ، $\mathbb{R}^3$ از سمت چپ عمل می کند. x را به طور دلخواه در $\mathbb{R}^3$ ثابت در نظر می گیریم. آنگاه داریم $\theta(t, x) = (x_1 + a_1 t, x_2 + a_2 t, x_3 + a_3 t)$ باید ثابت کنیم برای هر $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ وجود دارد $t \in \mathbb{R}$ به طوریکه $\theta(t, x) = y$.

اما چنین t وجود ندارد، زیرا اگر فرض کنیم $x = (0, 0, 0)$ و $a = (1, 2, 3)$ آنگاه اگر $y = (1, 1, 1)$ داریم $y = (t, 2t, 3t)$ و این امکان ندارد. اما اگر $a = (a_1, a_2, a_3) \neq 0$ چون $a \neq 0$ آنگاه θ متعدی خواهد بود زیرا می توانیم قرار دهیم $t = \frac{y_i - x_i}{a_i}$.

عمل θ نقطه ثابت ندارد. زیرا از $a \neq 0$ نتیجه می گیریم که وجود دارد $1 \leq i \leq 3$ به طوری که $a_i \neq 0$. به عنوان مثال اگر $a_1 \neq 0$ آنگاه اگر $t_1 = 1$ داریم: $\theta(1, x) = (x_1 + a_1, x_2 + a_2, x_3 + a_3)$ از آنجا که $x + a_1 \neq x$ داریم $\mathbb{R}x \neq x$.

$\mathbb{R}$ روی $\mathbb{R}^3$ به طور آزاد عمل می کند. زیرا اگر فرض کنیم $x \in \mathbb{R}^3$ و $\theta(t, x) = x$ آنگاه

$(x_1 + a_1 t, x_2 + a_2 t, x_3 + a_3 t) = (x_1, x_2, x_3)$ چون $a \neq 0$ آنگاه وجود دارد $1 \leq i \leq 3$ به طوریکه $a_i \neq 0$. به عنوان مثال اگر فرض کنیم $a_1 \neq 0$ آنگاه $x_1 = x_1 + a_1 t$ چون $a_1 \neq 0$ بنابراین $t = 0$ می باشد. لذا $\mathbb{R}$ روی $\mathbb{R}^3$ به طور آزاد عمل می کند. در نتیجه $\mathbb{R}$ روی $\mathbb{R}^3$ به طور مؤثر نیز عمل خواهد کرد. همچنین برای

هر $x \in \mathbb{R}^3$ خواهیم داشت $G_x = \{0\}$. یعنی اگر $x \in \mathbb{R}^3$ ، گروه ایزوتروپی x ، گروه بدیهی خواهد بود.

عمل گروه ایزومتري های $\mathbb{R}^n$

تمرین ۱۰.۸.۱۱. ^{۳۴} یک متریک به صورت زیر روی $\mathbb{R}^n$ در نظر می گیریم.

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i - y^i)^2}$$

آنگاه گروه ایزومتري های $\mathbb{R}^n$ در $\mathbb{R}^n$ که آن را با $E(n)$ نمایش داده و گروه حرکت صلب ^{۳۵} نیز می نامیم، عبارت است از خانواده دیفئومورفیسم های $\mathbb{R}^n$ در $\mathbb{R}^n$ که متریک فوق را پایا نگاه می دارند. به عبارت دیگر دیفئومورفیسم $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ را یک ایزومورفیسم گوئیم اگر $d(Tx, Ty) = d(x, y)$ ثابت می شود که هر ایزومتري را می توان به صورت زیر نوشت.

$$T(x) = Ax + a,$$

که در آن $A \in O(n)$ و $x, a \in \mathbb{R}^n$.

الف. با استفاده از اینکه ثابت می شود که اعضای $E(n)$ در ارتباط دوسویی با $O(n) \times \mathbb{R}^n$ هستند، ثابت کنید $E(n)$ گروه لی است.

ب. اگر نگاشت $\theta: E(n) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ را به صورت زیر تعریف کنیم، نشان دهید θ یک عمل C^∞ از $E(n)$ در $\mathbb{R}^n$ است.

$$\theta((A, a), x) = Ax + a \quad A \in O(n), \quad a, x \in \mathbb{R}^n.$$

^{۳۴} کتاب [۶۰] صفحه ۲۵۹ را ببینید.

تمرین ۱۱.۸.۱۱. نشان دهید که عمل طبیعی $GL(n, r)$ روی $\mathbb{R}^n - \{0\}$ موثر و متعدی است.

تمرین ۱۲.۸.۱۱. فرض کنیم θ یک C^∞ عمل $\mathbb{R}$ ، به عنوان یک گروه لی، روی منیفلد M باشد.

الف. نشان دهید

$$(۱) \quad \theta.(p) = p \quad \forall p \in M$$

$$(۲) \quad \theta_t \circ \theta_s(p) = \theta_{t+s}(p) = \theta_s \circ \theta_t(p) \quad \forall p \in M, \forall s, t \in \mathbb{R}$$

ب. نشان دهید θ_t یک دیفیئومورفیسم است که در شرایط «گروه موضعی ۱-پارامتری» صدق می کند.

ج. نشان دهید عمل θ_t یک میدان برداری روی M تعریف می کند.

قضیه گاوس- بونه

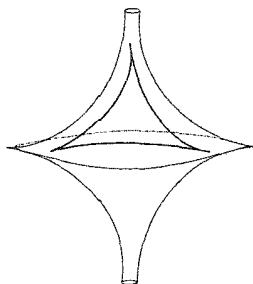
قضیه گاوس- بونه^۱ یکی از عمیق ترین و مهمترین قضایای هندسه دیفرانسیل موضعی و سرتاسری است. اهمیت این قضیه از آنجا ناشی می شود که از یک طرف این قضیه رابطه ای بین یک خاصیت هندسی یک منیفلد به نام انحنا و یک خاصیت پایای توپولوژیکی آن منیفلد به نام مشخصه اولر را برقرار می کند. از طرف دیگر شکل موضعی قضیه گاوس- بونه تعمیمی است از یکی از اساسی ترین قضایای هندسه مسطحه به نام قضیه تالس که بنابر آن جمع زوایای داخلی هر مثلث برابر عدد π است. قضیه تالس روی رویه ها برقرار نیست

^۱Gauss-Bonnet

یعنی ممکن است جمع زوایای داخلی یک مثلث که در روی یک رویه رسم می شود از عدد π بیشتر یا کمتر باشد. به بیان ساده گاوس در سال ۱۸۲۷ نشان داد که در یک مثلث T در روی یک رویه که اضلاع آن از ژئودزیک های آن رویه تشکیل شده اند تفاضل مجموع زوایای a_1, a_2, a_3 از عدد π برابر انتگرال انحنا ی گاوسی رویه می شود. به عبارت دیگر

$$\sum_{i=1}^3 a_i - \pi = \int \int_T K d\sigma \quad (۱.۱۲)$$

چنانچه رویه مورد نظر مسطح باشد آنگاه $K = 0$ بوده و مقدار انتگرال فوق صفر می شود، که همان قضیه تالس در هندسه مسطحه است. چنانچه رویه مورد نظر کره واحد باشد آنگاه انحنا ی آن برابر عدد ثابت ۱ بوده و مقدار $\int \int_T K d\sigma = \int \int_T d\sigma > 0$ برابر مساحت مثلث T روی کره است. از آنجا مجموع زوایای یک مثلث ژئودزیکی روی یک کره بیش از عدد π است. به همین صورت در روی یک رویه هذلولوی با انحنا ی ثابت منفی مجموع زوایای هر مثلث ژئودزیکی کمتر از عدد π است. جالب است که بدانیم حتی ممکن است که مجموع زوایای داخلی یک مثلث که در روی یک رویه رسم شده است برابر عدد صفر شود. در حقیقت اگر در روی یک رویه هذلولوی به عنوان مثال یک شبه کره ^{2} انحنا ی گاوسی ثابت و برابر -1 و $K = -1$ مساحت مثلث برابر عدد π باشد، یعنی $\int \int_T d\sigma = \pi$ آنگاه از رابطه گاوس نتیجه می شود که مجموع زوایای داخلی این مثلث برابر عدد صفر می شود. شکل ۱.۱۲ در صفحه ۳۱۹ را ببینید. این موضوع را می توان به طور شهودی و با استفاده از تعریف زاویه راس مثلث ۱.۶.۵ در صفحه ۱۲۹ نیز مشا هده نمود. تعمیم قضیه گاوس به مثلث های روی یک رویه که اضلاع آن منحنی های ساده به جای ژئودزیک ها هستند توسط بنه انجام گرفت. وی ثابت کرد که رابطه ۱.۱۲ برای مثلث هایی در روی یک رویه، وقتی که اضلاع آن منحنی های دلخواه باشند نیز برقرار است. از این رو این قضیه به نام فرمول گاوس-بونه شهرت یافت. در این فصل به اثبات فرمول و قضیه گاوس-بونه برای رویه ها



شکل ۱.۱۲: مجموع زوایای داخلی این مثلث در روی یک شبه کره برابر عدد صفر است.

می پردازیم. اما از آنجا که این قضیه کاربرد زیادی در درک مفاهیم هندسی و ارتباط آن با توپولوژی دارد و از طرف دیگر تعمیم آن برای منیفلدهای فینسلری یک مسئله باز بسیار جالب و جنجالی هندسه است، قبل از به پایان رساندن این فصل به بیان تاریخچه و روند اثبات آن در ابعاد بالاتر می پردازیم.

۱.۱۲ مشخصه اولر در هندسه و توپولوژی

۱.۱.۱۲ پایاهای توپولوژیک

اساساً تعریف توپولوژی برای رده بندی کردن مجموعه ها بیان گردیده است. فرض کنیم که اشکال مختلفی داریم و میخواهیم ببینیم کدام یک از آن ها با هم معادل و کدام یک متفاوت هستند. از نظر توپولوژیکی دو شکل را معادل گوئیم اگر بتوان با یک تغییر شکل پیوسته آنها را به یکدیگر تبدیل نمود. به عبارتی دیگر اگر یک ورقه لاستیکی داشته باشیم و بدون آنکه آن را پاره کنیم یا به هم بچسبانیم، این ورقه را تغییر شکل داده اشکال مختلفی بسازیم آنگاه همه آنها از نظر توپولوژیکی معادل هستند. یا به عبارت دقیق تر این اشکال با یکدیگر

همئومورف هستند. لذا پایا های توپولوژیکی^۳ آن مقادیری هستند که تحت تأثیر همئورفیزم ها تغییر نمی کنند. یک پایای توپولوژیکی می تواند یک عدد باشد، مانند تعداد مولفه های همبندی یک فضا، یا یک ساختار جبری باشد که روی آن فضا گذاشته شده است. یا بالاخره یک پایای توپولوژیکی می تواند تعاریفی در توپولوژی، مانند همبندی، فشردگی و غیره باشد. نتیجه مهمی که از پایا های توپولوژیکی حاصل می شود آن است که اگر دو فضای توپولوژیکی، پایاهای توپولوژیکی متفاوتی داشته باشند نمی توانند با یکدیگر همئومورف باشند. به عنوان مثال دایره نمی تواند با محور اعداد حقیقی همئومورف باشد. زیرا دایره در صفحه $\mathbb{R}^2$ فشرده است در حالی که محور $\mathbb{R}$ فشرده نیست. دایره حتی با فاصله بسته $[+1, -1]$ نیز نمیتواند همئومورف باشد، اگر چه هر دو فشرده هستند. زیرا فاصله بسته $[+1, -1]$ همبند ساده است در حالی که S^1 همبند ساده نیست. جالب است که یادآوری کنیم که فاصله باز $]-1, +1[$ با محور $\mathbb{R}$ همئومورف است. زیرا هر فاصله باز را می توان مانند یک قطعه کش امتداد داد. پایای جالب دیگری که جنبه عددی دارد، مشخصه اولر^۴ است که در اینجا به شرح آن می پردازیم.

۲.۱.۱۲ مشخصه اولر در $\mathbb{R}^3$

مشخصه اولر یکی از جالب ترین پایاهای توپولوژیک است که برای رده بندی کردن فضاهای توپولوژیک از آن استفاده می شود. برای معرفی این مشخصه یک چندوجهی در $\mathbb{R}^3$ در نظر می گیریم. منظور ما از یک چند وجهی یک شی هندسی است که به وسیله چند وجه^۵ محصور شده است. شکل ۳.۴ در صفحه ۱۰۹ یک چند وجهی محدب است. مرز هر دو وجه را یک یال یا لبه^۶ می نامیم. مرز هر دو یال یکدیگر را در نقطه ای به نام راس^۷ قطع

^۳topologic invariants

^۴Euler characteristic

^۵face

^۶edge

می کنند. برای چندضلعی های مسطح مرز چندضلعی را خط و مرز خطوط را نقطه می نامیم. در یک چندوجهی، وجه ها، یال ها و رئوس را سادک^۸ می نامیم. توجه کنید که مرز دو سادک یا تهی است یا سادک دیگری است. به عنوان مثال مرز دو وجه یک یال است که خود نیز یک سادک است. تعریف رسمی سادک در ابعاد بالاتر را در بخش بعد می آوریم.

تعریف ۱.۱.۱۲. فرض کنیم که K یک زیر مجموعه $\mathbb{R}^3$ باشد که با چند وجهی N همئومورف است. مشخصه اولر^۹ مجموعه K را با $\chi(K)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\chi(K) = N_f - N_e + N_v. \quad (2.12)$$

که در آن N_f ، N_e و N_v به ترتیب تعداد وجه ها، یال ها و رئوس چند وجهی N هستند.

مثال ۲.۱.۱۲. مشخصه اولر یک مجموعه تک عضوی برابر عدد $1 = 1 - 0 + 0 = \chi$ است. زیرا بنا برتعریف $N_f = N_e = 0$ و $N_v = 1$.

می دانیم که دایره S^1 با مثلث (توخالی) همئومورف است لذا مشخصه اولر S^1 برابر است با $\chi(S^1) = 0 - 3 + 3 = 0$.

اولین سئوالی که در ذهن خواننده ایجاد می شود آن است که آیا این کمیت خوشتعریف است؟ به این معنی که آیا $\chi(K)$ بستگی به انتخاب چند وجهی N دارد یا خیر. ابتدا با یک مثال این موضوع را بررسی می کنیم. کره S^2 می تواند با یک مکعب همئومورف باشد. لذا مشخصه اولر آن برابر است با $2 = 8 - 12 + 6 = \chi(S^2)$. از طرف دیگر S^2 می تواند با یک هرم نیز همئومورف باشد. لذا در این صورت نیز مشخصه اولر آن برابر است با $2 = 4 - 6 + 4 = \chi(S^2)$. اما خوشتعریفی مشخصه اولر توسط پوانکاره به اثبات رسیده است.

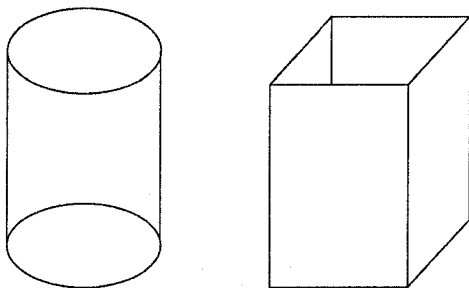
^vvertex

^s simplex

^eEuler characteristic

قضیه ۳.۱.۱۲. قضیه پوانکاره. مشخصه اولر یک مجموعه بستگی به انتخاب چندوجهی همومورف با آن ندارد.

مثال ۴.۱.۱۲. مشخصه اولر یک مستطیل (توپر) برابر عدد $\chi = 1 - 4 + 4 = 1$ است. در استوانه مشخصه اولر χ برابر صفر است. زیرا استوانه با یک چهاروجهی که از چهار مستطیل تشکیل شده است، همومورف است. $\chi = 4 - 12 + 8 = 0$. شکل ۲.۱۲ ببینید.

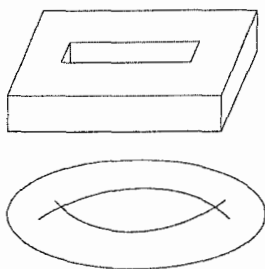


شکل ۲.۱۲: استوانه با یک چهاروجهی که از چهار مستطیل تشکیل شده است، همومورف است.

مثال ۵.۱.۱۲. در چنبره T^2 مشخصه اولر $\chi(T^2)$ برابر صفر است. زیرا T^2 با یک 16 وجهی همومورف است. شکل ۳.۱۲ ببینید. $\chi(T^2) = 16 - 32 + 16 = 0$.

از قضیه پوانکاره نتیجه می شود که اگر دو مجموعه با یکدیگر همومورف باشند مشخصه اولر آنها با هم برابر است. عکس نقیض این قضیه که اصلی ترین کاربرد مشخصه اولر است کاربردهای فراوانی در تشخیص خواص هندسی و توپولوژیکی مجموعه ها دارد.

قضیه ۶.۱.۱۲. اگر دو مجموعه دارای مشخصه اولر متفاوت باشند، نمی توانند با یکدیگر همومورف باشند.



شکل ۳.۱۲: چنبره با یک ۱۶ وجهی همئومورف است و در نتیجه مشخصه اولر یکسان دارند.

مثال ۷.۱.۱۲. خط با دایره S^1 همئومورف نیست. زیرا مشخصه اولر خط برابر عدد $\chi = ۱ - ۱ + ۰ = ۰$ است. در حالی که چون دایره با مثلث (توخالی) همئومورف است، مشخصه اولر S^1 برابر است با $\chi(S^1) = ۰ - ۳ + ۳ = ۰$. همچنین کره S^2 با چنبره T^2 همئومورف نیست.

باید توجه داشت که تساوی عدد اولر در دو مجموعه، همئومورف بودن آن دو مجموعه را نتیجه نمی دهد.

مثال ۸.۱.۱۲. خط با نقطه همئومورف نیست. اگر چه مشخصه اولر برابر دارند. در حقیقت مشخصه اولر نقطه برابر $\chi(.) = ۰ - ۰ + ۱ = ۱$ است، در حالی که مشخصه اولر خط برابر $\chi = ۰ - ۱ + ۲ = ۱$ است.

برای محاسبه مشخصه اولر می توان از قضیه گاوس-بونه نیز استفاده کرد که در این فصل به اثبات آن می پردازیم.

۳.۱.۱۲ مشخصه اولر در ابعاد بالا

برای تعریف مشخصه اولر در ابعاد بالاتر ابتدا یک n -سادک^{۱۰} استاندارد را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Delta_n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 \leq x^i \leq 1, \sum_{i=1}^{n+1} x^i = 1\}$$

اگر در مجموعه فوق، $n - k$ تا از مؤلفه‌ها را مساوی صفر قرار دهیم زیرمجموعه‌ای از n -سادک Δ_n به دست می‌آید که با k -سادک Δ_k هم‌تومورف بوده و یک k -وجه آن n -سادک Δ_n نامیده می‌شود. حال اگر $\Delta \subset M$ تصویر دیفئومورف یک m -سادک Δ_m باشد هر k -وجه Δ_m را یک k -وجه Δ می‌نامیم. اگر M یک منیفلد n -بعدی فشرده باشد مجموعه متناهی $\{\sigma_i^n\}$ را یک مثلث بندی^{۱۱} برای M می‌نامیم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

(۱) هر σ_i^n تصویر دیفئومورف یک Δ_n باشد.

(۲) $\sigma_i^n \cap \sigma_j^n$ یا تهی باشد یا یک k -وجه از هر دوی σ_i^n و σ_j^n .

ثابت می‌شود برای هر منیفلد C^∞ فشرده همواره یک مثلث بندی وجود دارد. با این فرض که یک مثلث بندی $\{\sigma_i^n\}$ برای M داده شده باشد هر σ_i^n را یک n -سادک مثلث بندی و هر k -وجه از هر σ_i^n را یک k -سادک مثلث بندی می‌نامیم و فرض می‌کنیم α_k معرف تعداد k -سادک‌ها باشد، در این صورت مشخصه اولر را با χ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\chi(M) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \dots + (-1)^n \alpha_n.$$

تمرین ۹.۱.۱۲. به روش مثلث بندی یک ناحیه، مشخصه اولر را برای مستطیل، کره و چنبره حساب کنید.

^{۱۰} n -simplex

^{۱۱} triangulation

برای اطلاعات بیشتر در مورد تعریف مشخصه اولر در ابعاد بالاتر می توانید به مراجع [۵۶] صفحه ۱۶۷، [۷۲] جلد اول و [۶۳] صفحه ۶۶ مراجعه کنید.

۲.۱۲ انحناى ژئودزیک و مختصات شبه ژئودزیک

برای آنکه بتوانیم قضیه گاوس-بونه را بیان و اثبات کنیم احتیاج به مفاهیمی داریم که در این بخش و بخش بعد به آن می پردازیم.

تعریف ۱.۲.۱۲. اگر $\gamma: I \rightarrow M$ یک منحنی روی رویه M باشد می توان بردار انحنا را به دو مؤلفه تجزیه کرد، یکی مؤلفه مماس بر رویه و دیگری مؤلفه قائم بر رویه. مؤلفه مماسی بردار انحنا را بردار انحناى ژئودزیک و اندازه آن را انحناى ژئودزیک نامیده با κ_g نمایش می دهیم.

انحناى ژئودزیک را می توان^{۱۲} از رابطه $\kappa_g = \left| \frac{D}{dt} \dot{\gamma} \right|$ به دست آورد.

مختصات شبه ژئودزیکی روی یک رویه: فرض کنیم γ یک ژئودزیک روی رویه M باشد. یک کمان بسته از γ را در نظر می گیریم که خودش را قطع نکند. روی γ یک پارامتری سازی به نام $\gamma(t)$ بر حسب طول قوس $a \leq t \leq b$ معرفی می کنیم. از هر نقطه $\gamma(t_0)$ روی $\gamma(t)$ ژئودزیک $\sigma(t_0, s)$ را عمود بر $\gamma(t)$ عبور می دهیم. پارامتر s در ژئودزیک $\sigma(t_0, s)$ پارامتر طول قوسی فرض شده است که از نقطه $\gamma(t_0)$ شروع می شود. در حقیقت $\sigma(t, s)$ تابعی است از $M \rightarrow \mathbb{R}^2$ که در صفحه ۱۳۵ آن را یک رویه پارامتری نامیدیم. می توان $\sigma(t, s)$ را به عنوان خانواده ای از دو دسته ژئودزیکهای عمود بر هم در نظر گرفت که هر دسته از ثابت فرض کردن یکی از پارامترهای s و t پدید می آید. حال پارامتر s را به اندازه کافی کوچک، طوری اختیار می کنیم که این ژئودزیکهای عمود بر هم یکدیگر را به جز در یک نقطه شروع قطع نکنند. گزاره بعد مجوز این کار را به ما می دهد.

^{۱۲}قضیه ۳.۴.۱ در کتاب [۷۵] صفحه ۱۵۹

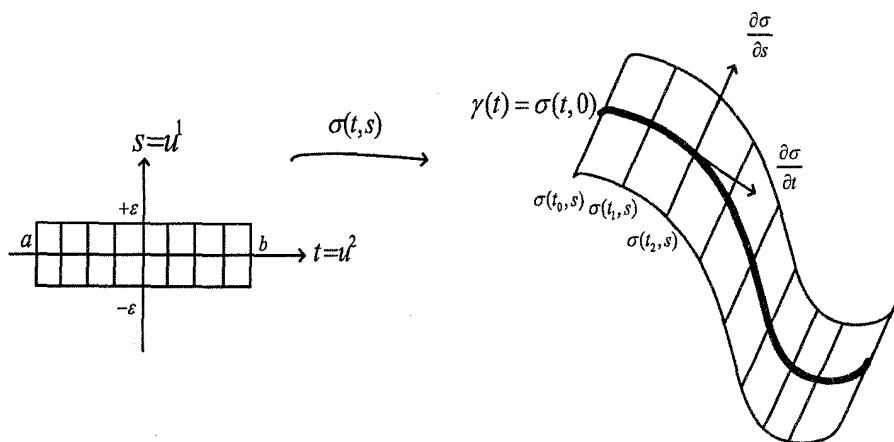
گزاره ۲.۲.۱۲. عدد مثبتی مانند $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $|s| < \delta$ هیچیک از ژئودزیکهای $\sigma(t, s)$ یکدیگر را به جز در نقطه شروع قطع نکنند.

اثبات. کافی است نشان دهیم که توسیع دو ژئودزیک از ژئودزیکهای عمود بر هم $\sigma(t, s)$ در یک همسایگی به اندازه کافی کوچک به جز در یک نقطه یکدیگر را قطع نمی کنند. برای اثبات این موضوع از خاصیت کامل بودن ژئودزیکی استفاده می کنیم. فرض کنیم دو ژئودزیک $\gamma(t)$ و $\sigma(t, s)$ که در نقطه $\sigma(t_0, s_1)$ بر یکدیگر عمودند در نقطه دیگری نیز مانند $\sigma(t_0, s_2)$ یکدیگر را قطع کنند. بنا بر خاصیت کامل بودن ژئودزیکی، که در هر منیفلد کامل توپولوژیکی برقرار است، می توان در اطراف این دو نقطه همسایگی هایی به اندازه کافی کوچک طوری اختیار کرد که یکدیگر را قطع نکنند. در نتیجه قطعه ژئودزیکهایی که در این دو همسایگی قرار دارند، یکدیگر را قطع نمی کنند. لذا کافی است که شعاع همسایگی $\delta > 0$ به اندازه کافی کوچک اختیار شود. بنا براین به ازای هر طول قوس $|s| < \delta$ هیچیک از ژئودزیکهای $\sigma(t, s)$ یکدیگر را به جز در نقطه شروع قطع نمی کنند. $\square$

حال ناحیه ای را روی رویه M در نظر می گیریم که از نقاط $\sigma(t, s)$ ، به ازای $a \leq t \leq b$ ، تشکیل شده است. پارامتر s را طوری اختیار می کنیم که این ژئودزیکهای عمود بر هم یکدیگر را به جز در یک نقطه شروع قطع نکنند. شکل ۴.۱۲ در صفحه ۳۲۷ را ببینید.

چون در این ناحیه هر نقطه به شکل $\sigma(t, s)$ ، به ازای یک t و s داده شده است و این دو پارامتر در دو راستای عمود برهم قرار دارند، می توان نشان داد که بردارهای مماس در راستای آنها مستقل خطی اند. پس می توان روی این ناحیه مختصات $(u^1(t), u^2(t))$ را با فرض $u^1 = s$ و $u^2 = t$ در نظر گرفت. مختصات حاصل را مختصات شبه ژئودزیکی می نامند.

ابتدا ضرایب متریک ریمان و علائم کریستوفل در دستگاه مختصات شبه ژئودزیکی را محاسبه می نماییم.



شکل ۴.۱۲: در مختصات شبه ژئودزیک با ثابت فرض کردن پارامترها ژئودزیک های عمود برهم در روی رویه پدیدار می شوند.

گزاره ۳.۲.۱۲. فرض کنیم $r(u^1, u^2)$ معادله پارامتری رویه M باشد. آنگاه در دستگاه مختصات شبه ژئودزیکی ضرایب و تانسور متریک ریمان (القایی از IR^3) به صورت زیر نوشته می شوند.

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = f^2 \quad (3.12)$$

$$ds^2 = (du^1)^2 + f^2(u^1, u^2)(du^2)^2 \quad (4.12)$$

که در آن $f(u^1, u^2)$ یک تابع حقیقی روی رویه است.

اثبات. بر اساس روش ساخت مختصات شبه ژئودزیکی، مشتقات جزیی $r_i = \frac{\partial r}{\partial u^i}$ هم عمودند. لذا داریم $g_{12}(u^1, u^2) = \langle r_1, r_2 \rangle = 0$. از طرف دیگر چون $s = u^1$ پارامتر طول قوس منحنی $r(u^1, c)$ است که در آن متغیر دوم برابر عدد ثابت c است، بردار مماس آن یکه است. لذا داریم $g_{11}(u^1, u^2) = \langle r_1, r_1 \rangle = 1$. با استفاده از این روابط می توانیم در مختصات شبه ژئودزیکی تانسور متریک ریمان را به صورت رابطه ۴.۱۲

بنویسیم.

گزاره ۴.۲.۱۲. فرض کنیم $r(u^1, u^2)$ معادله پارامتری رویه M باشد. آنگاه در دستگاه مختصات شبه ژئودزیکی علایم کریستوفل به صورت زیر نوشته می شوند.

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0, & \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{22,1} = -f f_{u^1}, \\ \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{f_{u^1}}{f}, & \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{f^2} \Gamma_{22,2} = \frac{f_{u^2}}{f}. \end{cases} \quad (5.12)$$

اثبات. به عنوان تمرین واگذار می شود.

تمرین ۵.۲.۱۲. با استفاده مستقیم از تعریف علایم کریستوفل گزاره ۴.۲.۱۲ را ثابت کنید.

گزاره ۶.۲.۱۲. فرض کنیم $r(u^1, u^2)$ معادله پارامتری رویه M باشد. اگر در روی M یک دستگاه مختصات شبه ژئودزیکی موجود باشد آنگاه معادله دیفرانسیل زیر را داریم.

$$\frac{\partial^2 f}{(\partial u^1)^2} + K(u^1, u^2) f(u^1, u^2) = 0. \quad (6.12)$$

که در آن $f(u^1, u^2) = \sqrt{g_{22}}$ و $K(u^1, u^2)$ انحنا ی گاوسی رویه است.

تمرین ۷.۲.۱۲. گزاره ۶.۲.۱۲ را ثابت کنید. راهنمایی. کافی است K انحنا ی گاوسی رویه را از فرمول مربوطه حساب و ضرایب متریک ریمان در دستگاه مختصات شبه ژئودزیکی را جایگزین کنید. چنانچه در حل مسئله دچار مشکل شدید، می توانید فصل آخر را ببینید.

گزاره ۸.۲.۱۲. فرض کنیم $\gamma(t) = (u^1(t), u^2(t))$ یک منحنی روی رویه M با پارامتر طول قوس t باشد. آنگاه در مختصات شبه ژئودزیکی روابط زیر برقرارند.

$$\left(\frac{du^1}{dt}\right)^2 + f\left(\frac{du^2}{dt}\right)^2 = 1, \quad (7.12)$$

$$\kappa_g = \sqrt{f} |\mu^1 \frac{du^2}{dt} - \mu^2 \frac{du^1}{dt}|. \quad (8.12)$$

که در آن κ_g انحناى ژئودزیک، $f(u^1, u^2) = \sqrt{g_{22}}$ و مؤلفه‌های بردار شتاب $\frac{D}{dt}\dot{\gamma}$ را با μ^1 و μ^2 نمایش داده ایم.

اثبات. چون t پارامتر طول قوس منحنی است $\gamma(t)$ داریم

$$\begin{cases} 1 = |\gamma'(t)| = g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}, \\ \bullet = \langle \gamma'(t), \frac{D}{dt}\dot{\gamma}(t) \rangle = g_{ij} \frac{du^i}{dt} \mu^j \end{cases}$$

لذا با جایگذاری مقادیر ضرایب متریک ریمان در دستگاه مختصات شبه ژئودزیکى رابطه اول حکم به دست می آید.

$$\begin{cases} 1 = \left(\frac{du^1}{dt}\right)^2 + f^2\left(\frac{du^2}{dt}\right)^2, \\ \bullet = \frac{du^1}{dt} \mu^1 + f^2 \frac{du^1}{dt} \mu^1 \end{cases} \quad (9.12)$$

می دانیم انحناى ژئودزیک را می توان از رابطه $\kappa_g = \left|\frac{D}{dt}\dot{\gamma}\right|$ به دست آورد. با استفاده از خاصیت

$$\kappa_g^2 = \left|\frac{D}{dt}\dot{\gamma}\right|^2 = (\mu^1)^2 + f(\mu^2)^2$$

و از روابط ۹.۱۲ می توانیم رابطه ۸.۱۲ را محاسبه کنیم. □

تمرین ۹.۲.۱۲. رابطه ۸.۱۲ در گزاره فوق را محاسبه کنید.

راهنمایی. از اتحاد $|a - b|^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ استفاده نمایید.

تمرین ۱۰.۲.۱۲. نشان دهید با قرار دادن مقادیر μ^1 و μ^2 در رابطه (۸.۱۲) رابطه زیر به دست می آید:

$$\kappa_g = \left| f \left(\frac{d^2 u^1}{dt^2} \frac{du^2}{dt} - \frac{d^2 u^2}{dt^2} \frac{du^1}{dt} \right) - f_{u^1} \left(\left(\frac{du^1}{dt} \right)^2 + 1 \right) \frac{du^2}{dt} - f_{u^2} \left(\left(\frac{du^2}{dt} \right)^2 + 1 \right) \frac{du^1}{dt} \right| \quad (10.12)$$

راهنمایی. از فرمول مشتق گیری همگرد در طول γ استفاده، مقادیر μ^1 و μ^2 را از رابطه زیر محاسبه نموده در رابطه (۸.۱۲) جایگزین کنید.

$$\mu^i = \frac{D}{dt} \left(\frac{du^i}{dt} \right) = \frac{d^2 u^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{du^j}{dt} \frac{du^k}{dt}$$

از رابطه ۵.۱۲ نیز استفاده نمایید.

اکنون به انحنای ژئودزیک κ_g یک علامت به شرح زیر وابسته می کنیم:

فرض کنیم W یک ناحیه روی رویه کامل M باشد که با یک دیسک در $\mathbb{R}^2$ همئومورف بوده، و به طور کامل در یک همسایگی مختصاتی U با مختصات (u^1, u^2) قرار می گیرد. در هر نقطه از W یک پایه $r_1 = r_{u^1}, r_2 = r_{u^2}$ وابسته به مختصات (u^1, u^2) برای فضای مماس در نظر می گیریم. فرض می کنیم مرز W یک منحنی منتظم γ از کلاس C^2 است. یک میدان برداری نرمال $V(t) = \frac{D}{dt} \dot{\gamma}$ در طول خم γ در نظر می گیریم که به سمت داخل اشاره می کند و روی γ پارامتری سازی معرفی می کنیم که $\{V(t), \dot{\gamma}(t)\}$ یک پایه معادل با $\{r_1, r_2\}$ باشد. به عبارت دیگر فضای تولید شده توسط این دو پایه یکسان باشد. اگر μ^1 و μ^2 مؤلفه های $\frac{D}{dt} \dot{\gamma}$ در پایه $\{r_1, r_2\}$ و $\dot{\gamma}^1$ و $\dot{\gamma}^2$ مؤلفه های $\dot{\gamma}(t)$ در همین پایه باشند تعریف می کنیم:

$$\text{sign } \kappa_g = \text{sign}(\mu^1 \dot{\gamma}^2 - \mu^2 \dot{\gamma}^1) \quad (11.12)$$

تمرین ۱۱.۲.۱۲. فرض کنیم $r(u^1, u^2)$ معادله پارامتری رویه M و

$$\gamma(t) = (u^1(t), u^2(t))$$

یک منحنی روی M با پارامتر طول قوس t باشد. ثابت کنید که اگر $r_1 = r_u$ و $r_2 = r_v$.

آنگاه

$$(1) \quad \{\dot{\gamma}(t), \frac{D}{dt}\dot{\gamma}\} \text{ یک پایه معادل با } \{r_1, r_2\} \text{ است.}$$

(2) γ در جهت مثبت پارامتری شده است.

راهنمایی. کافی است اولاً نشان دهیم که فضای تولید شده توسط این دو پایه معادلند یعنی فضای مماس بر رویه در یک نقطه را تولید می کنند. ثانیاً علامت ضرب خارجی آنها نیز بر یکدیگر منطبق است. در غیر این صورت یکی از مولفه ها را در یک علامت منفی ضرب می کنیم.

پس اگر منحنی γ در جهت مثبت پارامتری شده باشد، با قرار دادن $C(t) = -\gamma(t)$ و با توجه به هم ارز بودن عبارات فوق نتیجه می شود $\{V(t), \dot{C}(t)\}$ یک پایه معادل با $\{r_1, r_2\}$ است و رابطه (۱۱.۱۲) برای $C(t)$ معتبر است و برای $\gamma(t)$ به شکل زیر در می آید:

$$\text{sign } \kappa_g = -\text{sign}(\mu^1 \dot{\gamma}^2 - \mu^2 \dot{\gamma}^1)$$

۳.۱۲ قضایای گاوس-بونه

اکنون می توانیم با استفاده از تعاریف فوق اشکال مختلف قضیه گاوس-بونه را بیان و اثبات نماییم.

قضیه ۱.۳.۱۲. فرمول گاوس- بونه فرض می کنیم W یک ناحیه روی رویه کامل M (یا منیفلد ریمانی دو بعدی (M, g)) باشد که با یک دیسک در R^2 همئومورف است و به طور کامل در یک همسایگی مختصاتی U با مختصات (u^1, u^2) قرار می گیرد. اگر مرز W یک منحنی قطعه ای هموار با رئوس $A_1, \dots, A_n$ باشد که به ترتیب با منحنی های منظم $C_1, \dots, C_n$ از کلاس C^2 به هم وصل شده اند و زاویه داخلی حاصل در هر رأس

A_i ($i = 1, \dots, n$) را با α_i نشان دهیم داریم:

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} \kappa_g dt + \sum_{i=1}^n (\pi - \alpha_i) + \int \int_W K dS = 2\pi, \quad (12.12)$$

که در آن t پارامتر طول قوس، dS عنصر یا جزء سطح روی رویه ($dS = \sqrt{\det g} du^1 du^2$) و M و K انحنای گاوسی رویه است.

فرمول گاوس-بونه را شکل موضعی قضیه گاوس-بونه نیز می نامند و آن را به صورت زیر نیز می نویسند.

قضیه ۲.۳.۱۲. گاوس-بونه (موضعی) فرض کنید D یک ناحیه همبند ساده با مرز ∂D روی رویه S در $\mathbb{R}^3$ باشد. همچنین فرض کنید ∂D از تعدادی متناهی منحنی هموار تشکیل شده باشد. در این صورت رابطه زیر برقرار است

$$\int_{\partial D} \kappa_g dt + \sum_{i=1}^n (\pi - \alpha_i) + \int_D K dA = 2\pi$$

که در آن κ_g انحنای ژئودزیک ∂D ، α_i ها زوایای داخلی حاصل در رئوس منحنی ∂D ، K انحنای گاوسی S و ۲- فرم dA جزء سطح رویه S است.

قضیه ۳.۳.۱۲. گاوس-بونه (سرتاسری) فرض کنیم که S یک منیفلد ۲-بعدی فشرده و جهت پذیر همراه با یک متریک ریمانی باشد. آنگاه

$$\int_S K dA = 2\pi \chi(S)$$

که در آن $\chi(S)$ مشخصه اولر S است.

۴.۱۲ اثبات فرمول گاوس-بونه

قبل از اثبات فرمول گاوس-بونه، مقدمات مورد نیاز را به شرح زیر یادآوری می کنیم. فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی دوبعدی جهت پذیر و Ω یک ناحیه روی M با مرز

γ باشد که در آن $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ یک منحنی قطعه‌ای هموار و دارای سرعت یکه است. همچنین فرض می‌کنیم Ω به طور کامل در دامنه یک کارت (x, U) با مختصات (x, y) قرار گیرد. اگر $a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$ افزایشی از $[a, b]$ باشد به طوری که γ روی $[a_{i-1}, a_i]$ منتظم باشد در $t = a_i$ منحنی γ دارای بردارهای مماس چپ و راست است که آنها را به ترتیب با $\dot{\gamma}(a_i^-)$ و $\dot{\gamma}(a_i^+)$ نشان می‌دهیم. در هر رأس $\gamma(a_i)$ زاویه خارجی را به صورت زاویه جهت دار از $\dot{\gamma}(a_i^-)$ به $\dot{\gamma}(a_i^+)$ تعریف می‌کنیم و با ε_i نشان می‌دهیم. در اینجا $\varepsilon_i \in [-\pi, \pi]$ با توجه به ضرب داخلی القاشده توسط g و جهت ارائه شده روی M انتخاب می‌شود. به عبارت دیگر ε_i در رابطه $\cos(\varepsilon_i) = \langle \dot{\gamma}(a_i^-), \dot{\gamma}(a_i^+) \rangle$ صدق می‌کند. حال زاویه مماس را به عنوان نگاشت $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

روی بازه‌های $[a, a_1]$ و (a_{i-1}, a_i) ، به ازای $2 \leq i \leq k$ ، $\theta(t)$ را به صورت زاویه بین $\frac{\partial}{\partial x}$ و $\dot{\gamma}$ (با توجه به ضرب داخلی القاشده توسط g) تعریف می‌کنیم. $\theta(a)$ در بازه $(-\pi, \pi]$ انتخاب می‌شود)

در رئوس $\gamma(a_i)$ ($1 \leq i \leq k$) قرار می‌دهیم:

$$\theta(a_i) = \lim_{t \rightarrow a_i} \theta(t) + \varepsilon_i.$$

حال زاویه دوران را توسط رابطه $Rot(\gamma) = \theta(b) - \theta(a)$ تعریف می‌کنیم.

γ توسط کارت (x, U) به یک منحنی بسته در صفحه مانند Γ تصویر می‌شود.

تمرین ۱۴.۱۲. ثابت کنید که اگر γ در جهت مثبت (جهتی که x^{-1} روی آن القا می‌کند) با این فرض که Γ در جهت پادساعتگرد پیموده شود (پارامتری شده باشد زاویه دوران برابر 2π است).

راهنمایی. کافی است دقت کنیم که Γ منحنی تصویر منحنی γ در صفحه قرار داشته و بسته است. لذا در تعریف زاویه داوران نقاط ابتدا و انتها بر یکدیگر منطبق شده و با توجه به جهت حرکت روی منحنی این زاویه برابر 2π و یا -2π است.

با به کار بردن فرآیند متعامد سازی گرام-اشمیت روی پایه $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}$ یک پایه متعامد $\{E_1, E_2\}$ برای $T_p M$ به دست می آید به طوری که E_1 مضربی از $\frac{\partial}{\partial x}$ است. اگر N میدان برداری یکه‌ای در طول منحنی γ باشد که در هر نقطه بر آن عمود است و به سمت داخل اشاره می کند داریم:

$$\dot{\gamma}(t) = \cos \theta(t) E_1 + \sin \theta(t) E_2,$$

$$N(t) = -\sin \theta(t) E_1 + \cos \theta(t) E_2,$$

$$\frac{D}{dt} \dot{\gamma} = -\dot{\theta}(\sin \theta) E_1 + (\cos \theta) \nabla_{\dot{\gamma}} E_1 + \dot{\theta}(\cos \theta) E_2 + (\sin \theta) \nabla_{\dot{\gamma}} E_2.$$

با توجه به اینکه $\{E_1, E_2\}$ یک پایه متعامد یکه است روابط زیر برقرارند:

$$\bullet = \nabla_X |E_1|^2 = 2 \langle \nabla_X E_1, E_1 \rangle,$$

$$\bullet = \nabla_X |E_2|^2 = 2 \langle \nabla_X E_2, E_2 \rangle$$

$$\bullet = \nabla_X \langle E_1, E_2 \rangle = \langle \nabla_X E_1, E_2 \rangle + \langle E_1, \nabla_X E_2 \rangle$$

از دو تساوی اول در روابط فوق نتیجه می شود که $\nabla_X E_1$ مضربی از E_2 و $\nabla_X E_2$ مضربی از E_1 است، لذا می توان فرض نمود $\nabla_X E_1 = \alpha E_2$ و $\nabla_X E_2 = \beta E_1$. با ضرب داخلی اولین رابطه در E_2 و دومین رابطه در E_1 مقادیر α و β به شرح زیر به دست می آیند:

$$\alpha = \langle \nabla_X E_1, E_2 \rangle$$

$$\beta = \langle E_1, \nabla_X E_2 \rangle$$

حال با معرفی ۱- فرمی ω به شکل $\omega(X) := \langle E_1, \nabla_X E_2 \rangle = - \langle \nabla_X E_1, E_2 \rangle$ از روابط فوق نتیجه می شود:

$$\nabla_X E_1 = -\omega(X) E_2 \quad (۱۳.۱۲)$$

$$\nabla_X E_2 = \omega(X) E_1$$

لذا همواره داریم

$$\kappa_g = \dot{\theta} - \omega(\dot{\gamma}). \quad (۱۴.۱۲)$$

تمرین ۲۰۴.۱۲. با یک محاسبه ساده درستی رابطه ۱۴.۱۲ را بررسی کنید.

گزاره ۳۰۴.۱۲. اگر γ یک منحنی بسته و هموار روی M و Ω ناحیه محدود به γ باشد، آنگاه

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\Omega} K dS$$

اثبات. بنابر قضیه استوکس داریم

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\Omega} d\omega$$

کافی است ثابت کنیم $d\omega = K dA$. پایه متعامد یکه و جهت دار $\{E_1, E_2\}$ را در نظر می گیریم. بنابر تعریف فرم حجمی داریم $dA(E_1, E_2) = 1$ با استفاده از این رابطه و همچنین ارتباط انحناهای گاوسی و انحنای ریمان داریم

$$\begin{aligned} K dA(E_1, E_2) &= K = R_m(E_1, E_2, E_2, E_1) \\ &= \langle \nabla_{E_1} \nabla_{E_2} E_2 - \nabla_{E_2} \nabla_{E_1} E_2 - \nabla_{[E_1, E_2]} E_2, E_1 \rangle. \end{aligned}$$

با استفاده از روابط ۱۳.۱۲ داریم

$$\begin{aligned} K dA(E_1, E_2) &= \\ &\langle \nabla_{E_1} (\omega(E_2) E_1) - \nabla_{E_2} (\omega(E_1) E_1) - \omega([E_1, E_2]) E_1, E_1 \rangle, \\ &= \langle E_1 (\omega(E_2)) E_1 + \omega(E_2) \nabla_{E_1} E_1 - E_2 (\omega(E_1)) E_1 \\ &\quad - \omega(E_1) \nabla_{E_2} E_1 - \omega([E_1, E_2]) E_1, E_1 \rangle, \\ &= E_1 (\omega(E_2)) - E_2 (\omega(E_1)) - \omega([E_1, E_2]), \\ &= d\omega(E_1, E_2). \end{aligned}$$

لذا حکم برقرار است.

اگر γ یک منحنی بسته و پاره ای هموار روی M باشد، آنگاه با انتگرال گیری از رابطه ۱۴.۱۲، اگر انحنا ی گاوسی برابر صفر باشد، بنابر گزاره ۳.۴.۱۲ داریم

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \kappa_g dt &= \int_{\gamma} \dot{\theta} dt - \sum_{i=1}^k \int_{a_{i-1}}^{a_i} \omega(\dot{\gamma}) dt \\ &= \int_{\gamma} \dot{\theta} dt - \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \dot{\theta} dt - \int_{\Omega} K dS = \int_{\gamma} \dot{\theta} dt = 2\pi\end{aligned}\quad (15.12)$$

۱.۴.۱۲ اثبات فرمول گاوس- بونه

مرحله اول: ابتدا حالتی را در نظر می گیریم که ∂W شامل هیچ رأسی نباشد و بتوان روی کل ناحیه W مختصات شبه ژئودزیکی را تعریف کرد. فرض می کنیم مرز W منحنی $C(t) = (u^1(t), u^2(t))$ باشد. قضیه را در حالتی ثابت می کنیم که $C(t)$ در جهت مثبت پارامتری شده باشد. با توجه به $\sqrt{G} = f$ داریم:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\arctan \sqrt{G} \frac{(u^2)'}{(u^1)'}) + (u^2)'(\sqrt{G})_{u^1} \\ = \frac{f_{u^1}(\frac{du^1}{dt})^2 \frac{du^2}{dt} + f_{u^2} \frac{du^1}{dt} (\frac{du^2}{dt})^2 + f \frac{d^2 u^1}{dt^2} \frac{du^1}{dt} - f \frac{d^2 u^1}{dt^2} \frac{du^2}{dt}}{(\frac{du^1}{dt})^2 + f^2 (\frac{du^2}{dt})^2} + f_{u^1} \frac{du^2}{dt}.\end{aligned}$$

با توجه به روابط (۸.۱۲) و (۱۰.۱۲) و مطالبی که در مورد تعیین علامت انحنا ی ژئودزیک گفته شد رابطه فوق به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{d}{dt}(\arctan \sqrt{G} \frac{(u^2)'}{(u^1)'}) + \frac{du^2}{dt} (\sqrt{G})_{u^1} = \kappa_g.$$

از آنجا داریم

$$\int_C \kappa_g dt = \int_C d(\arctan \sqrt{G} \frac{(u^2)'}{(u^1)'}) + \int_C (\sqrt{G})_{u^1} du^2. \quad (16.12)$$

چون منحنی $C(t) = (u^1(t), u^2(t))$ یک منحنی بسته است که هیچ رأسی ندارد داریم
 $\dot{C}(a) = \dot{C}(b)$ از طرف دیگر G نیز تابعی از u^1 و u^2 است پس

$$\sqrt{G} \frac{(u^2)'}{(u^1)'} \Big|_a = \sqrt{G} \frac{(u^2)'}{(u^1)'} \Big|_b.$$

بنابراین داریم:

$$\int_C d(\arctan \sqrt{G} \frac{(u^2)'}{(u^1)'}) = (m\pi + \alpha) - \alpha = m\pi.$$

حال از قضیه استوکس نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \int_C (\sqrt{G})_{u^1} du^2 &= \int \int_W (\sqrt{G})_{u^1} du^1 du^2 \\ &= \int \int_W \frac{(\sqrt{G})_{u^1} u^1}{\sqrt{G}} \sqrt{G} du^1 du^2. \end{aligned}$$

طبق گزاره ۶.۲.۱۲ و تعریف dS داریم:

$$\int_C (\sqrt{G})_{u^1} du^2 = - \int \int_W K dS$$

پس رابطه (۱۶.۱۲) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\int_C \kappa_g dt = m\pi - \int \int_W K dS \quad (۱۷.۱۲)$$

حال کافی است مقدار m را محاسبه کنیم. اگر داشته باشیم $f(u^1, u^2) = ۱$ آنگاه از گزاره
 ؟؟ نتیجه می‌شود $K = ۰$ در نتیجه بنابر رابطه (۱۵.۱۲) داریم $\int_C \kappa_g dt = 2\pi$ و رابطه
 (۱۷.۱۲) نیز در این حالت به شکل $\int_C \kappa_g dt = m\pi$ نوشته می‌شود بنابراین $m = ۲$.
 حال انتگرال

$$\int_C d(\arctan \frac{a(u^1, u^2)(u^2)'}{(u^1)'})$$

را در نظر می‌گیریم. این انتگرال به طور پیوسته به تابع $a(u^1, u^2)$ بستگی دارد و به ازای
 $a(u^1, u^2) = ۱$ برابر 2π می‌شود، بنابراین به ازای هر تابع مثبت $a(u^1, u^2)$ و به ویژه به

ازای $a = f$ نیز مقدار این انتگرال برابر 2π خواهد بود و در نتیجه بنا بر رابطه (۱۷.۱۲) داریم:

$$\int_C \kappa_g dt + \int \int_W K dS = 2\pi \quad (۱۸.۱۲)$$

مرحله دوم:

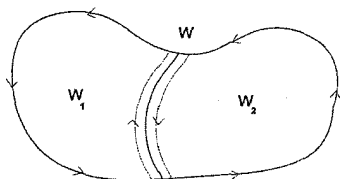
در مرحله بعد حالتی را در نظر می‌گیریم که $\partial W = C(t)$ دارای رئوسی نیز باشد. در این حالت داریم:

$$\begin{aligned} \int_C \kappa_g dt &= \int_C \dot{\theta} dt - \int_C \omega(\dot{\gamma}) dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{C_i} \dot{\theta} dt + \sum_{i=1}^n (\pi - \alpha_i) - \sum_{i=1}^n \int_{C_i} \omega(\dot{\gamma}) dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{C_i} \kappa_g dt + \sum_{i=1}^n (\pi - \alpha_i) \end{aligned}$$

با جایگذاری رابطه فوق در (۱۸.۱۲) برقراری حکم در این حالت نیز ثابت می‌شود. مرحله سوم:

در نهایت فرمول را در حالت عدم وجود مختصات شبه ژئودزیکی روی کل ناحیه W ثابت می‌کنیم. توجه داریم که طبق فرض رویه M کامل است، پس ناحیه W نیز کامل خواهد بود. از طرف دیگر هر زیر مجموعه باز M و به ویژه W نیز یک منیفلد است پس طبق قضیه هافد رینو W کامل ژئودزیکی است و در نتیجه به ازای هر $p \in W$ و هر $v \in T_p M$ یک ژئودزیک یکتا با نقطه شروع p و بردار سرعت اولیه v وجود دارد که به ازای $t \in (-\infty, \infty)$ تعریف می‌شود. با توجه به اینکه ابزار اساسی برای تعریف مختصات شبه ژئودزیکی ژئودزیک‌ها هستند از مطالب گفته شده این نتیجه حاصل می‌شود که در این حالت می‌توان W را به تعدادی ناحیه تقسیم کرد که بتوان روی هر یک از آنها یک مختصات شبه ژئودزیکی در نظر گرفت و در نتیجه برای هر یک از این نواحی فرمول گائوس-بونه برقرار باشد. به روش استقرا روی تعداد این نواحی اثبات را کامل می‌کنیم. کافی است

رابطه مورد نظر را برای حالتی ثابت کنیم که W به دو ناحیه W_1 و W_2 با شرایط بالا تقسیم می‌شود. بدون کاستن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد که مرز W یعنی $C(t)$ یک منحنی منتظم از کلاس C^2 است. (یعنی دارای هیچ رأسی نیست) زیرا با اثبات فرمول در این حالت برقرار بودن آن در صورت وجود رئوس نیز با توجه به مرحله قبل ثابت می‌شود. حال با توجه به آنچه گفته شد، فرض می‌کنیم W توسط یک منحنی منتظم γ از کلاس C^2 به دو ناحیه W_1 و W_2 تقسیم شده باشد. شکل ۵.۱۲ را ببینید. از تقاطع γ با مرز W دو



شکل ۵.۱۲: جهت حرکت روی مرز مشترک مخالف یکدیگر است.

نقطه A و B حاصل می‌شود که زوایای داخلی به دست آمده در نقطه A را با α_1 و α_2 ، زوایای داخلی به دست آمده در نقطه B را با β_1 و β_2 و کمان‌های حاصل روی C را با C_1 و C_2 نشان می‌دهیم. با توجه به برقراری فرمول گاوس- بونه برای دو ناحیه W_1 و W_2 داریم:

$$\int_{C_1} \kappa_g dt + \int_{\gamma} \kappa_g^1 dt + \pi - \alpha_1 + \pi - \beta_1 + \int \int_{W_1} K dS = 2\pi$$

$$\int_{C_2} \kappa_g dt + \int_{\gamma} \kappa_g^2 dt + \pi - \alpha_2 + \pi - \beta_2 + \int \int_{W_2} K dS = 2\pi$$

در روابط فوق κ_g^1 انحنای ژئودزیک γ است که علامت آن توسط W_1 تعیین می‌شود و κ_g^2 انحنای ژئودزیک همان منحنی است که علامت آن توسط W_2 تعیین می‌شود. زمانی که روی مرز W_1 حرکت می‌کنیم γ خلاف جهت زمانی پیموده می‌شود که روی مرز W_2 حرکت می‌کنیم بنابراین κ_g^1 و κ_g^2 مساوی و مختلف علامت هستند و از جمع دو رابطه فوق رابطه

زیر نتیجه می شود.

$$\int_{C_1} \kappa_g dt + \int_{C_2} \kappa_g dt + 4\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2) + \int \int_{W_1} K dS + \int \int_{W_2} K dS = 4\pi. \quad (19.12)$$

از طرف دیگر $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi$ و $\beta_1 + \beta_2 = \pi$ همچنین داریم

$$\int_C \kappa_g dt = \int_{C_1} \kappa_g dt + \int_{C_2} \kappa_g dt,$$

$$\int \int_W K dS = \int \int_{W_1} K dS + \int \int_{W_2} K dS.$$

با جایگذاری این مقادیر در رابطه (۱۹.۱۲) رابطه حکم (۱۲.۱۲) به دست می آید. □
حال از مطالب فوق و تعریف مشخصه اولر استفاده کرده به اثبات قضیه گاوس- بونه در حالت دو بعدی می پردازیم.

۵.۱۲ اثبات قضیه سرتاسری گاوس- بونه

اثبات. فرض کنیم $\{\Omega_i : i = 1, \dots, N_f\}$ وجه های یک مثلث بندی روی M ، برای هر i باشند.

همچنین فرض کنیم $\{\gamma_{ij} : j = 1, 2, 3\}$ و $\{\theta_{ij} : j = 1, 2, 3\}$ به ترتیب یال ها و زوایای داخلی Ω_i باشند. با استفاده از فرمول گاوس- بونه برای هر i داریم:

$$\sum_{j=1}^3 \int_{\gamma_{ij}} \kappa_g dt + \sum_{j=1}^3 (\pi - \theta_{ij}) + \int_{\Omega_i} K dS = 2\pi \implies$$

$$\sum_{i=1}^{N_f} \sum_{j=1}^3 \int_{\gamma_{ij}} \kappa_g dt + \sum_{i=1}^{N_f} \sum_{j=1}^3 (\pi - \theta_{ij}) + \sum_{i=1}^{N_f} \int_{\Omega_i} K dS = \sum_{i=1}^{N_f} 2\pi$$

در مجموع فوق انتگرال روی هر یال دقیقاً دو بار با جهت های مخالف ظاهر می شود بنابراین اولین جمله در این مجموع صفر می شود و می توان نوشت:

$$\int_M KdS + 3\pi N_f - \sum_{i=1}^{N_f} \sum_{j=1}^3 \theta_{ij} = 2\pi N_f \quad (20.12)$$

در رابطه فوق هر θ_{ij} دقیقاً یک بار ظاهر می شود، از طرف دیگر در هر رأس مجموع زوایایی که به آن رأس می رسند برابر 2π است در نتیجه $\sum_{i=1}^{N_f} \sum_{j=1}^3 \theta_{ij} = 2\pi N_v$ و رابطه (20.12) به شکل زیر نوشته می شود:

$$\int_M KdS = 2\pi N_v - \pi N_f \quad (21.12)$$

- حال تعداد کل یال ها را به دو روش می شماریم: (تکرار در شمارش مجاز است)
- ۱- هر یال دقیقاً در دو مثلث ظاهر می شود، پس این تعداد برابر است با $2N_e$.
 - ۲- هر مثلث سه یال دارد پس تعداد یال ها برابر $3N_f$ است.
- بنابراین $2N_e = 3N_f$ و در نهایت رابطه (21.12) به شکل زیر نوشته می شود:

$$\int_M KdS = 2\pi N_v - 2\pi N_e + 2\pi N_f = 2\pi \chi(M)$$

□

۶.۱۲ تعمیم قضیه گاوس- بونه

تلاش برای تعمیم قضیه گاوس- بونه به ابعاد بالاتر توسط هوف^{۱۳} آغاز گردید، وی این قضیه را برای ابرویه ها^{۱۴} (یعنی زیرمنیفدهای با بعد $n - 1$ یا هم-بعد ۱) فشرده جهت پذیر با

^{۱۳}Hopf

^{۱۴}hypersurfaces

بعد زوج در فضای اقلیدسی ثابت کرد. هوف در این اثبات از مفهوم نگاشت گاوس برای ابر رویه ها استفاده کرده بود و از آنجا که نگاشت گاوس برای یک زیرمنیفلد نشاننده از فضای اقلیدسی با هم-بعد بزرگتر از عدد ۱ وجود ندارد وی نتوانست این قضیه را برای زیرمنیفلدهای نشاننده IR^n به طور عام تعمیم دهد. در سال ۱۹۴۰، آلدورفر^{۱۵} و فنشل^{۱۶} به طور جداگانه این قضیه را برای زیرمنیفلدهای فشرده جهت پذیر فضای اقلیدسی تعمیم دادند. اما از آنجا که در آن زمان هنوز قضیه ناش^{۱۷} مبنی بر اینکه هر منیفلد فشرده را می توان در یک فضای IR^N برای N به اندازه کافی بزرگ نشانند^{۱۸} اثبات نشده بود، اثبات قضیه گاوس-بونه را که فنشل برای زیرمنیفلدهای فشرده ارائه کرده بود کافی به نظر نمی رسید. لذا آلدورفر و ویل^{۱۹} این قضیه را برای تمام منیفلدهای ریمانی در سال ۱۹۴۳ به طور جداگانه اثبات نمودند. اثبات ایشان با استفاده از مراحل زیر انجام پذیرفت.

(۱) نشاننده های ایزومتريک برای منیفلدهای ریمانی.

(۲) قضیه گاوس-بونه برای زیرمنیفلدها.

(۳) استدلالهای ترکیبیاتی برای تعمیم نتایج موضعی به نتایج سرتاسری.

اما این استدلالهای ترکیبیاتی از دیدگاه هندسی رضایت بخش نبود. هنگامی که چرن^{۲۰} در آگوست سال ۱۹۴۳ از انجمن ریاضی آمریکا بازدید می کرد، این قضیه توجه وی را به خود جلب کرد و او طی چند هفته با یک ایده جدید، اثباتی ذاتی، برای این قضیه ارائه داد. به این صورت کامل ترین اثبات قضیه گاوس-بونه برای منیفلدهای ریمانی توسط وی مطرح گردید. حدود پنجاه سال بعد چرن به فکر تعمیم قضیه گاوس-بونه برای منیفلدهای فینسلری

^{۱۵}Allendoerfer

^{۱۶}Fenchel

^{۱۷}Nash

^{۱۸}کتاب [۲] صفحه ۱۱۷ را ببینید.

^{۱۹}Weil

^{۲۰}S.S. Chern

افتاد و با همکاری دیوید بائو^{۲۱} اثباتی برای این قضیه ارائه کرد. از آنجا که این اثبات برای زیرمجموعه ای از متریک های فینسلری به نام متریک های لندزبرگی^{۲۲} تعمیم یافته بود، یک ریاضیدان ایرانی به نام اکبرزاده^{۲۳} در سال ۲۰۰۶ در کتاب خود [۱۵] نشان داد که تعمیم چرن-بائو از قضیه گاوس-بونه برای منیفلدهای فینسلری، بی ارزش است. به عبارت دیگر وی نشان داد که اگر متریک لندزبرگی در شرایطی که چرن-بائو برای قضیه گاوس-بونه فرض کرده بودند، صدق کند به متریک ریمانی تبدیل می شود. در سال ۲۰۰۹ توسط نگارنده ثابت شد که این تعمیم از قضیه گاوس-بونه نه تنها برای متریک های لندزبرگی بلکه برای خانواده بسیار بزرگتری از فضاهاهای فینسلری به نام فضای L -انحنای و فضای S -انحنای نیز بی ارزش است. [۲۷]، [۳۴].

^{۲۱}D. Bao

^{۲۲}Landsberg metrics

^{۲۳}H. Akbar-Zadeh

حسابان تغییرات

حسابان تغییرات یکی از قدیمی ترین و مهمترین ابزارهای ریاضی برای حل مسائل کاربردی است. اغلب از حسابان تغییرات برای حل مسائل بهینه سازی استفاده می کنند. در مراحل مقدماتی بدست آوردن کوتاهترین مسیرها زیاد پیچیده نیست اما در برخی از این مسائل خصوصا هنگامی که بعد فضای مورد نظر نامتناهی باشد، حسابان تغییرات مقدماتی جوابگو نبوده، لازم است ابزار حسابان تغییرات را برای فضاها پیچیده تعریف نموده از آن استفاده کرد.

در حسابان مقدماتی فرا گرفتیم که چگونه می توان مینیم $L(\gamma)$ یعنی طول منحنی γ

را با صفر شدن مشتق $L(\gamma)$ بدست آورد. این موضوع ما را به مطالعه مبحثی بنام حسابان تغییرات^۱ رهنمون می‌سازد. حسابان تغییرات در حقیقت عبارتست از استفاده از حسابان برای بررسی تغییرات تابعی‌هایی که حوزه تعریف آنها فضای توابع است. به بیان دیگر در این مبحث می‌آموزیم که چگونه می‌توان از حسابان چند متغیره و ابزار آن استفاده کرده و مسایل مربوط به فضای با بعد نامتناهی را حل کرد.^۲ این ابزار عبارتند از مشتق جهت دار، گرادیان، نقاط بحرانی، اکسترممهای نسبی، نقاط زینی و هسیان^۳ که در اینجا از مفاهیم تعمیم یافته آن روی منیفلدها استفاده خواهیم کرد.

در این فصل ما به تعمیم حسابان تغییرات بر روی منیفلدها می‌پردازیم و ابزار مورد نیاز را تعریف و از آن برای اثبات قضیه اندیس مورس استفاده می‌کنیم. از این ابزار در فصل بعد برای اثبات تعدادی از قضایای اساسی در هندسه منیفلدها استفاده خواهیم کرد. خواننده می‌تواند برای مطالعه بیشتر در این زمینه به مراجع [35]، [45]، [48]، [47]، [65] و [72] جلد چهارم مراجعه نماید. اما روشی که برای اثبات قضیه اندیس مورس در اینجا آورده می‌شود کمی با روشهای دیگر متفاوت است. علت این تفاوت از آنجا ناشی می‌شود که در برخی از این مراجع در اثبات قضیه اندیس از مختصات نرمال استفاده شده است که مانع تعمیم این قضیه برای منیفلدهای غیر ریمانی است، که این مختصات روی آنها وجود ندارد. لازم به یادآوری است که این قضیه برای منیفلدهای فینسلری نیز برقرار است.

^۱Calculus of Variations

^۲ مانند قضیه اندیس مورس

^۳Hessian

۱.۱۳ تغییرات یک منحنی تکه‌ای هموار و فضای مسیر

فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر و p و q دو نقطه از M باشند. خانواده تمام منحنی های پیوسته و تکه‌ای هموار^۴ روی M را که p را به q وصل کرده و در فاصله $[0, 1]$ پارامتری شده باشند، با $\Omega(p, q)$ ^۵، یا اگر ابهامی نباشد، با Ω نمایش می‌دهیم. $\Omega(p, q)$ را فضای مسیرها^۶ می‌نامیم.

تعریف ۱.۱.۱۳. فرض کنیم $\omega \in \Omega(p, q)$ یک منحنی روی M باشد. یک تغییرات ω (با ابتدا و انتهای مشخص) را بانگاشت ω نمایش داده، آنرا طوری تعریف می‌کنیم که در شرایط زیر صدق کند.

$$\omega. :] - \epsilon, \epsilon[\times [0, 1] \rightarrow M$$

$$(s, t) \mapsto \omega_s(t)$$

۱. الف. بازای هر t مشخص، نگاشت $s \mapsto \omega_s(t)$ از کلاس C^∞ باشد.

ب. بازای هر s مشخص نگاشت $t \mapsto \omega_s(t)$ به طور تکه‌ای از کلاس C^∞ باشد.

$$2. \omega.(t) = \omega(t)$$

$$3. \forall s \in] - \epsilon, \epsilon[\quad \omega_s(0) = p, \quad \omega_s(1) = q$$

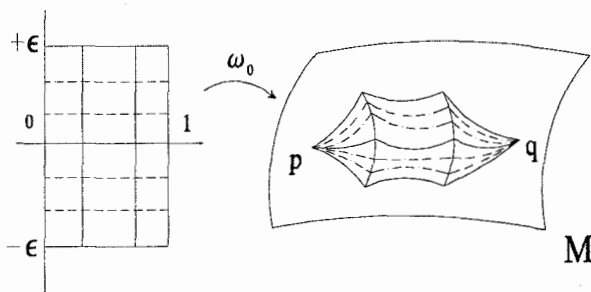
در اینجا ابتدا و انتهای منحنی را p و q مشخص کرده‌ایم (مگر آنکه خلاف آن تصریح شود). این تغییرات را در برخی از مراجع یک تغییرات سره^۷ نیز می‌نامند.

^۴Piecewise Smooth(C^∞)

^۵می‌توان نشان داد که $\Omega(p, q)$ یک منیفلد با بعد نامتناهی است اما از آنجا که فعلاً نیازی به این مفهوم نداریم، برای جلوگیری از به درازا کشیدن کلام از توضیح آن چشم‌پوشی می‌نماییم.

^۶Path Spaces

^۷Proper



شکل ۱۰.۱۳: یک تغییرات منحنی ω روی منیفلد M .

ما در اینجا برای سادگی بجای $t \in [a, b]$ فرض کرده‌ایم $t \in [0, 1]$ ، که از کلیت مسئله نمی‌کاهد.

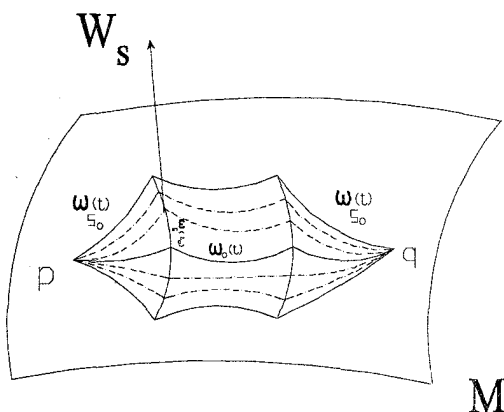
توجه: تعداد منحنی‌های تکه‌ای هموار $\omega_s(t)$ متناهی فرض شده است.

فرض کنیم ω یک تغییرات ω ، $t \in [0, 1]$ و W_s بردار سرعت $\omega_s(t)$ باشد. با قرار دادن $s = 0$ و تغییر دادن t روی فاصله $[0, 1]$ یک میدان برداری W در طول ω بدست می‌آوریم که در ابتدا و انتهای ω صفر می‌شود. این موضوع را می‌توان بصورت تحلیلی زیر نوشت:

$$W.(1) = \left(\frac{\partial}{\partial s}\omega.\right)(0, 1) = \left(\frac{d}{ds}\omega.(1)\right)_{s=0} = \left(\frac{d}{ds}q\right)_{s=0} = 0$$

همچنین داریم: $W.(0) = 0$. لذا میدان برداری $W = \left(\frac{\partial \omega}{\partial s}\right)_{s=0}$ را میدان تغییرات^۸ می‌نامیم. برعکس اگر W یک میدان برداری در طول ω باشد که در p و q صفر می‌شود، می‌توان تعداد بیشمار تغییرات ارائه نمود که W میدان تغییرات آن باشد. در حقیقت کافی است منحنی‌های انتگرال W را در نظر گرفت. برای منیفلدهای ریمانی می‌توان یک تغییرات کانونی (یعنی تغییرات ژئودزیک مربوط به متریک ریمانی) با استفاده از نگاشت

^۸Variational field



شکل ۲.۱۳: W_s ، بردار سرعت $\omega_s(t)$ روی منیفلد M .

نمایی به صورت زیر در نظر گرفت.

$$\omega_s(t) = \exp_{\omega(t)}(sW(t))$$

در اینجا $\omega_s(t)$ برای s های به اندازه کافی کوچک تعریف می شود.

فرض کنیم $\omega \in \Omega$ و W یک میدان برداری به طور تکه ای از کلاس C^∞ باشد که در نقاط p و q صفر می شود. در این صورت W را یک بردار مماس در ω بر Ω می گوییم. مجموعه بردارهای مماس در ω بر Ω را توسط $T_\omega \Omega$ نمایش می دهیم.

اگر ω یک تغییرات ω باشد، می توان ω را به عنوان یک منحنی هموار روی Ω که از ω در لحظه $s = 0$ می گذرد در نظر گرفت. برای این کار کافی است فرض کنیم

$$\bar{\omega} :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow \Omega$$

$$s \mapsto \omega_s$$

در جایی که

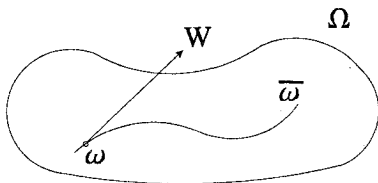
$$\omega_s : [0, 1] \rightarrow M$$

$$t \mapsto \omega_s(t)$$

و بنا بر خاصیت (۲) در تعریف $\omega = \bar{\omega}(0) = \omega$.

از اینجا می‌توان مشاهده کرد که بردار سرعت $\bar{\omega}$ در نقطه $s = 0$ برابر میدان تغییرات W است.

نتیجه ۲.۱.۱۳. یک تغییرات ω را می‌توان به عنوان یک منحنی $\bar{\omega}$ روی Ω در نظر گرفت که از نقطه ω می‌گذرد و یک میدان تغییرات را به عنوان بردار سرعت منحنی $\bar{\omega}$ در ω تعریف نمود.



شکل ۳.۱۳: منحنی $\bar{\omega}$ که از نقطه ω می‌گذرد و میدان تغییرات W به عنوان بردار سرعت آن

۲.۱۳ مسیرهای بحرانی

فرض کنیم $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع حقیقی از کلاس C^1 روی M باشد. می‌دانیم که مشتق تابع f در نقطه p توسط $T_p M \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}$ $(f_*)_p$ تعریف می‌گردد که در آن $((f_*)_p X) \circ g = X \cdot (g \circ f)(p)$ یعنی اگر $\alpha(u)$ منحنی انتگرال میدان X باشد که از p می‌گذرد، آنگاه

$$((f_*)_p X) \circ g = \frac{d}{du} g \circ f \circ \alpha(u) \big|_{u=0} = \left(\frac{d}{dt} g \right)_{t=f(p)} \left(\frac{d(f \circ \alpha(u))}{du} \right)_{u=0}.$$

که در آن $g \in C^\infty(f(p))$. لذا داریم

$$(f_*)_p X = \frac{d}{du}(f \circ \alpha(u)) \left(\frac{d}{dt} \right)_{f(p)}$$

می‌گوییم p یک نقطه بحرانی^۹ f است اگر $(f_*)_p = 0$. لذا p یک نقطه بحرانی f است اگر برای هر منحنی α گذرنده از $p = \alpha(0)$ داشته باشیم

$$\left. \frac{d}{du}(f \circ \alpha(u)) \right|_{u=0} = 0.$$

در مختصات موضعی $(x^1, \dots, x^n)$ روی یک همسایگی p ، نقطه p یک نقطه بحرانی f است اگر و تنها اگر

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^1} \right)_p = 0, \dots, \left(\frac{\partial f}{\partial x^n} \right)_p = 0.$$

حال به طور مشابه مطالب بالا را برای حسابان تغییرات می‌نویسیم. فرض کنیم f تابعی بصورت زیر باشد (به عنوان مثال تابع طول مسیر)

$$f : \Omega(p, q) \rightarrow \mathbb{R}$$

اگر $\omega \in \Omega(p, q)$ ، تعریف می‌کنیم:

$$(f_*)_\omega : T_\omega \Omega \rightarrow T_{f(\omega)} \mathbb{R}$$

$$W \mapsto (f_*)_\omega W$$

در اینجا

$$(f_*)_\omega W = \left(\frac{d}{ds} f \circ \bar{w} \right)_{s=0} \cdot \left(\frac{d}{dt} \right)_{f(\omega)}$$

که در آن $\bar{w}$ یک تغییرات ω وابسته به W است.

وجود چنین مشتقی ممکن است همیشه بدیهی نباشد و همچنین عدم وابستگی آن به $\bar{w}$ همیشه محرز نیست. در حالت کلی باید شرایطی به f اضافه نمود تا این تعریف معنی پیدا کند. لذا تعریف زیر را می‌آوریم.

^۹Critical Point (point Critique)

تعریف ۱.۲.۱۳. فرض کنیم $f: \Omega(p, q) \rightarrow \mathbb{R}$. منحنی $\omega \in \Omega$ را یک مسیر بحرانی برای f گوئیم اگر برای هر تغییرات $\bar{\omega}$ از ω داشته باشیم

$$\left(\frac{d}{ds} f \circ \bar{\omega} \right)_{s=0} = 0.$$

به عنوان مثال اگر f روی ω مینیمم شود و اگر مشتقات $\left. \frac{d}{ds} (f \circ \bar{\omega}) \right|_{s=0}$ تعریف شوند، آنگاه ω یک مسیر بحرانی برای f است.

۳.۱۳ انرژی یک مسیر

فرض کنیم $\omega \in \Omega(p, q)$ و a, b دو عدد حقیقی باشند که در رابطه $0 \leq a < b \leq 1$ صدق می‌کنند. همچنین فرض کنیم M دارای ساختار منیفلد ریمانی باشد.

تعریف ۱.۳.۱۳. انرژی ω از a تا b را توسط تابع عددی (اسکالر) زیر تعریف می‌کنیم.

$$E_a^b(\omega) = \frac{1}{2} \int_a^b \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\|^2 dt$$

E را توسط E نیز نمایش می‌دهیم.

فرض کنیم طول ω از a تا b توسط رابطه زیر تعریف شود

$$L_a^b(\omega) = \int_a^b \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\| dt$$

با استفاده از نامساوی شوارتز $(\int_a^b f g dt)^2 \leq (\int_a^b f^2 dt)(\int_a^b g^2 dt)$ برای $f = 1$ و $g = \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\|$ داریم

$$\left(\int_a^b \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\| dt \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\|^2 dt$$

در نتیجه:

$$\frac{1}{4}(L_a^b(\omega))^2 \leq (b-a)E_a^b(\omega)$$

تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $g := \|\frac{d\omega}{dt}\|$ ثابت باشد، یعنی اگر و تنها اگر پارامتر t مضربی از طول ω باشد.

تمرین ۲.۳.۱۳. درستی نتیجه بالا را تحقیق کنید.

حال فرض کنیم γ یک ژئودزیک مینیمال بین $p = \gamma(0)$ و $q = \gamma(1)$ باشد، برای هر منحنی ω بین p و q داریم

$$E(\gamma) = \frac{1}{4}L(\gamma)^2 \leq \frac{1}{4}L(\omega)^2 \leq E(\omega)$$

تساوی در نامساوی سمت چپ برقرار است اگر و تنها اگر ω یک ژئودزیک مینیمال دیگر باشد. تساوی در نامساوی سمت راست برقرار است اگر و تنها اگر ω بر حسب طول قوس پارامتری شده باشد. لذا اگر فاصله دو نقطه $p, q \in M$ را با

$$d = \inf_{\omega \in \Omega(p,q)} L(\omega)$$

تعریف کنیم آنگاه گزاره زیر را ثابت کرده ایم.

گزاره ۳.۳.۱۳. فرض کنیم M یک منیفلد ریمانی و $p, q \in M$ دو نقطه با فاصله d باشند، آنگاه تابع انرژی $E : \Omega(p, q) \rightarrow \mathbb{R}^+$ دارای مینیمم مطلق $\frac{1}{4}d^2$ روی مجموعه ژئودزیکهای مینیمالی است که p را به q وصل می کنند.

تذکر: نتیجه و گزاره بالا نشان می دهد منحنی هایی که انرژی را مینیمم می کنند، به خودی خود بر حسب مضربی از طول قوس پارامتری شده اند. این موضوع یکی از دلایل ترجیح کار کردن با تابع انرژی بجای تابع طول قوس است.

۴.۱۳ فرمول اولین تغییرات

هدف این بخش بیان مسیره‌های بحرانی برای تابع انرژی است. فرض کنیم M یک منیفلد ریمانی و $\omega \in \Omega(p, q)$ و $\Omega \rightarrow \epsilon, \epsilon[$ و $[\bar{\omega} : \text{یک تغییرات } \omega \text{ با نقاط انتهایی مشخص باشد.}$

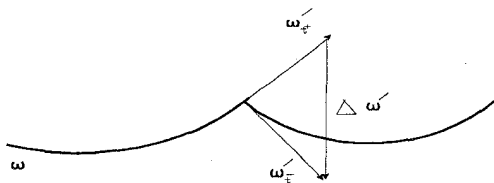
نمادهای زیر را در نظر می‌گیریم.

• بردار وابسته به تغییرات: $W = \frac{d\bar{\omega}}{ds}(\cdot)$

• بردار سرعت ω : $\omega' = \frac{d\omega}{dt}$

• ناپیوستگی ω' در نقطه t , $(0 < t < 1)$: $\Delta_t \omega' = \omega'_{t+} - \omega'_{t-}$

$\Delta_t \omega'$ را پرش^{۱۱} ω' نیز می‌گویند. بوضوح $\Delta_t \omega' = 0$ ، مگر برای تعداد متناهی از مقادیر t . حال می‌توانیم فرمول مشتق اول را محاسبه نماییم. عموماً مشتق یک تابع را که در



شکل ۴.۱۳: پرش یک مسیر

روی فضای نگاشت‌ها تعریف می‌شود، اولین تغییرات^{۱۱} آن تابع می‌نامند.

قضیه ۱.۴.۱۳. فرمول تغییرات اول: اگر E تابع انرژی باشد، بازای هر تغییرات $\bar{\omega}$ از ω داریم:

^{۱۱} Jump

^{۱۱} First Variation

$$\left(\frac{d}{ds} E \circ \bar{\omega} \right)_{s=0} = - \sum_{t_i} \langle W_{t_i}, \Delta_{t_i} \omega' \rangle - \int_0^1 \langle W, D_{\omega'} \omega' \rangle dt$$

در اینجا $D_{\omega'} \omega'$ مشتق کواریان یا همگرد در طول یک خم و مربوط به التصاق ریمانی است. $\Delta_{t_i} \omega' = 0$ مگر برای تعداد متناهی از مقادیر t_i ، و جمع‌بندی $\sum_{t_i}$ روی این نقاط انجام می‌شود.

تذکر: این رابطه همچنین نشان می‌دهد که $\left(\frac{d}{ds} E \circ \bar{\omega} \right)_{s=0}$ خوش تعریف است. زیرا به انتخاب $\bar{\omega}$ بستگی نداشته و فقط به انتخاب W و ω بستگی دارد.

نمادگذاری ۲.۴.۱۳. یادآوری می‌کنیم که برای هر $\epsilon, \epsilon] - \epsilon, \epsilon[$ داریم $s \in \Omega$ و $\bar{\omega}(s) \in \Omega$ در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}(s) : [0, 1] &\rightarrow M \\ t &\mapsto \bar{\omega}(s)(t) \end{aligned}$$

قبلاً این عبارت را با ω نمایش داده بودیم. برای جلوگیری از نمادگذاریهای جدید که موجب پیچیدگی محاسبات می‌شود، تغییرات را همچنان توسط $\bar{\omega}$ نشان می‌دهیم که در ضمن می‌توان آن را به عنوان یک نگاشت از $\epsilon, \epsilon[- \epsilon, \epsilon[$ در Ω و همچنین یک نگاشت از $[0, 1] \times [0, 1] - \epsilon, \epsilon[$ در M در نظر گرفت.

اثبات فرمول تغییرات اول: فرمول اولین تغییرات توسط یک محاسبه ساده بدست می‌آید. بنابر تعریف ۱.۳ چون انتگرال گیری به s بستگی ندارد، با استفاده از خاصیت سازگاری با متریک ریمانی، داریم:

$$\frac{d}{ds} (E \circ \bar{\omega}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d}{ds} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t}, \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} \right\rangle dt = \int_0^1 \left\langle D_{\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial s}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t}, \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} \right\rangle dt$$

از طرف دیگر بنا بر خاصیت بدون تاب بودن التصاق ریمانی، یعنی

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

و با توجه به اینکه

$$\left[\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial s}, \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} \right] = \bar{\omega}_* \left[\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t} \right] = 0.$$

خواهیم داشت:

$$D_{\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial s}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} = D_{\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial s} + \left[\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial s}, \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} \right] = D_{\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial s}$$

با جایگذاری در رابطه بالا داریم

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(E \circ \bar{\omega}) &= \int_0^1 \left\langle D_{\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial s}, \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} \right\rangle dt \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial s}, \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} \right\rangle dt - \int_0^1 \left\langle \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial s}, D_{\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} \right\rangle dt \end{aligned}$$

حال یک افراز از $[0, 1]$ مثل $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ طوری در نظر می‌گیریم که $\bar{\omega}$ روی هر فاصله $\epsilon, \epsilon \in \mathbb{R} \times [t_{i-1}, t_i]$ از کلاس C^∞ باشد. با انتگرال‌گیری روی هر یک از فواصل $[t_{i-1}, t_i]$ داریم:

$$\frac{d}{ds}(E \circ \bar{\omega}) = \sum_{i=1}^k \left[\left\langle \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial s}, \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} \right\rangle \right]_{t_{i-1}}^{t_i} - \int_0^1 \left\langle \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial s}, D_{\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} \right\rangle dt$$

چون بازای مقادیر $t = 0$ و $t = 1$ داریم $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial s} = 0$ پس

$$\frac{d}{ds}(E \circ \bar{\omega}) = - \sum_{i=1}^{k-1} \left\langle \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial s}, \Delta_i \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} \right\rangle - \int_0^1 \left\langle \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial s}, D_{\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} \right\rangle dt$$

از اینجا با محاسبه در $s = 0$ رابطه حکم بدست می‌آید. $\square$

نتیجه ۳.۴.۱۳. ω یک مسیر بحرانی برای انرژی است اگر و تنها اگر ω یک ژئودزیک باشد.

اثبات. اگر ω یک ژئودزیک باشد، آنگاه از کلاس C^∞ است و داریم $\Delta_i \omega' = 0$. از طرف دیگر $D_{\omega'} \omega' = 0$ ، لذا از فرمول اول تغییرات برای هر تغییرات $\bar{\omega}$ از ω داریم $\frac{d}{ds}(E \circ \bar{\omega})_{s=0} = 0$. در نتیجه یک مسیر بحرانی برای انرژی داریم.

برعکس، فرض کنیم ω یک مسیر بحرانی برای E بوده و $W_t = f(t)A_t$ که در آن $A_t = D_{\omega'} \omega'$ و $f(t)$ تابعی است که در نقاط t_i صفر شده و در جاهای دیگر مثبت است. فرض کنیم $\bar{\omega}$ یک تغییرات وابسته به W_t باشد، در اینصورت

$$0 = \frac{d}{ds}(E \circ \bar{\omega})_{s=0} = - \int_0^1 f(t) \|A_t\|^2 dt \Rightarrow A_t = 0$$

به این صورت ω به طور تکه‌ای ژئودزیک می‌شود. کافی است نشان دهیم ω از کلاس C^∞ است.

فرض کنیم $W_t \in T_{\omega} \Omega$ به طوری که $W_i = \Delta_i \omega'$ و $\bar{\omega}$ یک تغییرات وابسته به W_t باشد. چون $D_{\omega'} \omega' = 0$ داریم:

$$0 = \frac{d}{ds}(E \circ \bar{\omega})_{s=0} = - \sum_i \langle \Delta_i \omega', \Delta_i \omega' \rangle \Rightarrow \Delta_i \omega' = 0$$

چون بردارهای سرعت چپ و راست $\omega'_{t_i+} = \omega'_{t_i-}$ در هر نقطه t_i بر هم منطبق می‌شوند، از یکتایی ژئودزیکها نتیجه می‌شود که $\omega|_{[t_i, t_{i+1}]}$ ادامه ژئودزیک $\omega|_{[t_{i-1}, t_i]}$ است و در نتیجه ω از کلاس C^∞ است. $\square$

تمرین ۴.۴.۱۳. اگر ω یک منحنی هموار پارامتری شده بر حسب طول قوس روی M باشد، نشان دهید:

الف: اگر $\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt}$ ، آنگاه بازای هر t ، $D_{\dot{\omega}} \dot{\omega}$ بر $\dot{\omega}(t)$ عمود است.

ب: اگر ω یک تغییرات ω باشد، به طوری که برای هر s ، ω_s پارامتری شده جدید ω باشد، آنگاه L_{ω_s} (اولین تغییرات طول ω_s) صفر است.

۵.۱۳ اندیس و تباهی در یک نقطه بحرانی

دیدیم که ژئودزیکهای مسیرهای بحرانی انرژی هستند. برای مطالعه ژئودزیکهای مینیمال باید مشتق دوم $\bar{\omega} \circ E$ را مطالعه کنیم. این موضوع یکی از اهداف ما در این بخش است. فرض کنیم $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ یک نگاشت C^2 و p یک نقطه بحرانی f باشد، (یعنی $(f_*)_p = 0$). تعریف زیر را می‌آوریم.

تعریف ۱.۵.۱۳. هسیان f در نقطه بحرانی $p \in M$ عبارتست از نگاشت

$$H_f(p) : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$H_f(p)(X, Y) := X \cdot \tilde{Y}(f)$$

که در آن میدان برداری $\tilde{Y} \in \chi(M)$ یک توسعه دلخواه بردار مماس Y در نقطه p است. براحتی می‌توان نشان داد که $H_f(p)$ خوشتعریف بوده، دو خطی و متقارن است. در حقیقت چون p نقطه بحرانی است، داریم:

$$X \cdot \tilde{Y}(f) - Y \cdot \tilde{X}(f) = [\tilde{X}, \tilde{Y}]_p f = 0$$

بنابراین هسیان متقارن است، زیرا

$$X \cdot (\tilde{Y}f) = Y \cdot \tilde{X}(f) \Rightarrow H_f(p)(X, Y) = H_f(p)(Y, X)$$

بعلاوه H_f خوشتعریف است زیرا اولین عضو مستقل از توسعه $\tilde{X}$ از X بوده و دومین عضو نیز مستقل از توسعه $\tilde{Y}$ از Y می‌باشد. در مختصات موضعی هسیان بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$(H_f(p))_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}(p) \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n$$

یادآوری می‌کنیم که این عبارت تنها وقتی دارای رفتار تانسوری است که p یک نقطه بحرانی باشد.

تعریف ۲.۵.۱۳. در نقطه بحرانی p ، تباهی تابع f عبارت است از بعد هسته $H_f(p)$ ، یعنی بعد زیرفضای برداری از $T_p M$ که بازای میدان های برداری در آن داشته باشیم $H_f(p)(X, Y) = 0$. نقطه بحرانی p را تباهیده گوئیم اگر $H_f(p)$ تباهیده باشد (یعنی دترمینان ماتریس نگاشت $H_f(p)$ صفر باشد). اندیس f در نقطه p عبارتست از بعد زیر فضای برداری از $T_p M$ که روی آن $H_f(p)$ معین منفی باشد.

برای آنکه بتوان مفهوم هسیان را به تابع انرژی (که تابعی از $\Omega(p, q)$ در $\mathbb{R}$ و روی یک فضای با بعد نا متناهی تعریف شده است) توسیع داد، باید ببینیم چگونه می توان یک رویه ۲-بعدی در $\Omega(p, q)$ تعریف نمود. ابتدا ببینیم در روی M این کار چگونه انجام می شود. فرض کنیم $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ ، p یک نقطه بحرانی f و $X, Y \in T_p M$ باشد. قرار می دهیم:

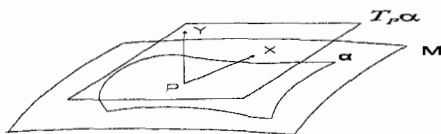
$$\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow M$$

$$(s_1, s_2) \mapsto \alpha(s_1, s_2)$$

به طوری که

$$\alpha(\cdot, \cdot) = p, \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s_1}\right)_{(\cdot, \cdot)} = X, \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s_2}\right)_{(\cdot, \cdot)} = Y$$

α یک رویه پارامتری به بعد ۲ است که از نقطه p گذشته و $X, Y \in T_p \alpha$ می نویسیم



شکل ۵.۱۳: α ، یک رویه پارامتری ۲-بعدی در M

$H_f(p)(X, Y) = \left(\frac{\partial^2 f \circ \alpha}{\partial s_1 \partial s_2}\right)_{(\cdot, \cdot)}$ حال به طور مشابه در روی Ω یک رویه ۲-بعدی

تعریف می‌کنیم. فرض کنیم γ یک نقطه‌بهرانی E در $\Omega(p, q)$ باشد (یعنی یک ژئودزیک) و $W_1, W_2 \in T_\gamma \Omega$ یک تغییرات γ با دو پارامتر انتخاب می‌کنیم.

$$\bar{\gamma} : U \times [\cdot, \cdot] \rightarrow M$$

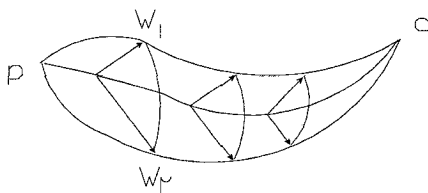
$$((s_1, s_2), t) \mapsto \gamma_{(s_1, s_2)}(t)$$

U یک همسایگی از $(\cdot, \cdot)$ در $\mathbb{R}^2$ است به طوری که

$$\bar{\gamma}_{(\cdot, \cdot)}(t) = \gamma(t)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s_1}\right)((\cdot, \cdot), t) = W_1 \quad \left(\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s_2}\right)((\cdot, \cdot), t) = W_2$$

$\bar{\gamma}$ را می‌توان به صورت زیر نیز در نظر گرفت.



شکل ۶.۱۳: یک رویه ۲-بعدی در $\Omega(p, q)$

$$\bar{\gamma} : U \rightarrow \Omega$$

$$(s_1, s_2) \mapsto \bar{\gamma}(s_1, s_2)$$

که در آن

$$\bar{\gamma}(s_1, s_2) : [\cdot, \cdot] \rightarrow M$$

$$t \mapsto \gamma_{(s_1, s_2)}(t)$$

به این صورت $\bar{\gamma}$ یک رویه پارامتری ۲-بعدی در Ω است که از γ گذشته و W_1, W_2 بردارهای مماس بر $\bar{\gamma}$ در γ می‌باشند. قرار می‌دهیم:

$$H_E(\gamma)(W_1, W_2) = \left(\frac{\partial^2 E \circ \bar{\gamma}}{\partial s_1 \partial s_2} \right)_{(\cdot, \cdot)}$$

نگاشت $H_E(\gamma) : T_\gamma \Omega \times T_\gamma \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ دو خطی و متقارن است، اما فعلاً صحبتی درباره خوش تعریفی آن نکرده‌ایم. در مورد وجود مشتق نیز صحبتی نشده است. فرمول تغییرات دوم در بخش بعد این موارد را تایید خواهد کرد.

همانطور که برای توابع روی منیفلدهای با بعد متناهی تعریف کردیم، اندیس و تباهی هسیان تابع انرژی را تعریف می‌کنیم و برای سادگی آن را اندیس و تباهی انرژی می‌نامیم. یک سوال که در اینجا مطرح می‌شود این است که آیا اندیس و تباهی انرژی، عددی متناهی است. جواب مثبت این سوال در قضیه‌ای به نام قضیه اندیس مورس^{۱۲} در بخشهای آینده مورد تایید قرار می‌گیرد.

فرم مربعی $H_E(\gamma)(W, W)$ را می‌توان به کمک تغییرات یک پارامتری وابسته به W بیان کرد. در حقیقت فرض کنیم $[-\epsilon, +\epsilon] \rightarrow \Omega$ یک تغییرات یک پارامتری وابسته به W باشد، یک تغییرات دو پارامتری $\bar{\gamma}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{\gamma}(s_1, s_2) := \gamma(s_1 + s_2)$$

می‌توان نشان داد

$$H_E(\gamma)(W, W) = \left(\frac{\partial^2 E \circ \bar{\gamma}}{\partial s_1 \partial s_2} \right)_{(\cdot, \cdot)} = \frac{d^2}{ds^2} (E \circ \bar{\gamma})_{s=0}.$$

از آن نتیجه می‌گیریم:

^{۱۲}Morse Index Theorem

گزاره ۳.۵.۱۳. اگر γ یک ژئودزیک کمینه باشد، آنگاه اندیس انرژی E در γ برابر صفر است. برعکس اگر اندیس E در γ صفر باشد، آنگاه γ موضعاً کمینه است (موضعاً یعنی برای تغییرات به اندازه کافی کوچک).

اثبات. در حقیقت اگر γ کمینه باشد، آنگاه

$$E(\bar{\gamma}(s)) \geq E(\gamma) \equiv E(\bar{\gamma}(\cdot))$$

از آزمون مشتق دوم در حسابان مقدماتی می‌دانیم که اگر تابعی مینیمم باشد، مشتق دوم آن نا منفی است. بنابراین $\frac{d^2}{ds^2}(E \circ \bar{\gamma}) \geq 0$ ، یعنی $\forall W \in T_{\gamma} \Omega H_E(\gamma)(W, W) \geq 0$. از این نتیجه می‌شود که $H_E(\gamma)$ یک فرم مربعی مثبت است و در نتیجه اندیس آن برابر صفر است. برعکس اگر γ یک ژئودزیک باشد به طوری که اندیس E در γ صفر باشد، داریم:

$$\left(\frac{d^2(E \circ \bar{\gamma})}{ds^2} \right)_{s=0} \geq 0.$$

بنابراین یک همسایگی I از $s = 0$ در $\mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که

$$\forall s \in I \quad E(\bar{\gamma}(s)) \geq E(\bar{\gamma}(\cdot)) \equiv E(\gamma)$$

□ در نتیجه γ موضعاً کمینه است.

۶.۱۳ فرمول تغییرات دوم

در اثبات اینکه هر منحنی کمینه یک ژئودزیک است، از حسابان مقدماتی و آزمون مشتق اول استفاده می‌شود. اگر ژئودزیک γ کمینه باشد، آنگاه مشتق اول تابع طول باید برای هر تغییرات γ صفر شود. حال از آزمون مشتق دوم استفاده می‌کنیم. اگر γ کمینه باشد، مشتق دوم باید نا منفی باشد. در این بخش این مشتق دوم را محاسبه کرده و آن را تغییرات دوم تابع طول می‌نامیم.

قضیه ۱.۶.۱۳. فرمول تغییرات دوم: فرض کنیم γ یک ژئودزیک روی M و $\bar{\gamma}: U \rightarrow$

Ω یک تغییرات دو پارامتری γ باشد. همچنین فرض کنیم که همواره $W_1 = \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s_1}(\cdot, \cdot)$ و $W_2 = \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s_2}(\cdot, \cdot)$ بردارهای تغییرات وابسته به آن باشند. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} H_E(\gamma)(W_1, W_2) &= \left(\frac{\partial^2 E \circ \bar{\gamma}}{\partial s_1 \partial s_2} \right)_{(\cdot, \cdot)} \\ &= - \sum_t \langle W_2(t), \Delta_t D_{\gamma'} W_1 \rangle \\ &\quad - \int_{\cdot}^{\cdot} \langle W_2, D_{\gamma'} D_{\gamma'} W_1 + R(W_1, \gamma') \gamma' \rangle dt \end{aligned}$$

که در آن $\Delta_t D_{\gamma'} W_1 = (D_{\gamma'} W_1)(t_+) - (D_{\gamma'} W_1)(t_-)$ صفر است مگر برای تعداد متناهی از مقادیر t و سیگما روی این مقادیر t محاسبه می‌شود.

اثبات فرمول تغییرات دوم: از فرمول تغییرات اول شروع می‌کنیم.

$$\frac{\partial}{\partial s_2} E \circ \bar{\gamma} = - \sum_t \left\langle \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s_1}, \Delta_t \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t} \right\rangle - \int_{\cdot}^{\cdot} \left\langle \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s_2}, D_{\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t}} \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t} \right\rangle dt$$

با مشتق‌گیری نسبت به s_1 داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} E \circ \bar{\gamma} &= - \sum_t \left\langle D_{\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s_1}} \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s_1}, \Delta_t \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t} \right\rangle - \sum_t \left\langle \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s_2}, D_{\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s_1}} \Delta_t \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t} \right\rangle \\ &\quad - \int_{\cdot}^{\cdot} \left\langle D_{\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s_1}} \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s_2}, D_{\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t}} \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t} \right\rangle dt - \int_{\cdot}^{\cdot} \left\langle \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s_2}, D_{\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s_1}} D_{\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t}} \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t} \right\rangle dt \end{aligned}$$

مقدار این عبارت را در $(\cdot, \cdot)$ می‌نویسیم. چون $\bar{\gamma}(\cdot, \cdot)$ یک ژئودزیک است، داریم:

$$\left(D_{\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t}} \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t} \right)_{(\cdot, \cdot)} = \cdot, \quad \Delta_t \left(\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t} \right)_{(\cdot, \cdot)} = \cdot$$

لذا اولین و سومین جمله از طرف دوم صفر می‌شود. داریم

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 E \circ \bar{\gamma}}{\partial s_1 \partial s_2} \right)_{(\cdot, \cdot)} &= - \sum_t \langle W_2, \Delta_t D_{\gamma'} W_1 \rangle \\ &\quad - \int_0^1 \langle W_2, D_{\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s_1}} D_{\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t}} \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t} \rangle_{(\cdot, \cdot)} dt \end{aligned}$$

از طرف دیگر با استفاده از تعریف تانسور انحنا و ریمان و سپس خاصیت بدون تاب بودن التصاق ریمانی داریم:

$$\begin{aligned} \left(D_{\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s_1}} D_{\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t}} \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t} \right)_{(\cdot, \cdot)} &= \\ \left(D_{\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t}} D_{\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s_1}} \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t} + D_{[\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s_1}, \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t}]} \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t} + R\left(\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s_1}, \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t}\right) \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t} \right)_{(\cdot, \cdot)} &= \\ \left(D_{\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t}} D_{\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t}} \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t} \right)_{(\cdot, \cdot)} + R(W_1, \gamma') \gamma' &= D_{\gamma'} D_{\gamma'} W_1 + R(W_1, \gamma') \gamma' \end{aligned}$$

با جایگذاری در رابطه بالا اثبات کامل می‌شود. $\square$

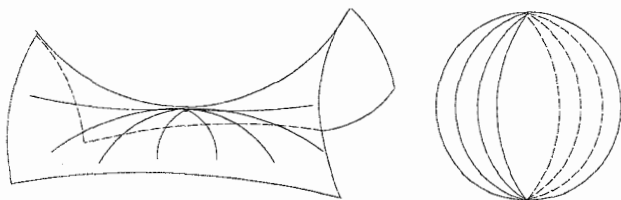
از این فرمول همچنین نتیجه می‌شود که $H_E(\gamma)(W_1, W_2)$ به W_2, W_1 بستگی دارد اما به انتخاب تغییرات وابسته به W_2, W_1 بستگی ندارد. لذا $H_E(\gamma)$ خوشتعریف است. تقارن را می‌توان از رابطه $\frac{\partial^2 E \circ \bar{\gamma}}{\partial s_1 \partial s_2} = \frac{\partial^2 E \circ \bar{\gamma}}{\partial s_2 \partial s_1}$ نتیجه گرفت (تعویض ترتیب مشتقات جزئی). صفر شدن آخرین عبارت در اثبات بالا برای برخی از میدانهای برداری دارای تعبیر هندسی است که در بخش بعد به آن می‌پردازیم.

۷.۱۳ میدانهای ژاکوبی و نقاط مزدوج

اولین کاربرد میدانهای ژاکوبی در بررسی رفتار ژئودزیکها

مقدمه: در این بخش ابتدا رابطه بین انحنا و ژئودزیکهای یک منیفلد را مطالعه می‌کنیم. به عبارت دیگر می‌خواهیم ببینیم که انحنا و ژئودزیکهای آن

منیفلد اثر می‌گذارد. اگر بخواهیم به طور شهودی این موضوع را بیان کنیم، می‌گوییم که اگر انحنای مثبت باشد، ژئودزیکها پس از گذشتن از یک نقطه مجدداً به هم نزدیک خواهند شد و احتمالاً دوباره یکدیگر را در نقطه‌ای دیگر قطع خواهند کرد (مانند ژئودزیکهای گذرنده از نقاط متقاطع در کره، شکل زیر را ببینید). ولی اگر انحنای منفی باشد، ژئودزیکها پس از گذشتن از یک نقطه از هم دور خواهند شد و امکان آنکه دوباره یکدیگر را قطع کنند، وجود نخواهد داشت (مانند زین اسب).



شکل ۷.۱۳: نزدیک شدن و دور شدن ژئودزیکها به ترتیب در منیفلدهای با انحنای مثبت و منفی

برای اینکه بتوان از این موضوع به یک سری نتایج توپولوژیکی دست یافت، باید معادله‌ای پیدا کرد که در آن رابطه بین تغییرات ژئودزیکها و انحنای منیفلدها مشخص شود. این معادله را معادله ژاکوبی و میدانهای برداری در طول یک ژئودزیک را که در این رابطه صدق کنند، میدانهای ژاکوبی خواهیم نامید. سپس نقاطی را که در آنها میدانهای ژاکوبی صفر می‌شوند، نقاط مزدوج می‌نامیم. این مفهوم در حسابان تغییرات برای مطالعه اندیس انرژی و تباهی آن کاربرد فراوانی دارد. در ابتدای این بخش به نحوه پیدایش معادله ژاکوبی می‌پردازیم. فرض کنیم $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ یک ژئودزیک و $\bar{\gamma} : [-\epsilon, +\epsilon] \times [0, 1] \rightarrow M$ یک تغییرات γ باشد. می‌گوییم $\bar{\gamma}$ یک تغییرات γ باشد. می‌گوییم $\bar{\gamma}$ یک تغییرات توسط ژئودزیکها است اگر هر یک از منحنیهای اصلی $\bar{\gamma}_s(t)$ نیز یک ژئودزیک بازای مقادیر مختلف s باشند. این موضوع ایجاب می‌کند که $\bar{\gamma}$ از کلاس C^∞ باشد.

چون $\bar{\gamma}(t)$ یک ژئودزیک است، داریم $D_{\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t}} \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t} = 0$. از این عبارت در جهت $\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s}$ مشتق

کواریان می‌گیریم. بنا برخواص مشتق کواریان داریم:

$$\bullet = D_{\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s}} D_{\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t}} \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t} = D_{\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t}} D_{\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t}} \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s} + R\left(\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s}, \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t}\right) \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t}$$

با استفاده از $\bar{\gamma}(t) = \gamma(t)$ و با جایگذاری $\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t} = \bar{\gamma}'(t)$ ، $\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s} = J(t)$ در رابطه بالا معادله زیر موسوم به معادله ژاکوبی بدست می‌آید.

$$D_{\bar{\gamma}'} D_{\bar{\gamma}'} J + R(J, \bar{\gamma}') \bar{\gamma}' = \bullet$$

تعریف ۱.۷.۱۳. فرض کنیم $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ یک ژئودزیک باشد. میدان برداری J در طول $\gamma(t)$ را یک میدان ژاکوبی گوئیم اگر برای هر $t \in [0, 1]$ در معادله ژاکوبی صدق کند.

مثال ۲.۷.۱۳. $\gamma'(t)$ میدان برداری مماس بر ژئودزیک $\gamma(t)$ یک میدان ژاکوبی در طول γ است زیرا $D_{\gamma'} \gamma' = \bullet$ و بنابر خاصیت پاد متقارن بودن تانسور انحنای $R(\gamma', \gamma') \gamma' = \bullet$. در اینجا $J(t) = \gamma'(t) \neq \bullet$ ، با شرایط اولیه:

$$J(\bullet) = \gamma'(\bullet), \quad D_{\gamma'} J(\bullet) = \bullet$$

t نیز یک میدان ژاکوبی است (چرا؟) که مقدار آن فقط و فقط وقتی صفر است که t برابر صفر باشد. شرایط اولیه $J_1(t) = t\gamma'(t)$ ، عبارتست از:

$$J_1(\bullet) = \bullet, \quad D_{\gamma'} J_1(\bullet) = \gamma'(\bullet)$$

این میدانهای ژاکوبی مماس بوده و تنها اطلاعاتی در مورد γ به ما می‌دهد نه تغییرات γ ، لذا از نظر حسابان تغییرات چندان کاربردی ندارند.

گزاره ۳.۷.۱۳. (وجود و یکتایی میدانهای ژاکوبی) فرض کنیم $\gamma : I \rightarrow M$ یک ژئودزیک روی M و $p = \gamma(a)$ ، برای $a \in I$ ، نقطه‌ای از γ باشد. آنگاه برای بردارهای

$X, Y \in T_p M$ ، یک میدان ژاکوبی یکتای J در طول γ وجود دارد که در شرایط اولیه $J(a) = X$ و $D_{\gamma'} J(a) = Y$ صدق می‌کند.

اثبات. یک پایه متعامد یکه $\{P_i\}$ برای $T_p M$ انتخاب می‌کنیم. می‌توان این پایه را توسط انتقال موازی روی γ توسعه داد^{۱۳}. با استفاده از این پایه می‌نویسیم $J(t) = J^i(t)P_i$ از آنجا $D_{\gamma'} J(t) = \frac{dJ^i}{dt}P_i + J^i D_{\gamma'} P_i = \frac{dJ^i}{dt}P_i$ (چون P_i ها به طور موازی انتقال پیدا کرده‌اند یعنی $D_{\gamma'} P_i = 0$). حال قرار می‌دهیم $\frac{dJ^i}{dt} = \dot{J}^i$ و $\frac{d\gamma}{dt} = \dot{\gamma}$. در بالا نشان دادیم که معادله‌ای به نام ژاکوبی وجود دارد که می‌توان با توجه به نماد بالا آن را به شکل موضعی زیر نوشت:

$$\ddot{J}^i + R_{jkl}^i J^j \dot{\gamma}^k \dot{\gamma}^l = 0.$$

این رابطه n معادله دیفرانسیل درجه دوم معمولی برای J^i ها با مقادیر $i = 1, \dots, n$ است. با جایگذاری $\dot{J}^i = V^i$ این معادلات دیفرانسیل را می‌توان به دستگاه معادلات دیفرانسیل درجه اول خطی با $2n$ مجهول $\{J^i, V^i\}$ تبدیل کرد.

$$\dot{V}^i + R_{jkl}^i J^j \dot{\gamma}^k \dot{\gamma}^l = 0.$$

قضیه وجود و یکتایی جواب در یک دستگاه معادلات دیفرانسیل از این نوع، وجود و یکتایی جواب در هر نقطه $a \in I$ با شرایط اولیه $J^i(a) = X^i$ و $V^i(a) = Y^i$ را تضمین می‌کند. □

نتیجه ۴.۷.۱۳. در طول هر ژئودزیک γ ، خانواده میدانهای ژاکوبی یک زیرفضای برداری $2n$ -بعدی از خانواده میدانهای برداری در طول ژئودزیک γ است.

^{۱۳} چنین پایه‌ای همواره وجود دارد. کافی است یک پایه متعامد یکه در یک نقطه از γ تعریف نموده و سپس توسط انتقال موازی به سرتاسر γ توسعه داد.

اثبات. فرض کنیم $p = \gamma(a)$ یک نقطه از ژئودزیک γ روی M باشد. یک نگاشت از $\mathcal{X}(\gamma)$ (خانواده میدانهای برداری روی γ) بصورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\mathcal{X}(\gamma) \rightarrow T_p M \oplus T_p M$$

$$J \mapsto (J(a), D_{\gamma'} J(a))$$

از اثبات گزاره قبل نتیجه می‌شود که این نگاشت دوسویی است. لذا زیر فضای برداری میدانهای ژاکوبی $2n$ -بعدی است. $\square$

مثال ۵.۷.۱۳. فرض کنیم M یک منیفلد ریمانی با انحنا برشی ثابت K بوده و γ یک ژئودزیک M باشد. می‌خواهیم خانواده‌ای از میدانهای ژاکوبی برای M معرفی کنیم. فرض کنیم γ برحسب طول قوس پارامتری شده باشد، یعنی $|\gamma'(t)| = 1$. بنا بر آنچه در فصلهای قبل در مورد منیفلدهای با انحنا برشی ثابت اثبات کردیم،

$$R(X, Y)Z = K(\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y)$$

فرض کنیم که J یک میدان ژاکوبی در طول γ طوری باشد که همواره بر γ عمود باشد. با جایگذاری در رابطه بالا داریم:

$$R(J, \gamma')\gamma' = K(\langle \gamma', \gamma' \rangle J - \langle J, \gamma' \rangle \gamma')$$

از آنجا چون $\langle \gamma', \gamma' \rangle = 1$ و $\langle J, \gamma' \rangle = 0$ ، داریم

$$R(J, \gamma')\gamma' = KJ$$

لذا معادله ژاکوبی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$D_{\gamma'}^2 J + KJ = 0$$

به منظور یافتن جوابی برای دستگاه معادلات فوق یک میدان برداری موازی در طول γ ، که همواره بر γ عمود باشد انتخاب کرده، آن را با P نمایش می‌دهیم. قرار می‌دهیم $J(t) = f(t)P(t)$ که در آن $f(t)$ توابعی هستند که به شرح زیر معرفی می‌کنیم. با جایگذاری این عبارت در دستگاه معادلات دیفرانسیل بالا و با استفاده از $D_\gamma J = \frac{df}{dt}P(t)$ داریم:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \mathcal{K}f = 0. \quad (1.13)$$

این یک معادله دیفرانسیل معمولی است که به راحتی می‌توان جوابهای آن را بدست آورد. جوابهایی که در شرایط $f(0) = 1$ و $f'(0) = 0$ صدق کنند، عبارتند از:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{K}}} \sin \sqrt{\mathcal{K}} t & \mathcal{K} > 0 \text{ اگر} \\ t & \mathcal{K} = 0 \text{ اگر} \\ \frac{1}{\sqrt{-\mathcal{K}}} \sinh \sqrt{-\mathcal{K}} t & \mathcal{K} < 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

لذا میدانهای ژاکوبی یک منیفلد ریمانی با انحنای برشی ثابت $\mathcal{K}$ عبارتند از:

$$J(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{K}}} \sin \sqrt{\mathcal{K}} t P(t) & \mathcal{K} > 0 \text{ اگر} \\ t P(t) & \mathcal{K} = 0 \text{ اگر} \\ \frac{1}{\sqrt{-\mathcal{K}}} \sinh \sqrt{-\mathcal{K}} t P(t) & \mathcal{K} < 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

گزاره وجود و یکتایی میدانهای ژاکوبی و نتیجه آن را به صورت زیر بیان می‌کنیم تا بتوان تعبیر هندسی دیگری از میدانهای ژاکوبی ارائه کرد.

گزاره ۳.۶۰۷.۱۳ اگر γ یک ژئودزیک روی M و J یک میدان ژاکوبی در طول γ باشد، آنگاه

الف. J از کلاس C^∞ است.

ب. مجموعه میدانهای ژاکوبی در طول ژئودزیک γ یک فضای برداری $2n$ بعدی حقیقی است.

ج. مجموعه میدانهای ژاکوبی در $t = 0$ یک زیر فضای برداری n -بعدی است.

اثبات. فرض کنیم خانواده $\{P_1, \dots, P_n\}$ یک دستگاه از میدانهای برداری متعامد یکه در طول γ باشند^{۱۴}. فرض کنیم J بر حسب اعضای پایه به صورت $J = f^i(t)P_i$ نوشته شود، دستگاه ژاکوبی عبارتست از:

$$\frac{d^2 f^i}{dt^2} + a_j^i(t)f^j(t) = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

که در آن $i = 1, \dots, n$ و $a_j^i = \langle R(P_j, \gamma')\gamma', P_i \rangle$. اینجا یک دستگاه معادلات دیفرانسیل درجه دوم داریم که از n معادله تشکیل شده است. می توان این دستگاه را به عنوان $2n$ معادله $2n$ مجهولی دیفرانسیل درجه اول خطی در نظر گرفت. جوابهای این دستگاه یعنی f^i ها C^∞ بوده، توسط $2n$ شرایط اولیه $J(0) = J$ و $(D_{\gamma'} J)(0) = W$ بیان می شوند. لذا هر سه حکم گزاره بالا برقرار است. $\square$

۱.۷.۱۳ تعبیر هندسی میدانهای ژاکوبی در رابطه با حسابان تغییرات

گزاره بعد را می توان به عنوان یک تعبیر هندسی از میدانهای ژاکوبی و رابطه آنها با میدان تغییرات توسط ژئودزیکها در نظر گرفت. به عبارت دیگر هر میدان ژاکوبی در طول ژئودزیک γ ، میدان تغییرات تغییراتی از γ توسط ژئودزیکها است.

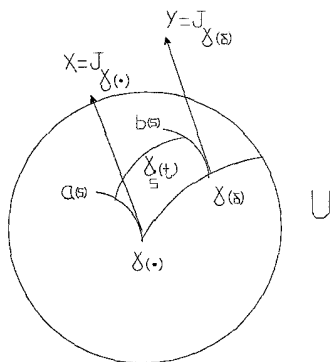
گزاره ۷.۷.۱۳. فرض کنیم $\bar{\gamma}$ یک تغییرات γ توسط ژئودزیک هایی باشد که الزاماً نقاط ابتدایی و انتهایی را ثابت نگه نمی دارند (یعنی $M \rightarrow [\cdot, \cdot] \times [-\epsilon, +\epsilon]$ از کلاس C^∞ بوده، $\bar{\gamma}(t) = \gamma(t)$ و $\bar{\gamma}_s(t)$ بازای هر s یک ژئودزیک باشد). آنگاه میدان تغییرات $W_t = \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s}(\cdot, t)$ یک میدان ژاکوبی است. برعکس هر میدان ژاکوبی در طول γ یک میدان تغییرات وابسته به تغییرات γ توسط ژئودزیکها است.

^{۱۴} چنین خانواده ای همیشه وجود دارد.

اثبات. فرض کنیم $\bar{\gamma}$ یک تغییرات γ توسط ژئودزیکها باشد. داریم $D_{\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t}} \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t} = 0$ و از آنجا بنابر آنچه در اثبات فرمول تغییرات دوم آمد، نتیجه می‌شود:

$$0 = D_{\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s}} D_{\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t}} \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t} = D_{\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t}} D_{\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t}} \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s} + R\left(\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s}, \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t}\right) \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t}$$

از این عبارت بنا بر تعریف نتیجه می‌شود $W_t = \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s}(\cdot, t)$ یک میدان ژاکوبی است. برعکس: فرض کنیم $M \rightarrow [\cdot, 1] : \gamma$ یک ژئودزیک روی M بوده و $0 < \delta < 1$ به اندازه کافی کوچک طوری فرض شود که $\gamma|_{[0, \delta]}$ در یک گوی ژئودزیکی U به مرکز $\gamma(0)$ قرار گیرد.



شکل ۸.۱۳: میدانهای ژاکوبی یک ژئودزیک و منحنیهای انتگرال آنها

فرض کنیم $X \in T_{\gamma(0)}M$ و $Y \in T_{\gamma(\delta)}M$. همواره می‌توان یک میدان ژاکوبی J در طول $\gamma|_{[0, \delta]}$ ساخت که داشته باشیم $J_{\gamma(0)} = X$ و $J_{\gamma(\delta)} = Y$. در حقیقت فرض کنیم $a(s)$ یک منحنی گذرنده از $\gamma(0)$ با بردار سرعت X و $b(s)$ یک منحنی گذرنده از $\gamma(\delta)$ با بردار سرعت Y باشد. برای s های به اندازه کافی کوچک $a(s)$ و $b(s)$ در U قرار می‌گیرند. بنابر این آنها را می‌توان توسط یک ژئودزیک یکتای کمین $\gamma_s(t)$ به یکدیگر

وصل کرد. تغییرات توسط ژئودزیک $\gamma|_{[0,\delta]}$ را بصورت زیر تعریف میکنیم:

$$\bar{\gamma}:]-\epsilon, +\epsilon[\times [0, \delta] \rightarrow M$$

$$(s, t) \mapsto \delta_s(t)$$

بنا بر بخش اول این گزاره، $J: t \mapsto \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s}(\cdot, t)$ یک میدان ژاکوبی است (به طوری که $J_{\gamma(\cdot)} = X$ و $J_{\gamma(\delta)} = Y$). حال $\mathcal{J}(\gamma)$ ، خانواده میدانهای ژاکوبی در طول γ و نگاشت زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\varphi: \mathcal{J}(\gamma) \rightarrow T_{\gamma(\cdot)}M \times T_{\gamma(\delta)}M$$

$$J \mapsto (J_{\gamma(\cdot)}, J_{\gamma(\delta)})$$

دیدیم که این نگاشت پوششی است. چون دو فضای برداری دارای بعد $2n$ بوده و φ خطی است، از آن نتیجه می‌گیریم که φ یک ایزومورفیسم است. لذا هر میدان ژاکوبی در طول $\gamma|_{[0,\delta]}$ توسط مقدار آن در $\gamma(\cdot)$ و $\gamma(\delta)$ بیان می‌گردد. از طرف دیگر تحدید به $[0, \delta]$ باتوجه به فشردگی فاصله $[0, 1]$ که γ در آن تعریف می‌شود، یک شرط اساسی نیست. $\square$

۲.۷.۱۳ تعبیر هندسی میدانهای ژاکوبی در بیان رابطه بین انحنا و توزیع ژئودزیکها

همانطور که در مقدمه این بخش بیان گردید، رابطه مستقیمی بین انحنا و نحوه توزیع ژئودزیکها وجود دارد. برای آنکه بتوان این رابطه را توسط یک معادله بیان نمود، از میدانهای ژاکوبی استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $\gamma: [0, \delta] \rightarrow M$ یک ژئودزیک روی M باشد. آنگاه یک میدان ژاکوبی J در طول γ با شرایط اولیه $J(\cdot) = 0$ به صورت زیر با استفاده از نگاشت نمایی تعریف می‌کنیم.

یک چنین میدان ژاکوبی ای همواره وجود دارد^{۱۵}. با استفاده از معادله ژاکوبی مربوط به J و بسط تیلور می‌توان به راحتی رابطه زیر را بدست آورد که برای جلوگیری از طولانی شدن این مبحث از آوردن جزئیات آن خودداری می‌کنیم^{۱۶}. فرض کنیم $|\omega| = 1$ ، آنگاه اندازه تغییرات $|\frac{\partial f}{\partial s}(t, \cdot)|$ در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$|\frac{\partial f}{\partial s}(t, \cdot)| = |J(t)| = t - \frac{1}{\epsilon} \mathcal{K}(p, \pi) t^3 + \tilde{R}(t) \quad (2.13)$$

که در آن $\mathcal{K}_p(\pi)$ انحنا ی برشی در نقطه p مربوط به صفحه π و $\tilde{R}(t)$ جمله مربوط به بسط تیلور در نقطه $t = 0$ است به طوری که $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tilde{R}(t)}{t^3} = 0$. با استفاده از رابطه (2.13) می‌توان به بیان تغییر هندسی رابطه بین انحنا و توزیع ژئودزیکها به شرح زیر پرداخت. همانطوری که از رابطه (2.13) نتیجه می‌شود، اندازه تغییرات $\frac{\partial f}{\partial s}(t, \cdot)$ یا به عبارت دیگر اندازه انحراف از ژئودزیک γ بستگی به علامت $\mathcal{K}$ دارد. یعنی وقتی $\mathcal{K} < 0$ باشد، مقدار اندازه تغییرات $\frac{\partial f}{\partial s}(t, \cdot)$ افزایش پیدا می‌کند. یا به عبارت دیگر از نظر هندسی ژئودزیکها از یکدیگر دور می‌شوند و با افزایش t این فاصله به سرعت افزایش پیدا می‌کند. اما از طرف دیگر وقتی $\mathcal{K} > 0$ باشد، مقدار اندازه تغییرات کمتر بوده و با افزایش t کاهش نیز پیدا می‌کند. یعنی از نظر هندسی با افزایش t ژئودزیکها بیشتر به هم نزدیک می‌شوند.

در ادامه این بخش به تعریف نقاط مزدوج می‌پردازیم. مفهوم نقاط مزدوج در طول یک ژئودزیک به ما اجازه می‌دهد که تباهی و اندیس انرژی را مطالعه کنیم.

^{۱۵} کافی است با فرض $v \in T_p M$ و $w \in T_v T_p M$ یک میدان ژاکوبی در طول ژئودزیک γ توسط $\gamma(t) := \exp_p tv$ تعریف می‌کنیم. آنگاه یک تغییرات $f(t, s) = \exp_p tv(s)$ که در آن $V(s)$ یک منحنی در $T_p M$ با شرایط اولیه $v(0) = v = \gamma'(0)$ ، $p = \gamma(0)$ و $v(0) = w = J'(0)$ است، در نظر گرفته، قرار می‌دهیم $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, \cdot)$. ثابت می‌شود که این تنها راهی است که می‌توان در طول γ یک میدان ژاکوبی غیرمماسی تعریف نمود که در شرط $J(0) = 0$ صدق کند.

^{۱۶} برای توضیحات بیشتر در این رابطه می‌توانید به کتاب [۴۵] صفحات ۱۱۳-۱۱۵ مراجعه کنید.

تعریف ۸.۷.۱۳. فرض کنیم γ یک ژئودزیک روی M بوده و $\gamma(a) = p$ و $\gamma(b) = q$ دو نقطه از γ باشند. می‌گوییم p و q در طول γ مزدوج^{۱۷} یکدیگرند، اگر یک میدان ژاکوبی غیر صفر J در طول γ موجود باشد به طوری که $J(a) = 0$ و $J(b) = 0$. بعد فضای برداری میدانهای ژاکوبی‌ای را که در p و q صفر می‌شوند، تکرر^{۱۸} p و q نامیده، آن را با ν نمایش می‌دهیم.

در تعریف فوق به طور دقیقتر می‌توان گفت که پارامترهای a و b مزدوج یکدیگر هستند، زیرا ممکن است نقاط p و q به ازای دو مقدار متفاوت از پارامترها بر یکدیگر منطبق شوند اما مزدوج یکدیگر نباشند.

تذکر: اصولاً ν ، تکرر نقطه‌های p و q ، باید عددی بین صفر و n باشد بنا بر قسمت III از گزاره ۷.۷.۱۳ در صفحه ۳۷۰ تعداد n میدان ژاکوبی مستقل در هر نقطه وجود دارد که فضای برداری میدانهای ژاکوبی را تولید می‌کند. اما می‌توان نشان داد $0 \leq \nu \leq n - 1$. در حقیقت فرض کنیم $J_t = t\gamma'$ یک میدان برداری در طول ژئودزیک γ باشد (مثال ۲.۷.۱۳ در صفحه ۳۶۶ را ببینید). واضح است که J_t یک میدان ژاکوبی است زیرا

$$\begin{aligned} D_{\gamma'} D_{\gamma'} J_t + R(J_t, \gamma') \gamma' &= D_{\gamma'} (\gamma' + t D_{\gamma'} \gamma') + t R(\gamma', \gamma') \gamma' \\ &= D_{\gamma'} \gamma' = 0. \end{aligned}$$

چون γ ژئودزیک بوده و تانسور انحنا پاد متقارن است. از طرف دیگر $J. = 0$ و $J_1 = \gamma'(1) \neq 0$ ، زیرا $\|\gamma'(t)\|$ ثابت است (γ بر حسب طول قوس پارامتری شده است). بنابراین لااقل یک میدان ژاکوبی غیر صفر در طول γ (میدان مماسی) وجود دارد که به طور همزمان در $\gamma(0)$ و $\gamma(1)$

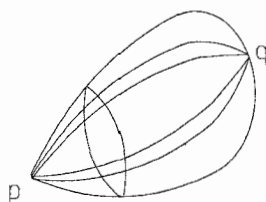
^{۱۷}Conjugate (Conjugué)

^{۱۸}Multiplicity (Multiplicité)

صفر نمی‌شود. بنابراین ν بعد فضای برداری میدانهای ژاکوبی ای که در این نقطه صفر می‌شوند، کوچکتر یا مساوی $n - 1$ است (یعنی $\nu \leq n - 1$). در مثال کره در زیر خواهیم دید که تکرر در دو نقطه می‌تواند $\nu = n - 1$ باشد.

نتیجه ۹.۷.۱۳. دو نقطه p و q در طول یک ژئودزیک، مزدوج با تکرر ν هستند اگر و تنها اگر یک تغییرات γ با نقاط ابتدا و انتهای مشخص از ژئودزیکها موجود باشد که دارای ν پارامتر باشد.

در حالت خاص ممکن است تعداد نامتناهی از ژئودزیکهای گذرنده از p در نقطه q یکدیگر را قطع نمایند.



شکل ۹.۱۳: p و q مزدوج، با تکرر ۲، هستند

تذکر: در اثبات گزاره ۷.۷.۱۳ در صفحه ۳۷۰ دیدیم که یک میدان ژاکوبی به طور کامل بر اساس مقادیرش در دو نقطه غیر مزدوج قابل بیان است. نقاط $a(s)$ و $b(s)$ مزدوج نیستند زیرا توسط یک ژئودزیک یکتا متصل می‌شوند.

تمرین ۱۰.۷.۱۳. فرض کنیم M یک منیفلد ریمانی فشرده با انحنای برشی ثابت K باشد. نشان دهید اگر $K \leq 0$ ، آنگاه میدان ژاکوبی J صفر است.^{۱۹}

^{۱۹} حل این تمرین در بخش نقاط مزدوج بدون استفاده از فشرده‌گی M به عنوان مثال آورده خواهد شد.

(راهنمایی: جوابهای معادله دیفرانسیل (۱۰.۱۳) در صفحه ۳۶۹ را در حالت کلی نوشته، از خاصیت کراندار بودن f در یک فضای فشرده استفاده نموده - وقتی $t \rightarrow \infty$ آنگاه $f \rightarrow 0$ که یک تناقض است - نشان دهید ضرایب جوابهای (۱۰.۱۳) باید صفر باشد)

تمرین ۱۱.۷.۱۳. درستی نتیجه ۹.۷.۱۳ را تحقیق کنید.

(راهنمایی: از گزاره ۷.۷.۱۳ در صفحه ۳۷۰ استفاده کنید.)

۳.۷.۱۳ چند مثال از میدانهای ژاکوبی و نقاط مزدوج

مثال ۱۲.۷.۱۳. منیفلد مسطح همبند. منیفلد مسطح^۲ منیفلدی است که تانسور انحناي آن صفر باشد. در این صورت معادله میدانهای ژاکوبی عبارت است از:

$$\frac{d^2 f^i}{dt^2} = 0 \quad J = f^i(t) P_i$$

، لذا f^i ها خطی بوده و حداکثر یک بار صفر می شوند. در نتیجه میدانهای ژاکوبی در منیفلدهای مسطح فقط یک بار صفر می شود. بنابراین در این منیفلدها نقاط مزدوج در طول هیچ ژئودزیک وجود ندارد.

مثال ۱۳.۷.۱۳. منیفلدهای با انحناي برشی منفی یا صفر. اگر انحناي برشی منیفلد M منفی یا صفر باشد (به ازای هر نقطه $x \in M$ و به ازای هر صفحه گذرنده از x)، آنگاه در M نقاط مزدوج وجود ندارد. در حقیقت فرض کنیم $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ یک ژئودزیک و J یک میدان ژاکوبی در طول γ باشد که در نقطه ۰ و ۱ برابر صفر می شود، نشان خواهیم داد $J = 0$. داریم:

$$D_{\gamma'} D_{\gamma'} J + R(J, \gamma') \gamma' = 0$$

از آنجا

$$\begin{aligned} 0 &= \langle D_{\gamma'} D_{\gamma'} J, J \rangle + \langle R(J, \gamma') \gamma', J \rangle \\ &= \frac{d}{dt} \langle D_{\gamma'} J, J \rangle - \|D_{\gamma'} J\|^2 + \langle R(J, \gamma') \gamma', J \rangle. \end{aligned}$$

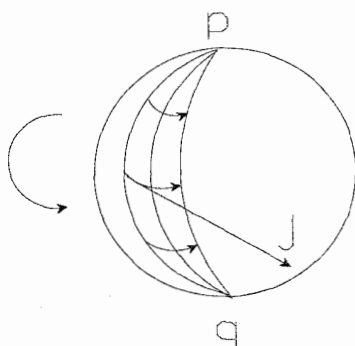
بنابراین اگر انحنای برشی در تمام نقاط منفی یا صفر باشد، آخرین جمله در عبارت بالا نیز منفی شده و داریم

$$\frac{d}{dt} \langle D_{\gamma'} J, J \rangle \geq 0, \quad (3.13)$$

که در آن تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $\langle D_{\gamma'} J, J \rangle = c$. که با استفاده از شرط اولیه $J_1 = 0$ داریم $c = 0$. بنابراین چون J با طول ثابت فرض نشده است، تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $D_{\gamma'} J = 0$ (یا $J = 0$ که در این صورت حکم برقرار می‌شود). از رابطه (3.13) نتیجه می‌شود تابع $\langle D_{\gamma'} J, J \rangle$ صعودی است. چون فرض کرده‌ایم $J_1 = 0$ ، این تابع روی فاصله $[0, 1]$ صفر می‌شود، یعنی $\langle D_{\gamma'} J, J \rangle = 0$ و دیدیم این عبارت صفر است اگر و تنها اگر $D_{\gamma'} J = 0$ باشد. بنابراین J در طول γ ثابت است و چون $J = 0$ ، بنابراین $J = 0$ و در نتیجه نقاط مزدوج روی فضای با انحنای منفی یا صفر وجود ندارد.

مثال ۱۴.۷.۱۳. n -بعدی S^n . فرض کنیم p و q دو نقطه متقاطع^{۲۱} روی کره S^n بوده و γ یک ژئودزیک بین p و q باشد. با انجام یک دوران S^n حول محور pq تصویر γ همچنان یک ژئودزیک خواهد بود (زیرا دوران یک ایزومتري است). به این ترتیب یک تغییرات از γ توسط ژئودزیک‌هایی با نقاط انتهایی ثابت می‌سازیم. میدان تغییرات یک میدان ژاکوبی خواهد بود که در p و q صفر می‌شود. به این نحو p و q نقاط مزدوج هستند. برای S^2 میدان تغییرات J فقط در یک جهت مستقل (و عکس آن) می‌تواند دوران کند و

^{۲۱}Antipodale



شکل ۱۰.۱۳: تغییرات و نقاط مزدوج روی کره.

بنابراین تکرر آن برابر یک است، اما برای S^n می‌توان $n - 1$ دوران انجام داد که مستقل از S^n باشد. بنابراین تکرر p و q برابر $n - 1$ است. اگر نقاط p و q متقاطع نباشند، مزدوج نیستند. زیرا تنها دو ژئودزیک، در روی دایره عظیمه‌ای که از این دو نقطه می‌گذرد، وجود دارد که از p و q می‌گذرد.

۴.۷.۱۳ دومین کاربرد میدانهای ژاکوبی و نقاط مزدوج

مقدمه: دومین کاربرد میدانهای ژاکوبی با استفاده از نقاط مزدوج این است که به این سؤال پاسخ دهیم: چه وقتی نگاشت نمایی یک دیفیومورفیسم موضعی است؟ این موضوع اساس تعریف نگاشت نمایی است. زیرا با استفاده از این خاصیت می‌توان یک دیفیومورفیسم موضعی بین یک منیفلد و فضای برداری مماس بر آن که به نوعی همان فضای اقلیدسی است برقرار نمود. این خاصیت مهم اساس تعریف مختصات نرمال است.

می‌دانیم که اگر M یک منیفلد ریمانی کامل باشد، آنگاه نگاشت نمایی در تمام نقاط $T_p M$ تعریف شده و یک دیفیومورفیسم موضعی در یک همسایگی به اندازه کافی کوچک

صفر (به مرکز $T_p M$) است. اما همواره این احتمال وجود دارد که اگر این همسایگی را بزرگتر کنیم یا از نقطه صفر دور شویم دیگر نگاشت نمایی حتی دیفیومورفیسم موضعی نیز نباشد. در اینجا خواهیم دید که شرط آن که بتوان به پرسش بالا جواب مثبت داد، عدم وجود زوجهایی از نقاط مزدوج در طول ژئودزیک ها است.

ء به عبارت دیگر مسئله مهم این است که نقاط مزدوج دقیقاً تصاویر نقاط بحرانی نگاشت نمایی هستند و در نتیجه میتوان گفت که اگر $p \in M$ و $X \in T_p M$ و $q = \exp_p X$ ، آنگاه نگاشت $\exp_p$ در یک همسایگی X دیفیومورفیسم موضعی است اگر و تنها اگر q در طول ژئودزیک $\gamma(t) = \exp_p tV$ مزدوج p نباشد. با موضوع وجود یا عدم وجود نقاط غیر مزدوج و اهمیت آن در بخش بعد بیشتر آشنا خواهیم شد.

گزاره ۱۵.۷.۱۳. نقطه $p \in M$ و نگاشت نمایی $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ را در نظر میگیریم. نقطه p مزدوج نقطه $q = \exp_p X$ در طول ژئودزیک $\gamma_X = \exp_p tX$ است اگر و تنها اگر X یک نقطه بحرانی برای $\exp_p$ باشد.

یک نتیجه از این گزاره را میتوان با استفاده از قضیه سارد^{۲۲} به شکل زیر بیان کرد.

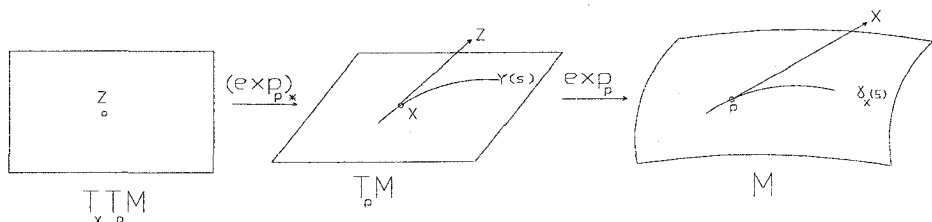
نتیجه ۱۶.۷.۱۳. فرض کنیم $p \in M$. آنگاه تقریباً برای تمام نقاط $p, p \in M$ در طول هیچ ژئودزیکی مزدوج q نیست.

از گزاره ۱۵.۷.۱۳ و مثال ۵.۷.۱۳ نتیجه زیر حاصل میشود.

نتیجه ۱۷.۷.۱۳. اگر M دارای نحنای برشی منفی یا صفر (نه الزاماً ثابت) باشد، آنگاه نگاشت نمایی $\exp_p$ نقاط بحرانی نداشته و در نتیجه یک دیفیومورفیسم موضعی است. (مثال ۵.۷.۱۳ در بخش قبل را ببینید)

^{۲۲} the Sard theorem. قضیه سارد: مجموعه مقادیر بحرانی یک نگاشت هموار $f : M \rightarrow N$ دارای اندازه صفر است. صفحه ۴۰ از [۴۸] را ببینید.

اثبات. گزاره ۱۵.۷.۱۳ فرض کنید X نقطه بحرانی تابع نمایشی $\exp_p$ باشد، آنگاه بنابر تعریف برداری مانند $0 \neq Z$ در $T_X T_p M$ وجود دارد به طوری که $((\exp_p)_*)_X = 0$.



شکل ۱۱.۱۳: نگاشت $(\exp)_*$ و اثر آن بر نقاط بحرانی

فرض کنیم U یک همسایگی صفر در $\mathbb{R}^n$ بوده و نگاشت

$$Y : U \rightarrow T_p M$$

$$s \mapsto Y(s)$$

یک منحنی انتگرال Z گذرنده از X باشد (یعنی $Y(0) = X$ و $\frac{dY}{ds}(0) = Z$). نگاشت

$$\bar{\gamma} : V \rightarrow M$$

$$(s, t) \mapsto \exp_p tY(s)$$

را که در آن V یک همسایگی صفر در $\mathbb{R}^2$ است، در نظر می‌گیریم. γ' یک تغییرات توسط ژنودزیک‌ها از منحنی $\gamma_X(t) = \exp_p tX = \gamma_X(t)$ بوده و میدان برداری $W(t)$ که

$$W(t) = \left(\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s} \right)_{s=0} = \frac{\partial}{\partial s} (\exp_p tY(s))_{s=0}.$$

یک میدان ژاکوبی در طول ژنودزیک $\gamma_X(t)$ است که در نقاط p و q صفر می‌شوند. در حقیقت

$$W(0) = \left(\frac{\partial}{\partial s} \exp_p (0 \cdot Y(s)) \right)_{s=0} = 0.$$

$$W(1) = \left(\frac{\partial}{\partial s} \exp_p Y(s) \right)_{s=0} = ((\exp_p)_*)_X \frac{dY(s)}{ds}(\cdot) = ((\exp_p)_*)_X Z = \cdot$$

بنابراین برای آنکه p و q مزدوج یکدیگر باشند، کافی است نشان دهیم که W به خودی خود صفر نیست. این موضوع با محاسبه ساده زیر قابل تحقیق است.

$$\begin{aligned} D_{\gamma'} W(\cdot) &= D_{\gamma'} \left(\frac{\partial}{\partial s} \exp_p tY(s) \right)_{s=0} = (D_{\frac{\partial \gamma'}{\partial t}} D_{\frac{\partial \gamma'}{\partial s}} \exp_p tY(s))_{(s,t)=(\cdot,0)} \\ &= D_{\frac{\partial \gamma}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial t} \exp_p tY(s)_{(\cdot,0)} = (D_{\frac{\partial \gamma}{\partial s}} Y(s))_{s=0} = Z \neq \cdot \end{aligned}$$

زیرا بنا بر تعریف $\frac{d}{dt}(\exp_p tX)(\cdot) = X$

برعکس (برهان خلف) فرض کنیم p و q در طول ژئودزیک $\gamma_X(t) = \exp_p tX$ مزدوج یکدیگر باشند و $((\exp_p)_*)_X \neq \cdot$. یک پایه $\{Z_1, \dots, Z_n\}$ از $T_X T_p M$ انتخاب می‌کنیم. لذا میدانهای برداری $((\exp_p)_*)_X Z_i$ مستقل هستند (چرا؟). مجدداً مانند قبل منحنی‌های انتگرال Y_i و Z_i گذرنده از X و میدانهای ژاکوبی W_i در طول γ را در نظر می‌گیریم.

$$W_i = \left(\frac{\partial}{\partial s} \exp_p tY_i(s) \right)_{s=0}$$

همانطور که در بالا دیدیم $W_i(\cdot) = \cdot$ و $W_i(1) \neq \cdot$ زیرا

$$W_i = \left(\frac{\partial}{\partial s} \exp_p Y(s) \right)_{s=0} = ((\exp_p)_*)_X Z_i \neq \cdot$$

p و q مزدوج یکدیگرند. بنابراین یک میدان ژاکوبی غیر صفر وجود دارد که در p و q صفر می‌شود. خانواده میدانهای ژاکوبی صفرشونده در p و q یک فضای برداری با بعد n است. در نتیجه هر میدان ژاکوبی J_t صفرشونده در p را می‌توان به صورت ترکیب خطی از W_i هانوش.

$$J_t = a_1(W_1)_t + \dots + a_n(W_n)_t$$

به ازای $t = 1$ میدان ژاکوبی J_1 در نقطه p را داریم. چون q مزدوج p است، داریم:

$$0 = J_1 = a_1(W_1)(1) + \dots + a_n(W_n)(1)$$

چون $W_i(1) \neq 0$ به ازای $i = 1, \dots, n$ داریم $a_i = 0$ و لذا $J_t = 0$ که یک تناقض با فرض غیر صفر بودن میدان ژاکوبی J_t در بالا است. لذا فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود. $\square$

۸.۱۳ نقاط مزدوج و تباهی هسیان

در این بخش به اثبات قضیه‌ای می‌پردازیم که رابطه بین نقاط مزدوج و تباهی هسیان را بیان می‌کند.

فضای برداری میدانهای ژاکوبی صفرشونده در p و q را توسط $\mathcal{J}_{(p,q)}(\gamma)$ نمایش می‌دهیم. بعد این فضای برداری را تکرر نقاط مزدوج نامیدیم.

قضیه ۸.۱۳. فرض کنیم γ یک ژئودزیک در $\Omega(p, q)$ باشد. در اینصورت J یک میدان ژاکوبی صفر شونده در p و q است اگر و تنها اگر بازای هر W در $T_\alpha \Omega$ داشته باشیم $H_E(\gamma)(J, W)$ یعنی

$$J \in \mathcal{J}_{p,q}(\gamma) \Leftrightarrow \forall W \in T_\gamma \Omega \quad H_E(\gamma)(J, W) = 0$$

به عبارت دیگر $\mathcal{J}_{p,q} = \text{Ker} H_E(\gamma)$.

از قضیه فوق بلافاصله نتایج زیر حاصل می‌شود.

• الف: $H_E(\gamma)$ تباهیده است اگر و تنها اگر p و q در طول γ مزدوج باشند.

• ب: تباهی $H_E(\gamma)$ برابر تکرر نقاط مزدوج p و q است.

• ج: تباهی هسیان متاهی بوده، در رابطه زیر صدق می‌کند.

$$0 \leq \nu \leq n-1$$

اثبات قضیه ۱.۸.۱۳ اثبات این قضیه نتیجه ساده‌ای از فرمول تغییرات دوم است. فرض کنیم $J \in \mathcal{J}_{p,q}(\gamma)$ ، نشان می‌دهیم $H_E(\gamma)(J, W) = 0$ $\forall W \in T_\gamma \Omega$ می‌دانیم $J \in T_\gamma \Omega$ و J از کلاس C^∞ است، لذا با فرض $W_1 = J$ و $W_2 = W$ از فرمول تغییرات دوم داریم:

$$\forall W \in T_\gamma \Omega \quad H_E(\gamma)(J, W) = - \sum_t \langle W_t, \cdot \rangle - \int_0^1 \langle W_t, \cdot \rangle dt = 0$$

برعکس فرض کنیم $W_1 \in T_\gamma \Omega$ یک میدان برداری در طول γ به نحوی باشد که بازای هر $W_2 \in T_\gamma \Omega$ داشته باشیم $H_E(\gamma)(W_1, W_2) = 0$ نشان می‌دهیم W_1 یک میدان ژاکوبی صفر شونده در p و q است (یعنی $W_1 \in \mathcal{J}_{p,q}(\gamma)$).

یک افزاز از فاصله $[0, 1]$ طوری در نظر می‌گیریم که W_1 در هر زیر فاصله از $0 = t_0 < \dots < t_k = 1$ از کلاس C^∞ بوده و تابع $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ را طوری تعریف می‌کنیم که در هر نقطه t_i برابر صفر و در سایر نقاط مثبت باشد. فرض می‌کنیم

$$W_2 = f(t)(D_{\gamma'} D_{\gamma'} W_1 + R(W_1, \gamma') \gamma')$$

از آنجا داریم:

$$0 = H_E(\gamma)(W_1, W_2) = - \int_0^1 f(t) \|D_{\gamma'} D_{\gamma'} W_1 + R(W_1, \gamma') \gamma'\|^2 dt$$

بنابراین $\|D_{\gamma'} D_{\gamma'} W_1 + R(W_1, \gamma') \gamma'\|^2 = 0$ که از آن نتیجه می‌شود که W_1 در هر زیر فاصله از $[0, 1]$ در معادله ژاکوبی صدق می‌کند. بنابراین W_1 یک میدان به طور تکه‌ای ژاکوبی است. حال کافی است نشان دهیم که W_1 از کلاس C^∞ است. فرض کنیم

$W_2 \in T_{\gamma}\Omega$ یک میدان برداری باشد که توسط رابطه $W_2(t_i) = \Delta_{t_i} D_{\gamma'} W_1$ تعریف شود، لذا داریم:

$$\bullet = H_E(\gamma)(W_1, W_2) = - \sum_{i=1}^{k-1} \|\Delta_{t_i} D_{\gamma'} W_1\|^2$$

در نتیجه $\Delta_{t_i} D_{\gamma'} W_1 = \bullet$ و لذا $D_{\gamma'} W_1$ دارای ناپیوستگی نیست. بنابراین یک جواب معادله ژاکوبی کاملاً توسط بردارهای $W_1(t_i)$ و $D_{\gamma'} W_1(t_i)$ بیان می‌گردد. از اینجا نتیجه می‌گردد که k میدان ژاکوبی $W_1|_{[t_{i-1}, t_i]}$ طوری به یکدیگر متصل شده‌اند که یک میدان W_1 از کلاس C^∞ تولید می‌نمایند. $\square$

۹.۱۳ قضیه اندیس

در این بخش به بیان قضیه‌ای می‌پردازیم که یکی از قضایای اساسی در هندسه ریمانی است. اندیس هسیان انرژی برای یک ژئودزیک γ عبارت است از بعد بزرگترین زیرفضای برداری $T_{\gamma}\Omega$ که در آن $H_E(\gamma)$ معین منفی باشد. به بیان ساده، اندیس، تعداد جهت های مستقلی است که در آن جهت ها γ می‌تواند برای کاهش طولش تغییر جهت دهد. به طور مشابه اندیس یک نقطه بحرانی از یک تابع روی $\mathbb{R}^n$ ، عبارتست از تعداد مقادیر ویژه منفی هسیان آن تابع.

قضیه اندیس تضمین می‌کند که اندیس هسیان انرژی یک عدد متناهی است که می‌توان آن را با استفاده از تعداد نقاط مزدوج با نقطه $\gamma(0)$ در طول γ و تکرر آنها بدست آورد.

قضیه ۱.۹.۱۳. (قضیه اندیس مورس) فرض کنیم $M \rightarrow [0, 1]$ یک ژئودزیک روی M باشد. $\mathcal{I}$ اندیس $H_E(\gamma)$ عددی است متناهی برابر با تعداد نقاط مزدوج با نقطه

^{۲۲} باید توجه داشت که قضیه متفاوت ولی بسیار جالب دیگری با این نام در هندسه وجود دارد که توسط Atiyah, M.F. and Singer, I.M. مورد مطالعه قرار گرفته است. ما در اینجا فقط به قضیه مورس می‌پردازیم.

$p = \gamma(0)$ (بافرض $0 < t < 1$) در طول γ ، که مقدار آن در هر یک از نقاط مزدوج با توجه به تکرر آن نقطه محاسبه می‌شود.

قبل از آنکه به اثبات قضیه اندیس مورس بپردازیم، چند نتیجه از آن را بررسی می‌کنیم.

نتیجه ۲.۹.۱۳. یک تکه از ژئودزیک $M \rightarrow [0, 1]$ ، γ ، در طول γ ، فقط می‌تواند تعدادی متناهی نقطه مزدوج با نقطه $\gamma(0)$ داشته باشد.

از گزاره ۳.۵.۱۳ در صفحه ۳۶۲ نتیجه می‌شود:

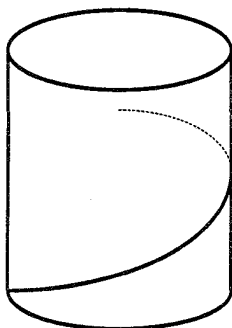
نتیجه ۳.۹.۱۳. اگر یک قطعه از ژئودزیک $M \rightarrow [0, 1]$ دارای یک نقطه مزدوج با نقطه $\gamma(0)$ باشد، نمی‌تواند ژئودزیک کمینه باشد.

به عنوان مثال در روی کره ژئودزیکی که طول آن از نیم دایره عظیمه بیشتر باشد و نقطه p را به q وصل کند، ژئودزیک کمینه نیست. زیرا اگر $p = \gamma(0)$ فرض شود، p' مزدوج p روی γ است. توجه نمایید که عکس نتیجه فوق برقرار نیست، یعنی یک ژئودزیک بدون نقاط مزدوج الزاماً کمینه نیست. به عنوان مثال در استوانه $S^1 \times \mathbb{R}$ ژئودزیکها عبارتند از دایره (سطح مقطع استوانه)، خطوط راست (یالهای استوانه) و مارپیچ که در طول هیچ کدام از آنها نقاط مزدوج وجود ندارد. اما هیچ ژئودزیکی که بیش از نصف استوانه را دور بزند، کمینه نیست. شکل ۹.۱۳ را ببینید. همچنان از گزاره ۳.۵.۱۳ در صفحه ۳۶۲ نتیجه می‌شود:

نتیجه ۴.۹.۱۳. اگر یک تکه ژئودزیک $M \rightarrow [0, 1]$ شامل نقاط مزدوج با $\gamma(0)$ نباشد، آنگاه الزاماً γ ژئودزیک کمینه نیست.

در خاتمه با استفاده از مثال ۵.۷.۱۳ در صفحه ۳۶۸ داریم:

نتیجه ۵.۹.۱۳. روی یک منیفلد ریمانی با انحنای برشی منفی یا صفر هر تکه از یک ژئودزیک به طور موضعی کمینه است.



شکل ۱۲.۱۳: عدم وجود نقاط مزدوج برای کمینه بودن ژئودزیکها کافی نیست.

قبل از اینکه به اثبات قضیه اندیس بپردازیم، گزاره زیر را که در اثبات قضیه نقش دارد، می‌آوریم.^{۲۳}

گزاره ۶.۹.۱۳. اگر نقاط $\gamma(a)$ و $\gamma(b)$ در روی γ مزدوج یکدیگر نباشند، آنگاه یک میدان ژاکوبی در طول γ توسط مقادیرش در نقاط $\gamma(a)$ و $\gamma(b)$ تعریف می‌گردد.

اثبات. گزاره ۶.۹.۱۳ فرض کنیم J و W دو میدان ژاکوبی باشند که در نقاط $\gamma(a)$ و $\gamma(b)$ بر یکدیگر منطبق باشند. آنگاه J_W نیز یک میدان ژاکوبی است که در نقاط $\gamma(a)$ و $\gamma(b)$ صفر می‌شود. اما چون این نقاط مزدوج نیستند، $J - W$ باید صفر باشد و نتیجه $J = W$. بنابراین هر میدان ژاکوبی توسط مقادیرش در نقاط انتهایی مشخص می‌شود. $\square$

اثبات قضیه اندیس: γ در فاصله فشرده $[0, 1]$ تعریف شده است. لذا می‌توان یک افراز $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ طوری انتخاب کرد که با نمادگذاری $\gamma_{t_{i-1}}^i := \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ در یک گوی ژئودزیکی قرار گرفته و در نتیجه ژئودزیک کمینه باشد. در

^{۲۳} رجوع کنید به [۴۰] صفحه ۲۹.

اینجا از نمادهای زیر استفاده خواهیم کرد. فرض کنیم فضای برداری $T_\gamma^J \Omega \subset T_\gamma \Omega$ ، فضای برداری میدانهای W در طول γ باشد که در شرایط زیر صدق کند.

۱. به ازای $i = 1, \dots, n$ ، $W|_{[t_{i-1}, t_i]}$ یک میدان ژاکوبی در طول γ_{i-1}^i باشد.

۲. همواره $W(\cdot) = W(1) = 0$.

این فضای برداری به وضوح دارای بعد متناهی است^{۲۴}، (چرا؟) به همین صورت فرض کنیم $T_\gamma \Omega(t_1, \dots, t_k) \subset T_\gamma \Omega$ فضای برداری میدانهای W در طول γ باشد که در شرط زیر صدق کند:

$$W(\cdot) = W(t_1) = \dots = W(t_k) = 0$$

اثبات این قضیه را به چند لم به شرح زیر تقسیم می‌کنیم.

لم ۷.۹.۱۳. همواره داریم:

$$T_\gamma \Omega = T_\gamma^J \Omega \oplus T_\gamma \Omega(t_1, \dots, t_k) \quad (\text{الف})$$

• (ب) $T_\gamma^J \Omega$ و $T_\gamma \Omega(t_1, \dots, t_k)$ نسبت به فرم مربعی $H_E(\gamma)$ بر یکدیگر عمودند.

• (ج) $H_E(\gamma)|_{T_\gamma \Omega(t_1, \dots, t_k)}$ معین مثبت است.

از لم ۷.۹.۱۳ بلافاصله نتیجه زیر حاصل می‌شود.

لم ۸.۹.۱۳. اندیس (یا پوچی) $H_E(\gamma)$ با اندیس (یا تباهی) $H_E(\gamma)|_{T_\gamma^J \Omega}$ برابر است. ضمناً چون $T_\gamma^J \Omega$ دارای بعد متناهی است، اندیس نیز یک عدد متناهی است.^{۲۵}

^{۲۴} به ازای هر $i = 1, \dots, k$ یک میدان ژاکوبی در قطعه i ام از ژئودزیک γ است. لذا $T_\gamma^J \Omega$ از تعداد متناهی میدان ژاکوبی تشکیل گردیده است که بنا بر گزاره قبل توسط مقادیرش در نقاط انتهایی محاسبه می‌شود. بنابراین این فضای برداری دارای بعد متناهی است.

^{۲۵} تباهی نیز چنین است. این موضوع در نتیجه قضیه ۱.۸.۱۳ در بخش قبل نیز اثبات شده است.

اثبات لم ۷.۹.۱۳: الف) فرض کنیم $W \in T_\gamma \Omega$ و W_1 یک میدان یکتای ژاکوبی در طول γ باشد^{۲۶} به طوری که $W_1(t_i) = W(t_i)$. بنابراین تعریف می‌کنیم

$$X := W - W_1 \in T_\gamma \Omega(t., \dots, t_k)$$

در نتیجه W به صورت یکتای زیر تجزیه می‌شود

$$W = X + W_1$$

که در آن $W_1 \in T_\gamma^J \Omega$ و $X \in T_\gamma \Omega(t., \dots, t_k)$.
ب) فرض کنیم $W_1 \in T_\gamma^J \Omega$ و $W_2 \in T_\gamma \Omega(t., \dots, t_k)$ ، از آنجا داریم:

$$\begin{aligned} H_E(\gamma)(W_1, W_2) &= - \sum \langle W_2, \Delta_t D_\gamma W_1 \rangle \\ &\quad - \int_0^1 \langle W_2, D_{\gamma'} D_{\gamma'} W_1 \rangle + R(W_1, \gamma'). \end{aligned}$$

W_2 ، در نقاطی که در روی آنها سیگما جمع بسته می‌شود، برابر صفر بوده و $D_{\gamma'} D_{\gamma'} W_1 + R(W_1, \gamma') = 0$. در نتیجه $H_E(\gamma)(W_1, W_2) = 0$.
ج) ابتدا نشان می‌دهیم که

$$\forall W_1 \in T_\gamma \Omega(t., \dots, t_k) \quad H_E(\gamma)(W_1, W_2) = 0$$

فرض کنیم $\Omega \rightarrow]-\epsilon, +\epsilon[: \bar{\gamma}$ یک تغییرات ژئودزیک γ وابسته به W_1 باشد (یعنی $\bar{\gamma}(\cdot) = \gamma$ و $\frac{d}{ds} \gamma'(\cdot) = W_1$)، داریم $H_E(\gamma)(W_1, W_1) = \frac{d^2}{ds^2} (E \circ \bar{\gamma})(\cdot)$. چون $W_1(t_i)$ می‌توان فرض کرد که γ دارای نقاط ثابت مشخص $\gamma(t_i)$ فرض شده است، یعنی

$$\forall s \in]-\epsilon, +\epsilon[\quad \bar{\gamma}(s)(t_i) = \gamma(t_i)$$

^{۲۶} می‌دانیم که چنین میدانی به طور یکتا وجود دارد.

بنابراین هر γ_{i-1}^i یک ژئودزیک کمینه است و در نتیجه

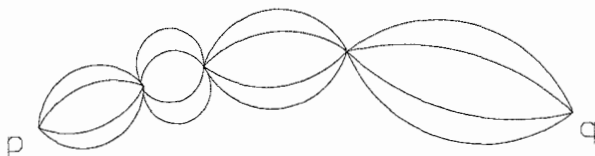
$$E(\bar{\gamma}(s)(t)|_{[t_{i-1}, t_i]}) \geq E(\gamma(t)|_{[t_{i-1}, t_i]})$$

$$\forall s \in]-\epsilon, +\epsilon[\quad E(\bar{\gamma}(s)) \geq E(\gamma) = E(\bar{\gamma}(\cdot))$$

از آنجا نتیجه می‌شود که مشتق دوم در صفر بزرگتر یا مساوی صفر است، یعنی

$$H_E(\gamma)(W_1, W_1) \geq 0$$

حال نشان می‌دهیم که اگر هرگاه برای یک $W_1 \in T_{\gamma}\Omega(t., \dots, t_k)$ داشته باشیم



شکل ۱۳.۱۳: نقاط ثابت در تغییرات

$$W_1 = 0, H_E(\gamma)(W_1, W_1) = 0$$

فرض کنیم برای یک $W_1 \in T_{\gamma}\Omega(t., \dots, t_k)$ $H_E(\gamma)(W_1, W_1) = 0$. نشان می‌دهیم

$$\forall W \in T_{\gamma}\Omega(t., \dots, t_k) \quad H_E(\gamma)(W_1, W) = 0$$

بنا بر قضیه ۱.۸.۱۳ در صفحه ۳۸۲ در بخش قبل، W_1 یک میدان ژاکوبی است که در $t., \dots, t_k$ صفر می‌شود و چون $T_{\gamma}\Omega(t., \dots, t_k)$ شامل میدان های ژاکوبی صفر شونده در $t., \dots, t_k$ نیست، (بنا بر الف) از آن نتیجه می‌گیریم که $W_1 = 0$. بنابراین اگر $W \in T_{\gamma}^J\Omega$ داریم، $H_E(\gamma)(W_1, W) = 0$. بنابر (ب) اگر $W \in T_{\gamma}\Omega(t., \dots, t_k)$ ، برای هر $c \in \mathbb{R}$ داریم:

$$0 \leq H_E(\gamma)(W_1 + cW, W_1 + cW) = 2cH_E(\gamma)(W_1, W) + c^2H_E(\gamma)(W, W)$$

در عبارت بالا آخرین جمله بزرگتر یا مساوی صفر بوده و عدد c دلخواه است لذا برای آنکه مجموع دو جمله بزرگتر یا مساوی صفر باشد، باید داشته باشیم $H_E(\gamma)(W_1, W) = 0$ که این موضوع اثبات لم ۷.۹.۱۳ در صفحه ۳۸۷ را کامل می‌کند. $\square$

حال اثبات قضیه اندیس را با نماد گذاری زیر ادامه می‌دهیم.

$$\gamma_\tau = \gamma|_{[0, \tau]}, \quad I(\tau) = \gamma_\tau$$

در اینجا باید $\gamma(1)$ را محاسبه کنیم. لم های ۹.۹.۱۳، ۱۰.۹.۱۳، ۱۱.۹.۱۳ و ۱۲.۹.۱۳ را به شرح زیر ثابت نموده، اثبات قضیه مورس را از آن نتیجه می‌گیریم.

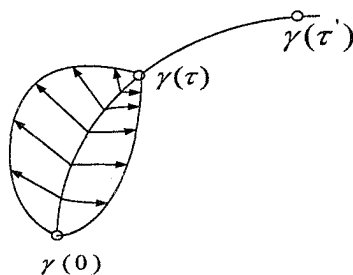
لم ۹.۹.۱۳. $I(\tau)$ یک تابع یکنوا از τ است.

لم ۱۰.۹.۱۳. اگر τ به اندازه کافی کوچک باشد، آنگاه $I(\tau) = 0$.

لم ۱۱.۹.۱۳. برای هر $\epsilon > 0$ و به اندازه کافی کوچک، $I(\tau - \epsilon) = I(\tau)$ (یعنی I در تمام نقاط از چپ پیوسته است).

لم ۱۲.۹.۱۳. فرض کنیم ν تباهی $H_{E\tau}(\gamma_t)$ باشد. برای هر $\epsilon > 0$ به اندازه کافی کوچک، $I(\tau + \epsilon) = I(\tau) + \nu$ (یعنی I در نقاط مزدوج به اندازه ν پرش دارد).

اثبات لم ۹.۹.۱۳: فرض کنیم $\tau' > \tau$ باشد. چون $I(\tau)$ دارای اندیس $\gamma(t)$ است، یک فضای برداری V به بعد $I(\tau)$ از میدانهای برداری در طول γ_t (که در $\gamma(0)$ و $\gamma(\tau)$ صفر هستند) وجود دارد به طوری که $H_E(\gamma_t)|_V$ معین منفی باشد. می‌توان این میدان های برداری را تا $\gamma(\tau')$ توسیع داد. به این نحو که بین $\gamma(\tau)$ و $\gamma(\tau')$ آن را صفر فرض می‌نماییم. فرض کنیم V' فضای برداری ای باشد که به این صورت بدست می‌آید (این فضای برداری دارای بعد $I(\tau)$ است)، به وضوح $H_E(\gamma\tau')|_{V'}$ معین منفی است (چرا؟). بنابراین $I(\tau') \geq I(\tau)$ ، در نتیجه تابع $I(\tau)$ یک تابع یکنوا است. $\square$



شکل ۱۴.۱۳: توسعه میدانهای برداری با اضافه نمودن بردارهای صفر

اثبات لم ۱۰.۹.۱۳: اگر τ به اندازه کافی کوچک باشد، آنگاه ژئودزیک γ_τ کمینه است لذا بنا بر گزاره صفحه ۳۸۶ به شماره ۳.۵.۱۳، $I(\tau) = 0$. □

اثبات لم ۱۱.۹.۱۳: فرض کنیم که یک افراز $[0, 1]$ طوری انتخاب شود که $t_i < \tau < t_{i+1}$. بنا بر لم ۸.۹.۱۳، $I(\tau)$ را می توان با تحدید به $T_\gamma^J \Omega$ (فضای میدانهای تکه ای ژاکوبی بین $\gamma(0)$ و $\gamma(\tau)$) محاسبه نمود. بنا بر گزاره قبل هر میدان ژاکوبی توسط مقادیر آن در نقاط انتهایی محاسبه می شود، لذا $T_\gamma^J \Omega$ فقط توسط مقادیر J در نقاط $\gamma(t_i)$ محاسبه شده و در نتیجه ایزومورف است با^{۲۷}

$$\sum = T_{\gamma(t_1)}M \oplus T_{\gamma(t_2)}M \oplus \dots \oplus T_{\gamma(t_i)}M$$

که بعد آن برابر ni است. یادآوری می کنیم که $\sum$ بستگی به i داشته و با تغییر τ در فاصله t_i و t_{i+1} تغییر نمی کند. از طرف دیگر H_τ دائماً با تغییر τ تغییر می کند. بنابراین H_τ روی یک زیر فضای V از $\sum$ به بعد $I(\tau)$ معین منفی است. در نتیجه اگر τ' به اندازه کافی به τ نزدیک باشد، $I(\tau') \geq I(\tau)$. لذا اگر $\tau' = \tau - \epsilon < \tau$ داریم $I(\tau - \epsilon) \geq I(\tau)$.

^{۲۷} فضای برداری $T_\gamma^J \Omega$ از i میدان ژاکوبی n مولفه ای متعلق به $T_{\gamma(t_i)}M$ تشکیل گردیده است. لذا با توجه به گزاره قبل با جمع مستقیم i فضای مماس $T_{\gamma(t_i)}M$ ایزومورف است. برای توضیحات بیشتر به صفحه ۹۱ از کتاب [۴۰] مراجعه کنید.

و بنا بر لم ۹.۹.۱۳ $\square$ $I(\tau - \epsilon) = I(\tau)$

از لم فوق نتیجه می‌شود که تابع اندیس در تمام نقاط از چپ پیوسته است. همچنین از این لم نتیجه می‌شود که تابع اندیس از $\tau - \epsilon$ تا τ ثابت است (به ازای هر ϵ به اندازه کافی کوچک).

اثبات لم ۱۲.۹.۱۳: این لم را در چند قسمت ثابت می‌کنیم.

(الف) $I(\tau + \epsilon) \leq I(\tau) + \nu$

چون بعد $\sum$ برابر n_i بوده و H_τ روی یک زیر فضای V از $\sum$ به بعد $I(\tau)$ معین منفی و روی یک زیر فضای برداری به بعد ν تباهیده است، در نتیجه H_τ روی یک زیر فضای برداری V' به بعد $\nu - n_i - I(\tau)$ معین مثبت است. اگر τ' به اندازه کافی به τ نزدیک باشد، بنا بر پیوستگی از چپ $I(\tau)$ ، $H_{\tau'}$ نیز همچنان روی V' معین مثبت است.

V'' مکمل V' نسبت به $\sum$ دارای بعد

$$\dim V'' = \dim \sum - \dim V' = n_i - (n_i - I(\tau) - \nu) = I(\tau) + \nu$$

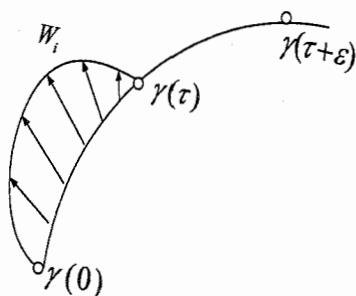
است. بنابراین روی یک زیر فضایی از V'' معین منفی خواهد بود. در نتیجه

$$I(\tau') \leq I(\tau) + \nu$$

(ب) $I(\tau + \epsilon) \geq I(\tau) + \nu$

برای اثبات این قسمت باید در طول $\gamma_{\tau+\epsilon}$ تعداد $I(\tau) + \nu$ میدان برداری $X_1, \dots, X_{I(\tau)}$ ، $Y_1, \dots, Y_\nu$ مستقل به نحوی بسازیم که $H_{\tau+\epsilon}$ روی فضای برداری که آنها تولید می‌کنند معین منفی باشد.

(۱) چون $I(\tau)$ اندیس γ_τ است، تعداد $I(\tau)$ میدان برداری صفر شونده وجود دارد به طوری که $H_\tau|_{[W_1, \dots, W_{I(\tau)}]}$ معین منفی باشد. در اینجا $[W_1, \dots, W_{I(\tau)}]$ فضای برداری تولید شده توسط این بردارها است. می‌توان این بردارها را تا $\gamma(\tau + \epsilon)$ با صفر در نظر گرفتن



شکل ۱۵.۱۳: توسعه میدانهای برداری W_i

میدان های بین τ و $\tau + \epsilon$ توسعه داد. فرض کنیم $X_1, \dots, X_{I(\tau)}$ یک چنین میدان هایی در طول $\gamma_{\tau+\epsilon}$ باشند (صفر در نقاط انتهایی). لذا $H_{\tau+\epsilon}|_{[X_1, \dots, X_{I(\tau)}]}$ معین منفی است.

(۲) چون عدد ν تباهی هسیان در γ_τ است، تعداد ν میدان ژاکوبی C^∞ مستقل، مانند $J_1, \dots, J_\nu$ روی γ_τ وجود دارد که در نقاط انتهایی صفر می شود. توجه داریم که بردارهای $(D_{\gamma'} J)_t = \tau$ نیز مستقل هستند زیرا میدان های ژاکوبی در طول γ_τ توسط مقادیر $t = \tau$ از J_i ها و $D_{\gamma'} J_i$ ها بیان می گردند و داریم $(J_i)_t = \tau = 0$. بنابراین برای آنکه $J_1, \dots, J_\nu$ ها مستقل باشند، باید $(D_{\gamma'} J_i)_t = \tau$ ها مستقل باشند. لذا می توان به روشهای معمولی ν میدان $Z_1, \dots, Z_\nu$ در طول $\gamma_{\tau+\epsilon}$ را طوری ساخت که در نقاط انتهایی صفر شده و

$$\langle D_{\gamma'} J_i, Z_j \rangle = \delta_{ij}$$

که در آن Z_1 را از $[D_{\gamma'} J_1, \dots, D_{\gamma'} J_\nu]^\perp_{t=\tau}$ طوری انتخاب می کنیم که داشته باشیم $\langle Z_1, D_{\gamma'} J_1 \rangle|_{t=\tau} = 1$ و آن را تا $\gamma_{\tau+\epsilon}$ توسعه می دهیم و به همین صورت این کار را تکرار می کنیم.

حال میدانهای J_i را تا $\tau + \epsilon$ توسعه داده و آنها را بین τ و $\tau + \epsilon$ صفر در نظر می گیریم. فرض کنیم $\tilde{J}_i$ ها میدان های برداری باشند که این چنین حاصل شده اند. این میدان ها، میدان های تکه ای ژاکوبی بوده و تنها نقطه ای که $D_{\gamma'} \tilde{J}_i$ ناپیوسته باشد، نقطه $t = \tau$ است.

حال تعداد ν میدان برداری در طول $\gamma_{\tau+\epsilon}$ به شرح زیر تعریف می‌کنیم:

$$Y_i = \frac{\tilde{J}_i}{c} - cZ_i \quad c \in \mathbb{R} - (0), \quad i = 1, \dots, \nu$$

می‌توان نشان داد که میدان‌های $X_1, \dots, X_{I(\tau)}, Y_1, \dots, Y_\nu$ مستقل بوده و ماتریس $H_{\tau+\epsilon}|_{[X_1, \dots, Y_\nu]}$ نسبت به پایه $X_1, \dots, Y_\nu$ عبارت است از

$$\begin{pmatrix} H_\tau(W_i, W_j) & cA \\ c^t A & -\epsilon I + c^t B \end{pmatrix}$$

در اینجا $B_{ij} = H_{\tau+\epsilon}(Z_i, Z_j)$ و $A_{ij} = -H_{\tau+\epsilon}(X_i, Z_j)$ (چرا؟)^{۲۸} برای c های به اندازه کافی کوچک ماتریس فوق معین منفی است. در نتیجه قسمت (ب) از اثبات لم ۱۲.۹.۱۳، ثابت می‌شود و با استفاده از (الف) و (ب) اثبات لم ۱۲.۹.۱۳ کامل می‌شود. $\square$

از لم ۱۲.۹.۱۳ نتیجه می‌شود که تابع اندیس، $I(\tau)$ ، در آنجا که $\nu = 0$ است، پیوسته بوده و هرگاه از نقطه مزدوج p با تکرر ν می‌گذرد، $I(\tau)$ به اندازه ν پرش دارد. بنابراین تابع اندیس به جز نقاط مزدوج با تکرر ν ، در جای دیگر پیوسته است. به طور خلاصه تابع اندیس در همسایگی صفر برابر صفر بوده و در نقاط مزدوج با تکرر ν ، از چپ پیوسته است و به اندازه ν پرش دارد. بنابراین اندیس در هر نقطه مزدوج با توجه به تکرر آن نقطه مزدوج محاسبه می‌شود که این همان حکم قضیه اندیس است. $\square$

تمرین ۱۳.۹.۱۳. نشان دهید نمودار تابع اندیس یک تابع پله‌ای صعودی است. راهنمایی: با استفاده از لم های ۱۰.۹.۱۳، ۱۲.۹.۱۳ و ۱۱.۹.۱۳ نشان دهید تابع اندیس از $\tau - \epsilon$ تا τ مقدارش ثابت است.

^{۲۸} به عنوان تمرین محاسبات را با توجه به این که $H_{\tau+\epsilon}(\tilde{J}_i, Z_j) = 2\delta_{ij}$ و $H_{\tau-\epsilon}(\tilde{J}_i, X_j) = 0$ انجام دهید.

تمرین ۱۴.۹.۱۳. فرض کنیم γ یک ژئودزیک باشد. می‌خواهیم نشان دهیم هر میدان ژاکوبی J در طول γ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$J = f\gamma' + W^\perp$$

که در آن f یک تابع آفین^{۲۹} و $W^\perp$ یک میدان ژاکوبی عمود بر γ است.

الف: نشان دهید $f\gamma'$ یک میدان ژاکوبی است اگر و تنها اگر تابع f آفین باشد (یعنی $f'' = 0$ باشد).^{۳۰}

ب: فرض کنیم J یک میدان ژاکوبی بوده و $W^\perp$ یک میدان برداری عمود بر γ باشد. آنگاه می‌توان نوشت: $J = f\gamma' + W^\perp$. نشان دهید $W^\perp$ یک میدان ژاکوبی بوده و f آفین است.^{۳۱}

ج: فرض کنیم $J = f\gamma' + W^\perp$ به طوری که $\langle J_a, \gamma' \rangle = \langle J_b, \gamma' \rangle = 0$ نشان دهید $f(a) = f(b) = 0$ و از آفین بودن f نتیجه بگیرید $J = W^\perp$.^{۳۲}

د: از این تمرین نتیجه بگیرید که اگر J در دو نقطه بر γ عمود باشد، آنگاه در تمام نقاط بر γ عمود است.

نتیجه ۱۵.۹.۱۳. از تمرین بالا نتیجه می‌شود که اگر $J(a) = 0$ و $J(b) = 0$ ، آنگاه میدان ژاکوبی J بر ژئودزیک γ عمود بوده و لذا هنگام مطالعه نقاط مزدوج کافی است میدان‌های ژاکوبی قائم γ را مورد توجه قرار داد.

^{۲۹} یک تابع آفین از $\mathbb{R}$ در $\mathbb{R}$ تابعی است به صورت $x \mapsto ax + b$ که نمودار آن یک خط راست است. ^{۳۰} راهنمایی: فرض کنیم $W = f\gamma'$ ، داریم $\frac{D^2 W}{dt^2} = f''\gamma'$ ، معادله ژاکوبی را برای W نوشته، از خواص آن استفاده کنید.

^{۳۱} اگر W یک میدان ژاکوبی در طول γ باشد، می‌توان نوشت $W = f\gamma' + W^\perp$. با جایگذاری در معادله ژاکوبی نشان دهید $f'' = 0$ ، میدان $W^\perp$ ژاکوبی بوده و $\langle W^\perp, \gamma' \rangle = 0$. یکتایی را نیز تحقیق کنید.

^{۳۲} اگر یک نگاشت خطی در دو نقطه صفر باشد، در تمام نقاط صفر است.

تمرین ۱۶.۹.۱۳. فرض کنیم $T_\gamma^J \Omega \subset T_\gamma \Omega$ فضای برداری میدانهای W در طول γ باشد که در شرایط زیر صدق کند.

• به ازای هر $i = 1, \dots, n$ ، $W|_{[t_{i-1}, t_i]}$ یک میدان ژاکوبی در طول γ_{i-1}^i باشد:

• همواره $W(0) = W(1) = 0$.

الف: نشان دهید فضای برداری $T_\gamma^J \Omega$ دارای بعد متناهی است.

ب: چه تفاوت هایی بین $T_\gamma^J \Omega$ و $T_\gamma \Omega(t_1 \dots t_k)$ وجود دارد.

ج: در مورد بعد $T_\gamma \Omega(t_1 \dots t_k)$ چه می توان گفت؟

د: می دانیم که فضای نامتناهی البعد $T_\gamma \Omega$ را می توان به جمع مستقیم دو زیرفضا که یکی از آنها دارای بعد متناهی است تجزیه کرد.

توضیح دهید چگونه می توان با استفاده از این تجزیه مسائل تغییرات که در فضای $T_\gamma \Omega$ مطرح است را به مسئله ای در یک فضای $T_\gamma \Omega(t_1 \dots t_k)$ تبدیل کرد (کافی است نحوه استفاده از این فرآیند را در قضیه اندیس شرح دهید).

ه: نشان دهید $T_\gamma^J \Omega$ ایزومورف است با $\sum = T_\gamma(t_1)M \oplus T_\gamma(t_2)M \oplus \dots \oplus T_\gamma(t_k)M$

۱۰.۱۳ کاربرد حسابان تغییرات

در بخش های قبل با ابزاری بنام حسابان تغییرات روی منیفلدها آشنا شدیم. در این فصل می بینیم که چگونه می توان با استفاده از این ابزار به اثبات قضایای اساسی در هندسه دیفرانسیل پرداخت.

در بخش یک به منیفلدهای با انحنا ریچی مثبت می پردازیم.

۱.۱۰.۱۳ منیفلدهای با انحنا ی ریچی مثبت (قضیه مایرز)

در این بخش به اثبات قضیه زیر موسوم به قضیه مایرز می‌پردازیم. فرض کنیم Ric تانسور انحنا ی ریچی منیفلد ریمانی M باشد.

قضیه ۱.۱۰.۱۳. فرض کنیم M یک منیفلد ریمانی n -بعدی باشد که بازای هر میدان برداری یکه در تمام نقاط M داشته باشیم $Ric(X, X) \geq \frac{n-1}{r}$ که در آن r یک ثابت مثبت است.

آنگاه هر ژئودزیک γ روی M با طول بزرگتر از $r\pi$ دارای نقاط مزدوج است (یعنی اندیس $I(\gamma) \neq 0$).

نتیجه ۲.۱۰.۱۳. اگر M در شرایط بالا صدق کند، آنگاه طول ژئودزیکهای کمینه آن کوچکتر یا مساوی $r\pi$ است.

مثال ۳.۱۰.۱۳. اگر S^n کره ای به شعاع r باشد، آنگاه تانسور ریچی آن در رابطه $Ric(X, X) = \frac{n-1}{r}$ صدق می‌کند. (چرا؟) می‌دانیم طول ژئودزیکهای کمینه S^n باید از نصف طول دایره عظیمه کوچکتر باشد. (چرا؟) این موضوع را می‌توان از قضیه مایرز نیز نتیجه گرفت. یعنی طول ژئودزیکهای کمینه S^n کوچکتر یا مساوی $r\pi$ است.

اثبات قضیه مایرز: فرض کنیم $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ یک ژئودزیک به طول l و $P_1, \dots, P_n$ یک پایه متحرک در طول γ باشد به طوری که

$$P_n = \frac{1}{l} \gamma'$$

قرار می‌دهیم $X_i(t) = (\sin \pi t) P_i(t)$ از آنجا

$$\begin{aligned}
 H_E(\gamma)(X_i, X_i) &= - \int_0^1 \langle X_i, D_{\gamma'} D_{\gamma'} X_i + R(X_i, \gamma') \gamma' \rangle dt \\
 &= \int_0^1 (\sin \pi t)^2 [\pi^2 - l^2 \langle R(P_i, P_n) P_n, P_i \rangle] dt \\
 &= \int_0^1 (\sin \pi t)^2 (\pi^2 - l^2 \mathcal{K}_{[P_n, P_i]}) dt
 \end{aligned}$$

که در آن $[P_n, P_i]$ صفحه تولید شده توسط دو بردار P_i و P_n است. با عمل جمع بندی برای اندیس‌های $i = 1, \dots, n-1$ با توجه به $\mathcal{K}_{[P_n, P_i]}$ داریم: $Ric(P_n, P_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{K}_{[P_n, P_i]}$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{n-1} H_E(\gamma)(X_i, X_i) &= \int_0^1 (\sin \pi t)^2 [(n-1)\pi^2 - l^2 Ric(P_n, P_n)] dt \\
 &\leq \int_0^1 (n-1)(\sin \pi t)^2 (\pi^2 - \frac{l^2}{\pi^2}) dt
 \end{aligned}$$

لذا اگر $l \geq r\pi$ ، داریم $\sum_{i=1}^{n-1} H_E(\gamma)(X_i, X_i) < 0$. بنابراین یک بردار X_i وجود دارد به طوری که $H_E(\gamma)(X_i, X_i) < 0$ و در نتیجه اندیس نا صفر بوده و γ دارای نقاط مزدوج است. $\square$

نتیجه ۴.۱۰.۱۳. اگر M کامل بوده و $Ric(X, X) \geq \frac{n-1}{r^2}$ باشد (بازای هر X یک و در تمام نقاط)، آنگاه M فشرده بوده و قطر M کوچکتر یا مساوی با $r\pi$ است.

اثبات: فرض کنیم $p, q \in M$ و γ یک ژئودزیک کمینه بین p, q باشد (وجود این چنین ژئودزیکی همواره از قضیه هوف-رینو^{۳۳} نتیجه می‌شود)، باید داشته باشیم $r\pi$ بزرگتر یا مساوی با طول γ است. بنابراین فاصله هر دو نقطه کوچکتر یا مساوی $r\pi$ است و لذا M دارای قطر کوچکتر یا مساوی $r\pi$ می‌باشد. (بنابراین کراندار است.) چون کامل نیز هست بنابراین فشرده است. $\square$

^{۳۳}Hopf-Rinow Theorem

تذکر. قضیه مایرز در بعضی از مراجع به قضیه بونه-مایرز^{۳۴} معروف است. جالب است که بدانیم که این قضیه، قضیه هوف-رینو، قضیه هادامارد-کارتان^{۳۵}، قضیه مقایسه رخ^{۳۶}، قضیه بیشاپ-گرومو^{۳۷}، قضیه سینگ^{۳۸} و بسیاری از قضایای کلاسیک دیگر هندسه ریمانی در هندسه فینسلر نیز برقرار است. برای مشاهده لیست این قضایا به [۴۱] مراجعه کنید.

^{۳۴}Bonnet-Myers

^{۳۵}Hadamard-Cartan

^{۳۶}First Comparison theorem of Rauch

^{۳۷}Bishop-Gromov

^{۳۸}Synge

راهنمای حل برخی از مسایل کتاب

۱.۱۴ نکاتی در مورد روش حل مسایل هندسه

استفاده مناسب از راهنمای حل مسایل هندسه می تواند از یک طرف موجب رشد فکری دانشجویان و تسلط آنها در این درس گردد، و از طرف دیگر بر پایداری آنها در کوشش برای ادامه کار برای حل مسایل پیچیده هندسه بیافزاید. اما نباید فراموش کرد که مراجعه بی مورد و قبل از تلاش برای حل مسئله نه تنها موجب تسلط بر درس نمی شود، بلکه ممکن است که موجب کاهش اعتماد به نفس دانشجویان گردد.

لذا پیشنهاد می‌گردد قبل از استفاده از حل تمرینات این فصل، ابتدا با مراجعه مکرر به صورت مسئله مورد نظر، سعی کافی برای حل تمام یا بخشی از تمرین را بنمایید. روش حل و نکات زیر را نیز مطالعه نمایید و به کار بندید.

در خاتمه کتاب به چند نکته که می‌تواند دانشجویان را در حل مسایل هندسه کمک کند، می‌پردازیم. باشد که موجب دلگرمی بیشتر آنان شده و بر استقامت آنها برای پافشاری در حل اینگونه مسایل بیافزاید. این موارد را به صورت چند نکته در زیر بیان می‌کنیم. نظر به اینکه که ارایه حل همه تمرین‌ها می‌تواند موجب ضعف دانشجویان در حل مسایل گردد، در این فصل حل تعداد محدودی از آنها را می‌آوریم.

- **نکته اول.** اولین نکته مهم برای کسی که می‌خواهد اینگونه مسایل را حل کند آن است که بداند که حل مسایل هندسه اصولاً کار مشکلی است. علت آن هم این است که برای حل یک مسئله علاوه بر دانستن تعریف‌ها و قضایای مربوطه باید یک تعبیر هندسی یا فیزیکی هر چند مقدماتی نیز از آن مسئله پیدا کرد. به عبارت دیگر باید مسئله را به طور شهودی نیز نگاه کرده و بعد در حل آن اقدام کرد. این موضوع در مسایل هندسه، حل آنها را بسیار جالب نموده و باعث می‌شود که خواننده بتواند یک دید شهودی از مساله در ذهن خود ایجاد کرده سپس به حل آن بپردازد.
- **نکته دوم.** ابتدا باید تمام مقدمات لازم برای حل آن مسئله خاص، از قبیل تعریف‌ها، لم‌ها و قضایای مربوطه را فرا گرفته بر آنها مسلط شد.
- **نکته سوم.** قبل از حل مسئله‌های پیچیده، به حل مسایل ساده‌تر پرداخته بر نحوه حل آنها مسلط شد. برای حل یک مسئله روی یک منیفلد، ابتدا باید آن را برای یک فضای اقلیدسی حل کرده سپس نتایج حاصل را توسط کارت‌ها به روی منیفلد منتقل کرد. باید توجه داشت که حل اغلب مسایل روی منیفلدها قبلاً روی فضای اقلیدسی یا فضای برداری حل شده است. باید در آنالیز یا جبر دنبال حل مقدماتی آنها گشت و از آنها ایده گرفت.

- نکته چهارم. در پایان یک نکته مهم دیگر برای حل مسایل روی منیفلدها، حل آنها روی رویه ها است. به این معنی که باید مسئله مورد نظر را روی یک منیفلد ۲-بعدی حل کرد. چنانچه در حل مسئله روی رویه ها نیز دچار مشکل شدید، آن را ابتدا روی صفحه ۲-بعدی تجسم نموده و سپس به حل آن بپردازید.

۲.۱۴ راهنمای حل چند تمرین از کتاب

راهنمای حل تمرین ۷.۳.۳ در صفحه ۵۳.

اثبات. (الف) کافیسیت نشان دهیم τ روی توابع $C^\infty(M)$ نسبت به هر دو متغیر X, Y خطی است.

$$\begin{aligned} T(fX, Y) &= \nabla_{fX} Y - \nabla_Y fX - [fX, Y] = f\nabla_X Y - (Y.f)X - f\nabla_Y X + \\ (Y.f)X - f[X, Y] &= f\nabla_X Y - f\nabla_Y X - f[X, Y] = fT(X, Y). \end{aligned}$$

برای $T(X, fY) = fT(X, Y)$ نیز بطور مشابه ثابت می شود.

$$\begin{aligned} T(X + X', Y) &= \nabla_{X+X'} Y - \nabla_Y X + X' - [X + X', Y] = \nabla_X Y - \\ \nabla_Y X - [X, Y] &+ \nabla_{X'} Y - \nabla_Y X' - [X', Y] = T(X, Y) + T(X', Y). \end{aligned}$$

بطور مشابه ثابت می شود $T(X, Y + Y') = T(X, Y) + T(X, Y')$.

(ب) $(\Leftarrow)$ فرض کنیم ∇ متقارن باشد در اینصورت برای هر $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ داریم $T(X, Y) = 0$ هرگاه $X = \partial_i, Y = \partial_j$ در اینصورت

$$0 = T(\partial_i, \partial_j) = \nabla_{\partial_i} \partial_j - \nabla_{\partial_j} \partial_i - [\partial_i, \partial_j] = ,$$

$$\Gamma_{ij}^k \partial_k - \Gamma_{ji}^k \partial_k = (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \partial_k. \quad (۱.۱۴)$$

در نتیجه داریم

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k.$$

($\Rightarrow$) حال هرگاه $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ در اینصورت هرگاه $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ داریم

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] =,$$

$$\nabla_{X^i \partial_i} Y^j \partial_j - \nabla_{Y^j \partial_j} X^i \partial_i - [X, Y] =,$$

$$X^i (\nabla_{\partial_i} Y^j \partial_j) - Y^j (\nabla_{\partial_j} X^i \partial_i) - [X, Y] =,$$

$$X^i ((\partial_i \cdot Y^j) \partial_j + Y^j \Gamma_{ij}^k \partial_k) - Y^j ((\partial_j \cdot X^i) \partial_i +,$$

$$X^i \Gamma_{ji}^k \partial_k) - (X^i (\partial_i \cdot Y^j) - Y^j (\partial_j \cdot X^i)) \partial_j =,$$

$$X^i (\partial_i \cdot Y^j) \partial_j + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \partial_k -,$$

$$Y^j (\partial_j \cdot X^i) \partial_i - X^i Y^j \Gamma_{ji}^k \partial_k - X^i (\partial_i \cdot Y^j) \partial_j + Y^j ((\partial_j \cdot X^i) \partial_j = 0.$$

□

در نتیجه برای هر $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ داریم: $T(X, Y) = 0$.

راهنمای حل تمرین ۴.۴.۳ در صفحه ۵۸.

اثبات. اثبات (الف): ماتریس g^{-1} به صورت زیر است

$$\begin{pmatrix} y^1 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{\sqrt{g}} g^{kl} \{ \partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij} \}. \quad (3.14)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{\sqrt{g}} g^{11} \{ \underbrace{\partial_1 g_{11}} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11} \} + \frac{1}{\sqrt{g}} \underbrace{g^{12}} \{ \partial_1 g_{12} + \partial_1 g_{12} - \partial_2 g_{11} \} = 0.$$

$$\Gamma_{12}^2 = g^{12} \Gamma_{121} + g^{22} \Gamma_{122} = \frac{1}{\sqrt{g}} y^2 \{ \underbrace{\partial_1 g_{22}} + \partial_2 g_{12} - \partial_2 g_{12} \} = 0.$$

$$\Gamma_{22}^1 = g^{11} \Gamma_{221} + g^{22} \Gamma_{222} = \frac{1}{\sqrt{g}} y^2 \{ \partial_2 g_{21} + \partial_2 g_{21} - \partial_1 g_{22} \} = 0.$$

$$\Gamma_{11}^2 = g^{12} \Gamma_{111} + g^{22} \Gamma_{112} = \frac{1}{\sqrt{g}} y^2 \{ \partial_1 g_{12} + \partial_1 g_{12} - \partial_2 g_{11} \} = \frac{1}{\sqrt{g}} y^2 \{ 0 + 0 -$$

$$\frac{-2}{y^3}\} = \frac{1}{y}.$$

$$\Gamma_{12}^1 = g^{11}\Gamma_{121} + g^{21}\Gamma_{122} = \frac{1}{y^2}\{\partial_1 g_{21} + \partial_2 g_{11} - \partial_1 g_{12}\} = \frac{1}{y^2}\{0 + \frac{-2}{y^3} - 0\} = \frac{-1}{y}.$$

$$\Gamma_{22}^2 = g^{11}\Gamma_{221} + g^{22}\Gamma_{222} = \frac{1}{y^2}\{\partial_2 g_{22} + \partial_2 g_{22} - \partial_2 g_{22}\} = \frac{1}{y^2}\{\frac{-2}{y^3}\} = \frac{-1}{y}.$$

اثبات (ب): کافی است این مقادیر را در معادله های درجه دوم ژئودزیک های این متریک قرار دهیم.

□

راهنمای حل تمرین ۱.۵.۳ در صفحه ۶۴.

اثبات. ^۱ کره S^2 را در نظر می گیریم. فرض کنیم p نقطه ای روی خط استوا واقع در غرب کره و q نقطه مقابل p در شرق کره باشد، همچنین فرض می کنیم V برداری مماس بر کره در نقطه p باشد که به سمت شمال اشاره می کند. اگر بردار V را در طول دایره عظیمه عرضی گذرنده از p (خط استوا) انتقال موازی دهیم به بردار V' واقع در نقطه q می رسم که بر کره مماس است و به سمت شمال اشاره می کند، اما اگر V را در طول دایره عظیمه ای که V بر آن مماس است انتقال موازی دهیم به بردار V'' در نقطه q می رسم که هم راستا با V' ولی در جهت مخالف آن است.

□

راهنمای حل تمرین ۵.۵.۳ در صفحه ۶۷.

اثبات. فرض می کنیم میدان برداری $V(t) = (a(t), b(t))$ به صورت $V(t)$ باشد. چون $V(t)$ در طول منحنی $\gamma(t) = (t, 1)$ موازی است داریم:

$$\frac{dv^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k \frac{d\gamma^i}{dt} v^j = 0.$$

در نتیجه

$$\frac{da}{dt} + \Gamma_{11}^1 b = 0, \quad \frac{db}{dt} + \Gamma_{11}^2 a = 0. \quad (۴.۱۴)$$

حال فرض کنیم $\theta(t)$ زاویه بین $V(t)$ با محور x ها باشد. با توجه به یکه بودن $V(t)$ داریم

$$\begin{cases} a(t) = \cos \theta(t), \\ b(t) = \sin \theta(t). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - \sin \theta(t) \theta'(t) - \frac{1}{y} \sin \theta(t) = 0, \\ \cos \theta(t) \theta'(t) + \frac{1}{y} \cos \theta(t) = 0. \end{cases}$$

با توجه به اینکه در طول منحنی γ داریم $y = 1$ می توان نوشت

$$\begin{cases} \sin \theta(t) \theta'(t) = -\sin \theta(t), \\ \cos \theta(t) \theta'(t) = -\cos \theta(t). \end{cases}$$

بنابراین $\theta'(t) = -1$ و در نتیجه

$$\theta(t) = -t + c \quad (۵.۱۴)$$

از طرف دیگر $V(\cdot) = V$ پس داریم: $(\cos \theta(\cdot), \sin \theta(\cdot)) = (\cdot, 1) \implies$

$\theta(\cdot) = \frac{\pi}{4}$ با جایگذاری مقدار $\theta(\cdot)$ در (۵.۱۴) داریم $c = \frac{\pi}{4}$ پس $\theta(t) = -t + \frac{\pi}{4}$

و زاویه $V(t)$ با محور y برابر است با $t = \frac{\pi}{4} - \theta(t)$. $\square$

راهنمای حل تمرین ۱۰.۶.۳ در صفحه ۷۳.

اثبات.

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(X, Y) &= \nabla(\nabla f)(X, Y) = \nabla_Y(\nabla f)(X) \\ &= Y(\nabla f(X)) - \nabla f(\nabla_Y X) \\ &= Y(\nabla f(X)) - df(\nabla_Y X) = Y(Xf) - (\nabla_Y X)f.\end{aligned}$$

□

راهنمای حل تمرین ۱۱.۶.۳ در صفحه ۷۳.

اثبات. اگر ∇ متقارن باشد باید نشان دهیم $\nabla^2 u$ متقارن است.

$$\begin{aligned}(\nabla^2 u)(X, Y) &= (\nabla du)(X, Y) = (\nabla_X du)(Y) \\ &= X(du(Y)) - du(\nabla_X Y) = X.(Y.u) - (\nabla_X Y)u.\end{aligned}$$

پس داریم

$$(\nabla^2 u)(X, Y) = X.(Y.u) - (\nabla_X Y)u.$$

از طرفی ∇ متقارن است پس داریم

$$\begin{aligned}(\nabla^2 u)(X, Y) - (\nabla^2 u)(Y, X) &= (X.Y - Y.X)u - (\nabla_X Y - \nabla_Y X)u \\ &= ([X, Y])u - ([X, Y])u = 0.\end{aligned}$$

حال هرگاه $\nabla^2 u$ متقارن باشد

$$\begin{aligned} & (\nabla^2 u)(X, Y) - (\nabla^2 u)(Y, X) \\ &= X.(Y.u) - (\nabla_X Y)u - Y.(X.u) + (\nabla_Y X)u \\ &= (X.Y - Y.X)u - (\nabla_X Y - \nabla_Y X)u \\ &= ([X, Y] - \nabla_X Y + \nabla_Y X)u = 0. \end{aligned}$$

پس داریم

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X.$$

در نتیجه $\tau(X, Y) = 0$ پس ∇ متقارن است. □

راهنمای حل تمرین ۷.۷.۳ در صفحه ۷۶.

اثبات. X یک میدان برداری کیلینگ است پس گروه موضعی ۱- پارامتری از دیفیئومورفیسم های $\{\varphi_t\}$ وابسته به X ایزومتري است. داریم

$$\varphi(t, \cdot) : U \subset M \longrightarrow M,$$

$$p \longrightarrow \varphi(t, p) = \varphi_t(p).$$

همچنین $X_p = \frac{d}{dt}(\varphi_t(p))|_{t=0}$. بنا به فرض مساله برای نقطه $q \in M$ داریم:

$$X_q = \frac{d}{dt}(\varphi_t(q))|_{t=0} = 0.$$

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t(q))|_{t=s} = \frac{d}{dt}(\varphi_{t+s}(q))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi_t \circ \varphi_s(q))|_{t=0}.$$

$$= \varphi_s \cdot \frac{d}{dt}(\varphi_t(q))|_{t=0} = 0.$$

در نتیجه

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t(q)) \big|_{t=s} = 0.$$

پس φ_t در نقطه $q \in M$ به t بستگی ندارد پس $\varphi_t(q) = q$. از طرفی هرگاه $\varphi_t : M \rightarrow M$ را در نظر بگیریم در اینصورت دیفرانسیل φ_t در نقطه q را بصورت یک نگاشت خطی از $T_q M$ به $T_q M$ بصورت زیر می‌باشد:

$$d\varphi_t : T_q M \rightarrow T_q M$$

از طرفی بنا به خاصیت تاب آزادی داریم:

$$0 = [X, Y](q) = (\nabla_X Y - \nabla_Y X)(q) = 0.$$

که تساوی آخر به دلیل $X(q) = 0$ و $\nabla_Y X(q) = 0$ برقرار است. پس

$$\begin{aligned} 0 &= [X, Y](q) = (\nabla_X Y - \nabla_Y X)(q) \\ &= (L_X Y)(q) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (d\varphi_t - Id)Y = \frac{d}{dt}(d\varphi_t) \big|_{t=0}. \end{aligned}$$

از طرفی داریم:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(d\varphi_t) \big|_{t=s} &= \frac{d}{dt}(d\varphi_{t+s}) \big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(d\varphi_t \circ d\varphi_s) \big|_{t=0} = d\varphi_s \cdot \frac{d}{dt}(d\varphi_t) \big|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\frac{d}{dt}(d\varphi_t) \big|_{t=s} = 0.$$

پس $d\varphi_t$ به t بستگی ندارد. بنابراین در نقطه $q \in M$ داریم $d\varphi_t = Id$. در نتیجه برای هر $q \in M$ داریم $d\varphi_t = Id$ و $\varphi_t(q) = q$. از طرفی بنا بر تمرین ۴.۵.۳ در صفحه ۶۶

هرگاه M یک منیفلد ریمانی و φ و ψ دو ایزومتري از M به خودش باشد. اگر $p \in M$ موجود باشد بقسمی که $\psi(p) = \varphi(p)$ و $d\psi(p) = d\varphi(p)$ آنگاه

$$\psi \equiv \varphi$$

حال در مساله بالا برای $q \in M$ داریم $d\varphi_t = Id$ و $\varphi_t(q) = q$ پس برای هر $p \in M$ بنا به تمرین ۴.۵.۳ داریم $\varphi_t \equiv Id$. در نتیجه برای هر $p \in M$ داریم $X(p) = \frac{d}{dt}(\varphi_t(p))|_{t=0}$. پس برای هر $p \in M$ داریم $X(p) = 0$ در نتیجه $X \equiv 0$ و حکم ثابت می شود. $\square$

راهنمای حل تمرین ۸.۷.۳ در صفحه ۷۷.

اثبات. (الف): یک میدان برداری V روی $\mathbb{R}^n$ را می توان به عنوان یک نگاشت $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ در نظر گرفت. در این صورت می گوئیم میدان برداری خطی است اگر V یک نگاشت خطی باشد. بنا برتعریف میدان برداری V کیلینگ است اگر $\mathcal{L}_V g = 0$ پس کافی است ثابت کنیم $\mathcal{L}_V g = 0$ اگر و تنها اگر A پادمتقارن باشد. با توجه به خطی بودن V واضح است که با در نظر گرفتن پایه استاندارد $\mathbb{R}^n$ داریم $A_{ij} = \frac{\partial V^i}{\partial x^j}$. ابتدا فرض می کنیم A پادمتقارن است. همچنین فرض می کنیم g متریک اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ باشد. داریم

$$(\mathcal{L}_V g)(\partial_i, \partial_j) = g(\nabla_{\partial_i} V, \partial_j) + g(\partial_i, \nabla_{\partial_j} V) =,$$

$$\frac{\partial V^k}{\partial x^i} g_{jk} + \frac{\partial V^k}{\partial x^j} g_{ik} =,$$

$$\frac{\partial V^k}{\partial x^i} \delta_{jk} + \frac{\partial V^k}{\partial x^j} \delta_{ik} =,$$

$$\frac{\partial V^j}{\partial x^i} + \frac{\partial V^i}{\partial x^j}.$$

با توجه به $A_{ij} = \frac{\partial V^i}{\partial x^j}$ و پادمتقارن بودن A نتیجه می شود $\frac{\partial V^i}{\partial x^j} = -\frac{\partial V^j}{\partial x^i}$ ($i \neq j$) و $\frac{\partial V^i}{\partial x^i} = 0$ بنابراین $(\mathcal{L}_V g)(\partial_i, \partial_j) = 0$ و چون $\forall i, j$ $\mathcal{L}_V g$ تانسور است از این رابطه

نتیجه می‌شود $\mathcal{L}_V g = 0$.

برعکس اگر $\mathcal{L}_V g = 0$ باشد داریم:

$$(\mathcal{L}_V g)(\partial_i, \partial_j) = 0 \implies \frac{\partial V^j}{\partial x^i} + \frac{\partial V^i}{\partial x^j} = 0.$$

$$\implies \frac{\partial V^j}{\partial x^i} = -\frac{\partial V^i}{\partial x^j} (i \neq j), \quad \frac{\partial V^i}{\partial x^i} = 0.$$

و با توجه به $A_{ij} = \frac{\partial V^i}{\partial x^j}$ نتیجه می‌شود A پادمتقارن است.

اثبات (ب): فرض می‌کنیم φ_t و ψ_t به ترتیب گروه های موضعی ۱- پارامتری وابسته به X و Y باشند. داریم $\psi_t = f \circ \varphi_t \circ f^{-1}$. زیرا اگر قرار دهیم $\sigma_t = f \circ \varphi_t \circ f^{-1}$ به وضوح σ_t ها دیفیئومورفیسم بوده و در روابط $\sigma_{t+s} = \sigma_t \circ \sigma_s$ و $\sigma_t = Id$ صدق می‌کنند. از طرف دیگر با توجه به تعریف Y داریم

$$\left[\frac{d}{dt} \sigma_t(q) \right]_{t=0} = \left[\frac{d}{dt} (f \circ \varphi_t \circ f^{-1})(q) \right]_{t=0} =,$$

$$= (df)_{f^{-1}(q)} \left[\frac{d}{dt} (\varphi_t \circ f^{-1})(q) \right]_{t=0} =,$$

$$(df)_{f^{-1}(q)} (X((f^{-1})(q))) = Y(q).$$

و با توجه به یکتا بودن گروه ۱- پارامتری نتیجه می‌شود $\psi_t = \sigma_t$.

ابتدا فرض می‌کنیم Y کیلینگ است و ثابت می‌کنیم X نیز یک میدان کیلینگ خواهد بود. اگر $Z, W \in T_q M$ $q \in U \subset M$ باشند باید نشان دهیم

$$\langle Z, W \rangle_q = \langle (d\varphi_t)_q Z, (d\varphi_t)_q W \rangle_{\varphi_t(q)}. \quad (۶.۱۴)$$

ابتدا سمت چپ رابطه فوق را محاسبه می‌کنیم.

$$\langle Z, W \rangle_q = \langle (df)_q Z, (df)_q W \rangle$$

$$= \langle (d\psi_t)_{f(q)} ((df)_q Z), (d\psi_t)_{f(q)} ((df)_q W) \rangle,$$

$$= \langle (d(\psi_t \circ f))_q Z, (d(\psi_t \circ f))_q W \rangle.$$

حال به محاسبه سمت راست می پردازیم

$$\begin{aligned} & \langle (d\varphi_t)_q Z, (d\varphi_t)_q W \rangle \\ &= \langle (df)_{\varphi_t(q)}((d\varphi_t)_q Z), (df)_{\varphi_t(q)}((d\varphi_t)_q W) \rangle, \\ &= \langle (d(f \circ \varphi_t))_q Z, (d(f \circ \varphi_t))_q W \rangle, \\ &= \langle (d(\psi_t \circ f))_q Z, (d(\psi_t \circ f))_q W \rangle. \end{aligned}$$

تساوی آخر در رابطه فوق از رابطه $\psi_t = f \circ \varphi_t \circ f^{-1}$ نتیجه می شود. پس دو طرف رابطه (۶.۱۴) با هم برابر بوده و X یک میدان کیلینگ است.

برعکس اگر X کیلینگ باشد و $K, L \in T_p N$ و $p \in V \subset N$ نشان می دهیم

$$\langle K, L \rangle_p = \langle (d\psi_t)_p K, (d\psi_t)_p L \rangle_{\psi_t(p)}. \quad (۷.۱۴)$$

فرض می کنیم $q \in M$, $p = f(q)$ با توجه به دوسویی بودن f و اینکه ماتریس نگاشت خطی df همان ماتریس ژاکوبین f است، $Z, W \in T_q M$ موجودند که $df_q Z = K$ و $df_q W = L$. با جایگذاری این مقادیر در رابطه فوق کافی است رابطه زیر را ثابت کنیم

$$\begin{aligned} & \langle (df)_q Z, (df)_q W \rangle_{f(q)} \\ &= \langle (d\psi_t)_{f(q)}((df)_q Z), (d\psi_t)_{f(q)}((df)_q W) \rangle_{\psi_t(f(q))}. \end{aligned} \quad (۸.۱۴)$$

با توجه به $\psi_t = f \circ \varphi_t \circ f^{-1}$ و ایزومتري بودن f و φ_t سمت راست این رابطه به صورت

زیر نوشته می شود

$$\begin{aligned} & \langle (d\psi_t)_{f(q)}((df)_q Z), (d\psi_t)_{f(q)}((df)_q W) \rangle_{\psi_t(f(q))} =, \\ & \langle (d(\psi_t \circ f))_q Z, (d(\psi_t \circ f))_q W \rangle =, \\ & \langle (d(f \circ \varphi_t))_q Z, (d(f \circ \varphi_t))_q W \rangle = \langle (d\varphi_t)_q Z, (d\varphi_t)_q W \rangle =, \\ & \langle Z, W \rangle = \langle (df)_q Z, (df)_q W \rangle. \end{aligned}$$

پس Y یک میدان کیلینگ است.

اثبات (ج): می دانیم $\mathcal{L}_X g(Y, Z) = \langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle \nabla_Z X, Y \rangle$ پس باید ثابت کنیم

$$\mathcal{L}_X g = 0 \iff X \text{ کیلینگ است}$$

با توجه به اینکه $\mathcal{L}_X g = \frac{d}{ds} \{\varphi_s^* g\}_{s=0}$ داریم

$$\frac{d}{ds} \{\varphi_s^* g\}_{s=t} = \frac{d}{ds} \{\varphi_{t+s}^* g\}_{s=0} = \frac{d}{ds} \{\varphi_t^* \circ \varphi_s^* g\}_{s=0},$$

$$\varphi_t^* \frac{d}{ds} \{\varphi_s^* g\}_{s=0} = \varphi_t^* \mathcal{L}_X g. \quad (9.14)$$

ابتدا فرض می‌کنیم که X یک میدان کیلینگ است. پس به ازای هر $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ داریم $\varphi_s^* g = g$ و در نتیجه $\frac{d}{ds} \{\varphi_s^* g\}_{s=t} = 0$. لذا از رابطه (9.14) نتیجه می‌شود $\varphi_t^* \mathcal{L}_X g = 0$. از طرف دیگر با توجه به اینکه ماتریس نگاشت خطی φ_t^* ترانهاده ماتریس ژاکوبین φ_t است و φ_t دیفئومورفیزم است نتیجه می‌شود که φ_t^* نیز دوسویی است، بنابراین از $\varphi_t^* \mathcal{L}_X g = 0$ نتیجه می‌شود $\mathcal{L}_X g = 0$.

از طرف دیگر اگر $\mathcal{L}_X g = 0$ باشد طبق رابطه (8.14) داریم $\frac{d}{ds} \{\varphi_s^* g\}_{s=t} = 0$ پس $\varphi_s^* g$ به s بستگی ندارد و در نتیجه $\varphi_s^* g = \varphi^* g = g$. بنابراین $\varphi_s^* g$ ایزومتري است.

اثبات (د): چون $X(q) \neq 0$ پس یک دستگاه مختصات $(x_1, \dots, x_n)$ در یک همسایگی U از q موجود است به طوری که در این همسایگی $X = \partial_n$. با توجه به قسمت (ج) و

اینکه X یک میدان کیلینگ است داریم

$$\begin{aligned}
 \bullet &= \mathcal{L}_X g(\partial_i, \partial_j) = \langle \nabla_{\partial_i} X, \partial_j \rangle + \langle \partial_i, \nabla_{\partial_j} X \rangle, \\
 &= \langle \nabla_{\partial_i} X, \partial_j \rangle + \langle \partial_i, \nabla_{\partial_j} X \rangle \pm \langle \nabla_X \partial_i, \partial_j \rangle \pm \langle \partial_i, \nabla_X \partial_j \rangle, \\
 &= (\langle \nabla_X \partial_i, \partial_j \rangle + \langle \partial_i, \nabla_X \partial_j \rangle) - \langle \nabla_X \partial_i \\
 &\quad - \nabla_{\partial_i} X, \partial_j \rangle - \langle \partial_i, \nabla_X \partial_j - \nabla_{\partial_j} X \rangle, \\
 &= X \langle \partial_i, \partial_j \rangle - \langle [X, \partial_i], \partial_j \rangle - \langle \partial_i, [X, \partial_j] \rangle, \\
 &= \partial_n \langle \partial_i, \partial_j \rangle - \langle [\partial_n, \partial_i], \partial_j \rangle - \langle \partial_i, [\partial_n, \partial_j] \rangle = \partial_n \langle \partial_i, \partial_j \rangle \\
 &= \partial_n g_{ij}.
 \end{aligned}$$

□ پس در این دستگاه مختصات، ضرایب g_{ij} به x_n بستگی ندارند.

راهنمای حل تمرین ۸.۳.۴ در صفحه ۱۰۲.

اثبات. الف) باید نشان دهیم $\nabla_{\gamma'(t)} R(X, Y)Z = 0$ هرگاه قرار دهیم $W = \gamma'(t)$ در اینصورت داریم:

$$\begin{aligned}
 (\nabla R)(X, Y, Z, \gamma'(t)) &= (\nabla_{\gamma'} R)(X, Y, Z) \\
 &= \nabla_{\gamma'} R(X, Y, Z) - R(\nabla_{\gamma'(t)} X, Y, Z) \\
 &\quad - R(X, \nabla_{\gamma'} Y, Z) - R(X, Y, \nabla_{\gamma'} Z) = 0.
 \end{aligned}$$

پس داریم: $\nabla_{\gamma'(t)} R(X, Y, Z) = 0$ در نتیجه $R(X, Y)Z$ در طول منحنی $\gamma(t)$ موازی است.

ب) طبق تعریف موضعاً متقارن بودن نتیجه می شود به ازای هر i که $1, 2$ $\nabla_i R = 0$ و چون M همبند است پس تانسور انحنای R ثابت است یعنی $R = K$ اما از طرفی

طبق تعریف انحناى برشى داریم

$$K(\pi_p) = \frac{\langle R(X, Y)X, Y \rangle}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2}.$$

با در نظر گرفتن ∂_i, ∂_j به عنوان پایه های متعامد يک $T_p M$ داریم $K(\pi_p) = K$.
توجه داریم که منیفلد M دو بعدی است پس $T_p M$ نیز منیفلد ۲ بعدی خواهد بود. اما میدانیم که در منیفلدهای ۲ بعدی به طور موضعی در هر نقطه $p \in M$ تانسور انحنا با انحناى برشى برابر است حال چون تانسور انحنا در همه جا ثابت است پس انحناى برشى در هر نقطه $p \in M$ مقدار ثابت K را دارد در نتیجه $K(\pi) = K$.
(ج) هرگاه $\pi \subset T_p M$ یک زیر فضای ۲- بعدی $T_p M$ باشد بنا به فرض M انحناى برشى ثابت دارد پس $K(\pi) = K$ برای هر $\pi \subset T_p M$ ، در اینصورت برای هر صفحه π داریم:

$$R_m(X, Y, Z, W) = K \cdot (g(X, Z)g(Y, W) - g(Y, Z)g(X, W)).$$

حال اگر قرار دهیم $X = \partial_i, Y = \partial_j, Z = \partial_k, W = \partial_l$ در اینصورت

$$R_{ijkl} = K \cdot (g_{ik}g_{jl} - g_{jk}g_{il}).$$

پس

$$\nabla R_{ijkl} = \nabla (K \cdot (g_{ik}g_{jl} - g_{jk}g_{il})) = 0.$$

که تساوی آخر به دلیل سازگاری التصاق با متریک g حاصل شده است. در نتیجه

$$\square \quad \nabla R = 0 \quad \text{و همواره}.$$

راهنمای حل تمرین ۱۱.۸.۵ در صفحه ۱۴۹.

اثبات. نگاشت $\varphi \circ \psi^{-1}$ را در نظر می گیریم. بدون کاسته شدن از کلیت مسئله می توان فرض کرد $\varphi(p) = p$ در نتیجه $d\varphi_p$ یک نگاشت همانی است. در اینصورت واضح است

که تمام نقاط در یک همسایگی نرمال دلخواه از p توسط φ ثابت نگه داشته می شوند. هرگاه M همبند باشد هر نقطه $q \in M$ می تواند توسط زنجیره ای از همسایگی های نرمال به نقطه p وصل شود.

در نتیجه داریم $\varphi(q) = q$. فرض کنید M ، N منیفلد های ریمانی باشند و U_i یک دامنه در M ($i = 1, 2$) باشد و φ_i یک ایزومتري از U_i به یک دامنه در N ($i = 1, 2$) باشد. حال اگر $(d\varphi_1)_p = (d\varphi_2)_p$ و $\varphi_1(p) = \varphi_2(p)$ برای یک نقطه $p \in (U_1 \cap U_2)$ در اینصورت φ_1 و φ_2 روی مولفه های p در $U_1 \cap U_2$ بر یکدیگر منطبق اند. حال اگر $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ در اینصورت $\varphi_1 = \varphi_2$ روی $U_1 \cap U_2$.

فرض کنید φ یک ایزومتري از یک دامنه $U \subset M$ به یک دامنه در N باشد. فرض کنید $\gamma(t)$ ، $0 \leq t \leq 1$ ، یک منحنی پیوسته در M باشد قسمی که $\gamma(0) \in U$. ایزومتري φ توسعه پذیر در طول γ است اگر برای هر t ($0 \leq t \leq 1$) ایزومتري φ_t از دامنه U_t شامل $\gamma(t)$ به یک زیر مجموعه باز از N موجود باشد قسمی که $\varphi_t = \varphi$ و $U_t = U$. φ_t و φ'_t در امتداد یکدیگر بوده جایی که $|t - t'|$ به اندازه کافی کوچک باشد. خانواده φ_t ، $0 \leq t \leq 1$ ، امتداد φ در طول γ نامیده می شود. در نتیجه $(d\varphi_t)_{\gamma(t)}$ همانند $\varphi_t(\gamma(t))$ بطور پیوسته به t بستگی دارد. حال فرض کنید ψ_t ، $0 \leq t \leq 1$ ، امتداد دیگری از φ در γ باشد و V_t دامنه تعریف ψ_t باشد در اینصورت مجموعه t هایی که به ازای آن $\varphi_t(\gamma(t)) = \psi_t(\gamma(t))$ و $(d\varphi_t)_{\gamma(t)} = (d\psi_t)_{\gamma(t)}$ یک زیر مجموعه باز و بسته از بازه $[0, 1]$ می باشد که $t = 0$ را در بر دارد. بنابراین برای هر t ، φ_t و ψ_t روی مولفه های $\gamma(t)$ در $U_t \cap V_t$ بر یکدیگر منطبق هستند. همچنین بنا بر پیوستگی آنالیزی توابع هولومورفیک داریم که پیوستگی یک ایزومتري در طول یک منحنی یکتاست در نتیجه $\varphi \equiv \psi$ و حکم ثابت می شود. $\square$

راهنمای حل تمرین ۴.۱۰.۵ در صفحه ۱۶۲.

اثبات.

$$\begin{aligned} i_X V(Y_1, \dots, Y_{n-1}) &= V(X, Y_1, \dots, Y_{n-1}), \\ &= g dt \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n(X, Y_1, \dots, Y_{n-1}), \\ &= g dt(X) dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n(Y_1, \dots, Y_{n-1}), \\ &+ \sum_{i=2}^n (-1)^{i-1} g dx_i(X) dt \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n(Y_1, \dots, Y_{n-1}). \end{aligned}$$

با توجه به $\frac{\partial}{\partial t} = X$ و $dx_i(X) = 0$ ($i \geq 2$) رابطه فوق به صورت زیر نوشته می شود:

$$i_X V(Y_1, \dots, Y_{n-1}) = g dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n(Y_1, \dots, Y_{n-1}) \implies$$

$$i_X V = g dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

از طرف دیگر طبق تمرین ۱.۱۰.۵ داریم $d(i_X V) = (\operatorname{div} X)V$. با جایگذاری در این رابطه می توان نوشت:

$$d(g dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n) = (\operatorname{div} X)V$$

$$(\operatorname{div} X)V = dg \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n = \frac{\partial g}{\partial t} dt \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n = \frac{\partial g}{\partial t} \frac{1}{g} V$$

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial t}.$$

□

راهنمای حل تمرین ۹.۲.۷ در صفحه ۱۹۰.

اثبات. ^۲ کافی است ثابت کنیم ∇ در شرایط التصاق ریمانی روی M صدق می کند، زیرا در این صورت از قضیه اساسی هندسه ریمانی نتیجه می شود که ∇ التصاق ریمانی M است.

^۲ این تمرین از کتاب [۴۵] صفحه ۵۷ اقتباس گردیده است.

به وضوح ∇ در شرایط التصاق خطی صدق می‌کند. پس کافی است برقراری شرایط تاب آزادی و سازگاری با متریک بررسی شود. با توجه به اینکه $((\bar{\nabla}_X \bar{Y})(p)) = ((\bar{\nabla}_X Y)(p))$ و $[\bar{X}, \bar{Y}]_p = [X, Y]_p$ می‌توان از یک نمادگذاری واحد برای میدان‌های برداری و توسیع آنها استفاده کرد. چون X و Y بر M مماس هستند، $[X, Y]$ نیز بر M مماس است بنابراین داریم

$$\begin{aligned}\nabla_X Y - \nabla_Y X &= (\bar{\nabla}_X Y)^\top - (\bar{\nabla}_Y X)^\top \\ &= (\bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X)^\top = [X, Y]^\top = [X, Y].\end{aligned}$$

پس التصاق ∇ دارای تاب صفر است. حال با توجه به اینکه g تحدید $\bar{g}$ به فضای مماس بر M است و $\bar{g}((\bar{\nabla}_X Y)^\perp, Z) = \bar{g}(Y, (\bar{\nabla}_X Z)^\perp) = 0$ داریم

$$\begin{aligned}X.g(Y, Z) &= X.\bar{g}(Y, Z) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, Z) + \bar{g}(Y, \bar{\nabla}_X Z) =, \\ g((\bar{\nabla}_X Y)^\top, Z) + g(Y, (\bar{\nabla}_X Z)^\top) &=, \\ g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).\end{aligned}$$

□ پس خاصیت سازگاری با متریک نیز برقرار است و حکم ثابت می‌شود.

راهنمای حل تمرین ۸.۳.۷ در صفحه ۲۰۵.

اثبات. (الف): بنا به تعریف داریم $\bar{\Delta} f = \text{div}(\bar{\nabla} f)$ هرگاه $i = 1, \dots, n$ $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ یک پایه برای $T_p \bar{M}$ باشد داریم

$$\bar{\nabla} f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

پس

$$\bar{\Delta} f = \text{tr}(\bar{\nabla} \bar{\nabla} f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{(\partial x_i)^2}.$$

از طرفی داریم

$$(Hess f)(\partial_i) = (\bar{\nabla} \bar{\nabla} f)(\partial_i) =, \\ \bar{\nabla}_{\partial_i} \bar{\nabla} f = \bar{\nabla}_{\partial_i} \sharp(df).$$

همچنین داریم

$$\sharp(df) = \sharp\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j\right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j} \cdot g^{ij} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

پس

$$\bar{\nabla}_{\partial_i} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j} \cdot g^{ij} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \\ = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \cdot g^{ij} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j} \cdot g^{ij} \cdot \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

در یک دستگاه مختصات نرمال داریم

$$(Hess f)(\partial_i) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{(\partial x^j)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

$$tr(Hess f) = tr(\partial_i \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{(\partial x^j)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{(\partial x^i)^2}.$$

پس داریم

$$\bar{\Delta} f = trace Hess f$$

(ب) $Hessf$ یک تانسور از نوع $\binom{1}{1}$ می باشد باید نشان دهیم عملگر هسیان یک عملگر متقارن است.

$$\begin{aligned}
 \langle (Hessf)(Y), X \rangle &= \langle (\nabla \nabla f)(Y), X \rangle = \langle \nabla_Y \nabla f, X \rangle \\
 &= \langle \nabla_Y \sharp(df), X \rangle = \langle \sharp \nabla_Y df, X \rangle = g(\sharp \nabla_Y df, X) \\
 &= b(\sharp \nabla_Y df)(X) = (\nabla_Y df)(X) = (\nabla df)(Y, X) \\
 &= \langle Y, (Hessf)X \rangle = \langle Y, \sharp \nabla_X df \rangle = \langle \sharp \nabla_X df, Y \rangle \\
 &= g(\sharp \nabla_X df, Y) = b((\sharp \nabla_X df)(Y)) = (\nabla_X df)(Y) \\
 &= (\nabla df)(X, Y).
 \end{aligned}$$

از طرفی داریم

$$(\nabla df)(Y, X) - (\nabla df)(X, Y) = (X.Y - Y.X)f - (\nabla_Y X - \nabla_X Y)f =$$

پس

$$\langle (Hessf)Y, X \rangle = \langle Y, (Hessf)X \rangle$$

که حکم ثابت شد.

(ج) هرگاه $E_1, \dots, E_n, E_{n+1} = \frac{gradf}{|gradf|} = \eta$ یک قاب متعامد یکه در همسایگی $p \in M$ در $\bar{M}$ باشد در اینصورت داریم

$$\begin{aligned}
 nH &= trace h^\sharp = \sum_{i=1}^n \langle h^\sharp(E_i), E_i \rangle \\
 &= - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} \eta, E_i \rangle - \langle \bar{\nabla}_\eta \eta, \eta \rangle \\
 &= - \sum_{i=1}^{n+1} \langle \bar{\nabla}_{E_i} \eta, E_i \rangle.
 \end{aligned}$$

از طرفی بنا به تعریف دیورژانس هرگاه T یک تانسور از نوع $\binom{r}{s}$ باشد در اینصورت

$$(\operatorname{div} T)_{j_1 \dots j_{s-1}}^{i_1 \dots i_r} = g^{ij} \nabla_i T_{j j_1 \dots j_{s-1}}^{i_1 \dots i_r}$$

پس

$$-\sum_{i=1}^{n+1} \langle \bar{\nabla}_{E_i} \eta, E_i \rangle = -\operatorname{div}_{\bar{M}} \eta = -\operatorname{div} \left(\frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|} \right).$$

در نتیجه

$$nH = -\operatorname{div} \left(\frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|} \right).$$

(د) هرگاه M یک ابر رویه نشاننده باشد باید نشان دهیم تابع $f: \bar{M} \rightarrow \mathbb{R}$ و $a \in \mathbb{R}$ موجود است بقسمی که $M = f^{-1}(a)$. می دانیم $T_p M$ یک زیر فضای برداری $T_p \bar{M}$ می باشد. برای هر $i = 1, \dots, n$ ، $\{E_i\}$ یک پایه برای $T_p M$ باشد می توان آن را به پایه ای چون $\{E_i \cup \eta\}$ روی $T_p \bar{M}$ گسترش داد. بنا به قضیه ای در جبر خطی یک و دقیقاً یک تبدیل خطی $f: \bar{M} \rightarrow \mathbb{R}$ موجود است که $f(E_i) = a$ $1 \leq i \leq n$ و $\dim f^{-1}(a) = n$ و $\dim T_p M = n$ از طرفی $T_p M \subset f^{-1}(a)$ پس $f(\eta) = a$ و $T_p M = f^{-1}(a)$ از طرفی داریم $\pi: T_p M \rightarrow M$ که در آن نگاشت تصویر است در اینصورت برای هر نقطه $x \in M$ همسایگی باز U حول x وجود دارد بقسمی که $T_x U = \pi^{-1}(x)$ پس $T_x U = \pi^{-1}(x) = f^{-1}(a)$ در نتیجه $x = (\pi \circ f^{-1})(a)$ قرار می دهیم $F = (\pi \circ f^{-1})^{-1}$ پس $x = F^{-1}(a)$ در نتیجه M بطور موضعی تصویر معکوس یک مقدار حقیقی است.

□

راهنمای حل تمرین ۶.۲.۱۲ در صفحه ۳۲۸.

اثبات. کافی است انحنا ی گاوسی رویه را از فرمول زیر موسوم به فرمول پترسون-کودازی حساب و ضرایب متریک ریمان در دستگاه مختصات شبه ژئودزیکی را جایگزین کنیم.

$$K = \frac{-1}{2\sqrt{EG-F^2}} \left[\left(\frac{E_{u^2} - F_{u^1}}{2\sqrt{EG-F^2}} \right)_{u^2} - \left(\frac{F_{u^2} - G_{u^1}}{2\sqrt{EG-F^2}} \right)_{u^1} \right] \quad (۱۰.۱۴)$$

$$= -\frac{1}{4(EG-F^2)^2} \begin{vmatrix} E & E_{u^1} & E_{u^2} \\ F & F_{u^1} & F_{u^2} \\ G & G_{u^1} & G_{u^2} \end{vmatrix}.$$

با جایگذاری مقادیر $E=1, F=0, G=f^2$ در رابطه فوق داریم

$$K = \frac{-1}{2f} \left(\frac{2ff_{u^1}}{f} \right)_{u^1} = \frac{-2f_{u^1u^1}}{2f}$$

$$f_{u^1u^1} + Kf = 0.$$

□

راهنمای حل تمرین ۱.۳.۱۴ در صفحه ۴۲۵.

اثبات. (الف) یک میدان برداری کیلینگ است پس $L_X g = 0$ از طرفی

$$\begin{aligned} (L_X g)(Z, X) &= X.g(Z, X) - g(L_X Z, X) - g(Z, L_X X) \\ &= X.g(Z, X) - g([X, Z], X) - g(Z, [X, X]), \\ &= X.g(Z, X) - g(\nabla_X Z, X) + g(\nabla_Z X, X) = 0. \end{aligned}$$

از طرفی بنا به خاصیت سازگاری با متریک داریم

$$X.g(Z, X) = g(\nabla_X Z, X) + g(Z, \nabla_X X).$$

پس

$$g(\nabla_X Z, X) + g(Z, \nabla_X X) - g(\nabla_X Z, X) + g(\nabla_Z X, X) = 0.$$

در نتیجه

$$g(Z, \nabla_X X) + g(\nabla_Z X, X) = 0.$$

از طرفی در نقطه $p \in M$ داریم

$$0 = (L_X g)(X, X)(p) = X \cdot \langle X, X \rangle(p) = 2 \langle \nabla_X X, X \rangle(p) \Rightarrow \nabla_X X(p) = 0.$$

پس

$$g(\nabla_Z X, X)(p) = \langle \nabla_Z X, X \rangle(p) = 0.$$

که حکم ثابت شد.

(ب) قرار می دهیم

$$S = \frac{1}{2} Z \langle X, X \rangle - \langle R(X, Z)X, Z \rangle.$$

بنا به معادله کیلینگ داریم

$$\langle Z, \nabla_X X \rangle + \langle \nabla_Z X, X \rangle = 0.$$

پس S بصورت زیر نوشته می شود

$$S = Z \langle \nabla_Z X, X \rangle - \langle \nabla_X \nabla_Z X, Z \rangle + \langle \nabla_Z \nabla_X X, Z \rangle + \langle \nabla_{[X, Z]} X, Z \rangle,$$

$$S = -Z \langle \nabla_X X, Z \rangle - \langle \nabla_X \nabla_Z X, Z \rangle + \langle \nabla_Z \nabla_X X, Z \rangle + \langle \nabla_{[X, Z]} X, Z \rangle.$$

$$\begin{aligned}
 S &= - \langle \nabla_Z \nabla_X X, Z \rangle - \langle \nabla_X X, \nabla_Z Z \rangle - \langle \nabla_X \nabla_Z, Z \rangle, \\
 &+ \langle \nabla_Z \nabla_X X, Z \rangle + \langle \nabla_{[X,Z]} X, Z \rangle, \\
 &= \langle \nabla_{[X,Z]} X, Z \rangle - \langle \nabla_X X, \nabla_Z Z \rangle - \langle \nabla_X \nabla_Z X, Z \rangle.
 \end{aligned}$$

از طرفی داریم

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{L}_X g)(Z, [X, Z]) &= X.g(Z, [X, Z]) - g([X, Z], [X, Z]) \\
 &- g(Z, [X, [X, Z]]) = 0.
 \end{aligned}$$

همچنین بنا به خاصیت سازگاری با متریک داریم

$$\begin{aligned}
 X.g(Z, [X, Z]) &= \langle \nabla_X Z, [X, Z] \rangle + \langle Z, \nabla_X [X, Z] \rangle, \\
 &= \langle \nabla_X Z, \nabla_X Z \rangle - \langle \nabla_X Z, \nabla_Z X \rangle + \langle Z, \nabla_X [X, Z] \rangle.
 \end{aligned}$$

پس

$$\begin{aligned}
 &\langle \nabla_X Z, \nabla_X Z \rangle - \langle \nabla_X Z, \nabla_Z X \rangle +, \\
 &\langle Z, \nabla_X [X, Z] \rangle - \langle [X, Z], [X, Z] \rangle - \langle Z, [X, [X, Z]] \rangle = 0.
 \end{aligned}$$

از اینجا نتیجه می شود

$$\langle \nabla_{[X,Z]} X, Z \rangle = \langle \nabla_Z X, \nabla_Z X \rangle - \langle \nabla_Z X, \nabla_X Z \rangle. \quad (۱۱.۱۴)$$

در اینصورت داریم

$$\begin{aligned}
 S &= \langle \nabla_Z X, \nabla_Z X \rangle - \langle \nabla_Z X, \nabla_X Z \rangle \\
 &- \langle \nabla_X X, \nabla_Z Z \rangle + \langle \nabla_Z X, \nabla_X Z \rangle, \\
 &= \langle \nabla_Z X, \nabla_Z X \rangle - \langle \nabla_X X, \nabla_Z Z \rangle.
 \end{aligned}$$

از طرفی بنا به معادله کیلینگ داریم $\nabla_X X(p) = 0$

$$\begin{aligned} S &= \langle \nabla_Z X, \nabla_Z X \rangle_p = \langle A_X(Z), A_X(Z) \rangle(p), \\ &= \frac{1}{4} Z_p(Z \langle X, X \rangle) - \langle R(X, Z)X, Z \rangle. \end{aligned}$$

□

در نتیجه حکم ثابت می شود.

۳.۱۴ مسایل گوناگون

در این بخش چند تمرین جالب از کتب گوناگون در نظر گرفته ، مقدمات آنها را بررسی و سپس راهنمایی لازم برای حل آنها را می آوریم.

تمرین ۱.۳.۱۴. ^۴ فرض کنید M یک منیفلد ریمانی فشرده با بعد زوج باشد بقسمی که انحنا ی برشی آن مثبت باشد. آنگاه هر میدان برداری کیلینگ یک نقطه تکینی روی M دارد. بعبارت دیگر نقطه ای مانند $p \in M$ وجود دارد بقسمی که $X(p) = 0$.

تمرین ۲.۳.۱۴. ^۵ فرض کنیم M یک منیفلد ریمانی با شرایط زیر باشد. برای هر دونقطه $p, q \in M$ انتقال موازی از p به q به آن منحنی که p را به q وصل می کند بستگی ندارد. ثابت کنید که انحنا ی M صفر است. بعبارت دیگر برای هر $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ داریم $R(X, Y)Z = 0$.

تمرین ۳.۳.۱۴. فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی باشد. می توان نشان داد که برای

^۴ از کتاب [۴۵] صفحه ۱۰۴ (مبحث انحنا)

^۵ از کتاب [۴۵] صفحه ۱۰۴

یک میدان برداری همدیس مانند X و $\forall Y, Z, W \in \mathcal{X}(M)$ روابط زیر برقرار است.

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X \nabla)(Y, Z) &= (d\rho)(X)Y + (d\rho)(Y)X - g(Y, Z)(d\rho)^\sharp, \\(\mathcal{L}_X R_m)(Y, Z, W) &= -(\nabla d\rho)(Z, W)Y + (\nabla d\rho)(Y, W)Z \\&\quad - g(Z, W)(\nabla d\rho^\sharp)Y + g(Y, W)(\nabla d\rho^\sharp)Z, \\(\mathcal{L}_X Ric)(Y, Z) &= -(n-2)(\nabla d\rho)(Y, Z)Y + \Delta\rho.g(Y, Z), \\ \mathcal{L}_X S &= 2(n-1)\Delta\rho - 2\rho S.g,\end{aligned}$$

که در آن $(d\rho)^\sharp$ به معنی میدان برداری وابسته به ۱- فرم $d\rho = \rho_i dx^i$ است که در مختصات موضعی توسط $\rho^k = \rho_i g^{ik}$ نشان داده می شود.

تمرین ۴.۳.۱۴. ^۶ فرض کنیم $(M, \langle, \rangle_p)$ یک منیفلد ریمانی باشد. می خواهیم با استفاده از متریک ریمانی $\langle, \rangle_p$ روی M یک متر ریمانی روی TM بصورت زیر تعریف کنیم. فرض کنیم $(p, v) \in TM$ و V و W بردارهای مماس در TM در نقطه (p, v) باشند. به عبارت دیگر $V, W \in T_v T_p M$. منحنی های متقاطع α و β را در TM طوری تعریف می کنیم که به در نقطه تقاطع بر این دو بردار مماس باشند. یعنی فرض می کنیم

$$\alpha : t \longrightarrow (p(t), v(t)),$$

$$\beta : t \longrightarrow (q(s), w(s)),$$

که در آن $p(\cdot) = q(\cdot) = p$, $v(\cdot) = w(\cdot) = v$ و $V = \alpha'(\cdot)$ و $W = \beta'(\cdot)$. یک ضرب داخلی روی TM بصورت زیر تعریف کنید.

$$\langle V, W \rangle_{(p,v)} = \langle d\pi(V), d\pi(W) \rangle_p + \left\langle \frac{DV}{dt}(\cdot), \frac{Dw}{ds}(\cdot) \right\rangle_p.$$

که در آن $d\pi$ دیفرانسیل $\pi : TM \longrightarrow M$ است.

(الف) ثابت کنید که این ضرب داخلی خوشتعریف بوده و یک متر ریمانی روی TM تعریف

می کند.

(ب) یک بردار در TM $(p, v) \in TM$ را که بر تار $T_p M \approx \pi^{-1}(p)$ با این ضرب داخلی عمود است را یک بردار افقی می گوئیم. منحنی

$$\alpha: \mathbb{R} \rightarrow TM,$$

$$t \rightarrow (p(t), v(t)).$$

در TM را یک منحنی افقی گوئیم اگر بردار مماس آن برای هر t افقی باشد. ثابت کنید منحنی α افقی است اگر و تنها اگر میدان برداری $v(t)$ در طول $p(t)$ در M موازی باشد. (ج) ثابت کنید میدان برداری ژئودزیک یک میدان برداری افقی است.

(د) ثابت کنید مسیرهای میدان برداری ژئودزیک با متر بالا ژئودزیک هایی روی TM هستند.

(ه) یک بردار در TM $(p, v) \in TM$ قائم نامیده می شود اگر مماس بر تار $T_p M \approx \pi^{-1}(p)$ باشد. نشان دهید:

$$\langle W, W \rangle_{(p,v)} = \langle d\pi(W), d\pi(W) \rangle_p$$

اگر W افقی باشد.

$$\langle W, W \rangle_{(p,v)} = \langle W, W \rangle_p$$

اگر W قائم باشد.

تمرین ۵.۳.۱۴. فرض کنید (M, g) یک منیفلد ریمانی فشرده، جهت پذیر و دارای مرز باشد. هرگاه ω یک تانسور $(\cdot)_k$ و η یک تانسور $(\cdot)_{k+1}$ روی M باشد، نشان دهید

$$\int_M \langle \nabla \omega, \eta \rangle dV = - \int_M \langle \omega, \text{tr} \nabla \eta \rangle dV + \int_{\partial M} \langle \omega \otimes N, \eta \rangle d\bar{V}. \quad (12.14)$$

که در آن tr روی دو اندیس آخر $\nabla \eta$ گرفته می شود. همچنین فرمول (۱۲.۱۴) در مختصات موضعی بصورت زیر نوشته می شود.

$$\int_M \omega_{i_1 \dots i_k; j} \eta^{i_1 \dots i_k j} dV = - \int_M \omega_{i_1 \dots i_k} \eta_{; j}^{i_1 \dots i_k j} dV + \int_{\partial M} \omega_{i_1 \dots i_k} \eta^{i_1 \dots i_k j} N_j d\bar{V}. \quad (13.14)$$

۴.۱۴ راهنمای حل مسایل گوناگون

راهنمای حل تمرین های گوناگون ۱.۳.۱۴ در صفحه ۴۲۵.

اثبات. برای اثبات از برهان خلف استفاده می کنیم. فرض کنیم $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی حقیقی دیفرانسیل پذیر روی M باشد که برابر $(q) = \langle X, X \rangle (q)$ است. فرض کنیم $p \in M$ یک نقطه مینیم برای تابع f باشد. چون منیفلد M فشرده است، بنا بر تعمیم قضیه اکسترمم روی منیفلدها، همواره دارای مینیمم است. عبارت دیگر در این نقطه مشتق تابع صفر می شود $df_p = 0$. حال به برهان خلف فرض می کنیم $X(p) \neq 0$. نگاشت خطی A را بصورت زیر تعریف می کنیم

$$A : T_p M \rightarrow T_p M$$

$$y \rightarrow A_X Y = \nabla_Y X$$

که در آن Y یک توسیع $y \in T_p M$ می باشد. فرض می کنیم $E \subset T_p M$ عمود بر $X(p)$ باشد در اینصورت قرار می دهیم $A : E \rightarrow E$. بنا به ضابطه نگاشت A ، این نگاشت یک به یک و پوشا و خطی است در نتیجه یک ایزومورفیسم می باشد همچنین X یک میدان

برداری کیلینگ است در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} \bullet &= (L_X g)(Y, Z) = L_X g(Y, Z) - g(L_X Y, Z) - g(Y, L_X Z) =, \\ &= X.g(Y, Z) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z]) =, \\ &g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) - g(\nabla_X Y, Z) +, \\ &g(\nabla_Y X, Z) - g(Y, \nabla_X Z) + g(Y, \nabla_Z X). \end{aligned} \quad (14.14)$$

در نتیجه داریم

$$g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) = 0. \quad (15.14)$$

پس نگاشت A یک نگاشت پاد متقارن نیز می باشد. از طرفی بنا به قضیه ای در جبر خطی هرگاه V یک فضای برداری به بعد n باشد و نگاشت $T : V \longrightarrow V$ یک ایزومورفیسم متقارن باشد در این صورت n عددی زوج خواهد بود. در اینجا نگاشت $A : E \longrightarrow E$ یک ایزومورفیسم پادمتقارن می باشد و چون $E \subset T_p M$ و فضاهای متقارن و پاد متقارن مکمل یکدیگرند و بعد $T_p M$ زوج است در نتیجه بعد E عددی زوج خواهد بود. از طرفی $E \subset T_p M$ عمود بر $X(p)$ می باشد پس $\dim E = \dim M - 1$ که عددی فرد خواهد بود که این تناقض است پس $X(p) = 0$ که حکم ثابت می شود. $\square$

راهنمای حل تمرین های گوناگون ۳.۳.۱۴ در صفحه ۴۲۵.

اثبات. فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی باشد. میدان برداری X را همدیس گوئیم اگر $\mathcal{L}_X g(Y, Z) = 2\rho g(Y, Z)$ که در آن $\rho \in C^\infty(M)$ یک تابع حقیقی روی M است.

راهنمایی. با استفاده از تعریف مشتق لی تانسور متریک را بدست آورید.

$$(\mathcal{L}_X g)(Y, Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M). \quad (۱۶.۱۴)$$

می توانید از مختصات موضعی نیز استفاده کنید. یعنی میدان برداری X را همدیس گوئیم اگر $\mathcal{L}_X g_{ij} = 2\rho g_{ij}$ سپس مشتق لی علایم کریستوفل و تانسور انحنا را بدست آورید. این محاسبات طولانی است و می توانید جواب های خود را با کتاب [۷۷] مقایسه کنید. حل تمرین ۱۰.۳.۱۴ در صفحه ۴۲۵ را نیز ببینید. $\square$

راهنمای حل تمرین های گوناگون ۴.۳.۱۴ در صفحه ۴۲۶.

اثبات. (الف) ابتدا به ساختار تعاریف ارائه شده در فرض دقت کرده و تا حدی این مفاهیم را باز می کنیم.

$$\pi : TM \rightarrow M,$$

$$(x, y) \rightarrow x.$$

دیفرانسیل این نگاشت، نگاشت تصویر فضای TTM است که به صورت زیر تعریف می شود.

$$\pi_* = d\pi : TTM \rightarrow TM,$$

$$(x, y, X, Y) \rightarrow (x, X).$$

که در آن X, Y مولفه های برداری مانند V در TTM است که به عناصر پایه خود یعنی $\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}$ تجزیه شده است این عناصر پایه بر اساس تجزیه TTM به دو فضای عمودی VTM و افقی HTM به دست می آیند. بنابراین ضرب داخلی بالا به این صورت عمل

می کند

$$\langle d\pi(V), d\pi(W) \rangle_p = \langle V_1, W_1 \rangle_p. \quad (۱۷.۱۴)$$

که در آن $V, W \in T_{(p,v)}TM$ و V_1, W_1 برداری در پایه $\frac{\partial}{\partial x_i}$ هستند که به فضای T_pM تعلق دارد پس اولین ضرب در تعریف، همان ضرب روی T_pM است. دومین ضرب نیز به وضوح حاصل ضرب داخلی بردارهای موازی در طول منحنی $\alpha(t)$ می باشد. پس به فضای مماس بر TM یعنی به $V_{(p,v)}TM$ تعلق داشته لذا خوش تعریف است پس لذا ضرب تعریفی بالا در فضای TTM خوش تعریف است. با توجه به این که ضرب های داخلی بالاییک متریک روی M هستند بنابراین خطی و متقارن و مثبت معین هستند در نتیجه رابطه مذکور در قسمت (الف) یک متر ریمانی روی TM است.

ب) ابتدا فرض می کنیم $v(t)$ در طول خم $p(t)$ موازی باشد نشان می دهیم خم $\alpha(t) = (p(t), v(t))$ افقی است برای این منظور کافی است نشان دهیم بردار مماس به منحنی α به $\pi^{-1}(p(t))$ عمود است.

بردار مماس به α به صورت زیر تعریف می شود

$$V(t) = (p(t), v(t), p'(t), v'(t)). \quad (۱۸.۱۴)$$

و W را برداری دلخواه از فضای $\pi^{-1}(p(t))$ در نظر می گیریم در این صورت $W = W_1 + W_2 = 0 + W_2$ به ازای نقطه دلخواه $p = p(t)$ با جایگذاری متر تعریف شده در قسمت (الف) داریم

$$\langle V, W \rangle_{(p,v)} = \langle d\pi(V), d\pi(W) \rangle_p + \langle Dv/dt(t), Dw/dt(t) \rangle_p. \quad (۱۹.۱۴)$$

که نتیجه می دهد

$$\langle V, W \rangle_{(p,v)} = \langle p'(t), 0 \rangle_p + 0 = 0. \quad (۲۰.۱۴)$$

۱ این یعنی V به W عمود است و با توجه به دلخواه بودن W به کل $T_p M$ عمود است. عکس این مطلب نیز از رابطه بالا واضح است.

(ج) از آنجایی که یک منحنی برای میدان ژئودزیک عبارت است از $(\gamma(t), \gamma'(t)) : t \rightarrow$ بطوریکه γ یک ژئودزیک روی M باشد پس میدان برداری $\gamma'(t)$ در طول $\gamma(t)$ در M موازی است و بنابراین از قسمت (ب) نتیجه می شود که میدان ژئودزیک یک میدان برداری افقی است.

(د) فرض کنیم $\bar{\alpha}(t) = (\alpha(t), v(t))$ ابتدا نشان می دهیم $l(\bar{\alpha}) \geq l(\alpha)$.
داریم

$$\bar{\alpha}'(t) = (\alpha'(t), \frac{DV}{dt}). \quad (21.14)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\bar{\alpha}}{dt} \right| &= \left\langle \frac{d\bar{\alpha}}{dt}, \frac{d\bar{\alpha}}{dt} \right\rangle^{\frac{1}{2}} =, \\ &= \left(\langle d\pi(\bar{\alpha}'(t)), d\pi(\bar{\alpha}'(t)) \rangle + \left\langle \frac{DV}{dt}, \frac{DV}{dt} \right\rangle \right)^{\frac{1}{2}} =, \\ &= \left(|d\pi(\bar{\alpha}'(t))|^2 + \left| \frac{DV}{dt} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geq \left(|d\pi(\bar{\alpha}'(t))|^2 \right)^{\frac{1}{2}} =, \\ &= |d\pi(\bar{\alpha}'(t))| = |\alpha'(t)|. \end{aligned} \quad (22.14)$$

در نتیجه

$$\left| \frac{d\bar{\alpha}}{dt} \right| \geq |\alpha'(t)|. \quad (23.14)$$

حال با انتگرال گیری ازطرفین نامساوی داریم

$$\int \left| \frac{d\bar{\alpha}}{dt} \right| dt \geq \int |\alpha'(t)| dt. \quad (24.14)$$

در نتیجه

$$l(\bar{\alpha}) \geq l(\alpha)$$

حال شار ژئودزیک $\bar{\gamma}(t)$ را که از نقطه (p, v) می گذرد در نظر می گیریم $\bar{\gamma}(t)$ را بطور موضعی بصورت $(\gamma(t), \gamma'(t))$ نمایش می دهیم که در آن $\gamma(t)$ یک ژئودزیک روی M می باشد. حال یک همسایگی محدب $W \subset TM$ از (p, v) را در نظر می گیریم قسمی که $V \subset M$ یک همسایگی از p باشد که $\pi(W) = V$. دو نقطه $Q_1 = (q_1, v_1)$ و $Q_2 = (q_2, v_2)$ را در $\bar{\gamma} \cap W$ در نظر می گیریم. فرض خلف کنیم $\bar{\gamma}$ ژئودزیک روی TM نباشد در این صورت یک منحنی $\bar{\alpha}$ در همسایگی محدب W قرار دارد قسمی که از دو نقطه Q_1 و Q_2 گذشته و $l(\bar{\alpha}) < l(\bar{\gamma})$ از طرفی داریم

$$|\frac{d\bar{\gamma}}{dt}| = \langle \frac{d\bar{\gamma}}{dt}, \frac{d\bar{\gamma}}{dt} \rangle_{(p,v)}^{\frac{1}{2}} = (\langle d\pi(\bar{\gamma}'(t)), d\pi(\bar{\gamma}'(t)) \rangle_p + \langle \frac{D\bar{\gamma}'}{dt}, \frac{D\bar{\gamma}'}{dt} \rangle_p)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (\langle d\pi(\bar{\gamma}'(t)), d\pi(\bar{\gamma}'(t)) \rangle_p)^{\frac{1}{2}} = |d\pi(\bar{\gamma}'(t))| = |\gamma'(t)|$$

در نتیجه $l(\bar{\alpha}) < l(\bar{\gamma}) = l(\gamma)$ پس $l(\bar{\gamma}) = \int |\frac{d\bar{\gamma}}{dt}| dt = \int |\gamma'(t)| dt = l(\gamma)$ از طرفی نشان دادیم $l(\alpha) \leq l(\bar{\alpha}) < l(\gamma)$ که در آن $\alpha = \pi(\bar{\alpha})$ در نتیجه α در نتیجه $\bar{\gamma}$ ژئودزیک است. که این با ژئودزیک بودن γ در تناقض است در نتیجه $\bar{\gamma}$ ژئودزیک است.

• اگر $W \in TTM$ افقی باشد به $T_p M$ عمود خواهد بود لذا از قسمت (ب) نتیجه می شود $\frac{Dw}{dt} = 0$ و این یعنی $\langle \frac{Dv}{dt}, \frac{Dw}{dt} \rangle = 0$. پس با جایگذاری در متر تعریف شده در قسمت (الف) داریم:

$$\langle W, W \rangle_{(p,v)} = \langle d\pi(W), d\pi(W) \rangle_p. \quad (۲۵.۱۴)$$

اگر $W \in TTM$ عمودی باشد طبق تعریف بر تار $T_p M$ مماس است لذا بردار W ساختاری به صورت $W = w^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ دارد پس ضرب داخلی این بردار همان ضرب داخلی تعریف شده در $T_p M$ است در نتیجه

$$\langle W, W \rangle_{(p,v)} = \langle W, W \rangle_p. \quad (۲۶.۱۴)$$

راهنمای حل تمرین های گوناگون ۵.۳.۱۴ در صفحه ۴۲۷.

اثبات. فرض کنید M فشرده و جهت پذیر و دارای مرز باشد ثابت می کنیم.

$$\operatorname{div} \langle \omega, \eta \rangle = \langle \omega, \operatorname{tr} \nabla \eta \rangle + \langle \nabla \omega, \eta \rangle. \quad (۲۷.۱۴)$$

حاصلضرب داخلی $\langle \omega, \eta \rangle$ را بصورت یک ۱-فرم نگاه می کنیم.

$$\langle \omega, \eta \rangle = (\omega_{i_1 \dots i_k} \otimes \eta^{i_1 \dots i_k j}) dx^j. \quad (۲۸.۱۴)$$

چون g موازی است پس

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \langle \omega, \eta \rangle &= \nabla^j (\omega_{i_1 \dots i_k} \eta^{i_1 \dots i_k j}) = g^{ij} \nabla_i (\omega_{i_1 \dots i_k} \eta^{i_1 \dots i_k j}), \\ &= (\nabla^j \omega_{i_1 \dots i_k}) (\eta^{i_1 \dots i_k j}) + (\omega_{i_1 \dots i_k}) (\nabla^j \eta^{i_1 \dots i_k j}), \\ &= \langle \omega, \operatorname{div} \eta \rangle + \langle \nabla \omega, \eta \rangle \\ &= \langle \omega, \operatorname{tr} \nabla \eta \rangle + \langle \nabla \omega, \eta \rangle. \end{aligned} \quad (۲۹.۱۴)$$

از طرفی داریم

$$\operatorname{div} \langle \omega, \eta \rangle = \operatorname{div}(\# \langle \omega, \eta \rangle).$$

بنا به قضیه دیورژانس داریم

$$\begin{aligned} \int_M \operatorname{div} \langle \omega, \eta \rangle dV &= \int_M \operatorname{div}(\# \langle \omega, \eta \rangle) dV \\ &= \int_{\partial M} \langle \# \langle \omega, \eta \rangle, N \rangle d\bar{V} = \int_{\partial M} g(\# \langle \omega, \eta \rangle, N) d\bar{V}, \\ &= \int_{\partial M} b(\# \langle \omega, \eta \rangle)(N) d\bar{V} = \int_{\partial M} \langle \omega, \eta \rangle(N) d\bar{V} \\ &= \int_{\partial M} \langle \omega \otimes N, \eta \rangle d\bar{V}. \end{aligned}$$

با انتگرال گیری از رابطه (۲۹.۱۴) و استفاده از رابطه فوق داریم

$$\int_M \langle \nabla \omega, \eta \rangle dV = - \int_M \langle \omega, \operatorname{tr} \nabla \eta \rangle dV + \int_{\partial M} \langle \omega \otimes N, \eta \rangle d\bar{V}.$$

۴۳۵ _____ راهنمای حل برخی از مسایل کتاب

□ از آنجا رابطه (۱۲.۱۴) بدست می آید.

کتاب نامه

- [۱] بروجردیان ناصر، جزوه درس هندسه منیفلد ۲، دانشگاه امیرکبیر.
- [۲] بیدآباد بهروز، هندسه منیفلد ۱، انتشارات دانشگاه امیرکبیر، چاپ سوم
نوروز ۱۳۸۸.
- [۳] بیدآباد بهروز و آسنجرائی اعظم، کاربرد هندسه فینسلر در حل مسئله ترافیک
، نشریه علمی پژوهشی دانشگاه امیرکبیر، شماره ۶۷ زمستان ۱۳۸۶.
- [۴] بیدآباد بهروز و زعیم امیرحسام، مسیرهای کوتاهترین زمان برای یک ربات
دیفرانسیلی، نشریه علمی پژوهشی دانشگاه امیرکبیر، سال نوزدهم، شماره
۶۹- زمستان ۱۳۸۷.
- [۵] بیدآباد بهروز و آهنگری فاطمه، مدل سازی حرکت هواپیما در گردباد و
مسیرهای بهینه زمانی، نشریه علمی پژوهشی دانشگاه امیرکبیر، سال بیستم،
شماره ۷۰- ۱۳۸۸. (در حال چاپ)
- [۶] تومانیان م.، جزوه درس هندسه منیفلد، دانشگاه تبریز.
- [۷] جذبی ع.، هندسه ایرانی در عمل، ابولوف محمد بن البوزجانی، انتشارات
سروش ۱۳۶۷.

[۸] رضایی مرتضی میر محمد و نجفی بهزاد، هندسه منیفلدها، انتشارات سال ۱۳۸۲.

[۹] رضوی اسدالله، جبر و گروه لی، انتشارات دانشگاه امیرکبیر، سال ۱۳۸۷.

[۱۰] رفیعی راد مهدی، پایان نامه کارشناسی ارشد، به راهنمایی بهروز بیدآباد، دانشگاه امیرکبیر، سال ۱۳۸۳.

[۱۱] رفیعی راد مهدی و بیدآباد بهروز، مسیر بهینه در ناوبری تعقیب محض به عنوان ژئودزیک فینسلری، نشریه علمی پژوهشی دانشگاه امیرکبیر، سال نوزدهم، شماره ۶۸-ه بهار تابستان ۱۳۸۷.

[۱۲] شهبهانی سیاوش، جزوه درس هندسه منیفلد، انتشارات دانشگاه صنعتی شریف، تهران ۱۳۷۰.

[13] Abate, M., Patrizio, G.; *Finsler Metrics - A global approach with applications to geometric function theory*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1994.

[14] Akbar-Zadeh, H. ; *Les espaces de Finsler et certaines de leurs généralisations*, Ann. Ec. Norm. Sup. 3ème série. t. 80. (1963), 1-79.

[15] Akbar-Zadeh, H. ; *Initiation to Global Finslerian Geometry*, North-Holland, Mathematical Library vol. 68 , 2006.

- [16] Antonnelli P. L., Ingarden R. S., and Matsumoto, M.
; *The theory of Sprays and Finsler spaces with applica-
tion in Biology*, FTPH 58, Kluwer Acad. Publ., 1993.
- [17] Asanjarani A. and Bidabad B.; *A classification of com-
plete Finsler manifolds*, Differential Geometry and its
Applications, vol(26), 2008, 434-444.
- [18] Asanjarani A. and Bidabad B.; *Strong Rigidity of com-
plete Finsler manifolds*, to appear in Journal of Geom-
etry and Physics, 2009.
- [19] Abate, M. and Patrizio, G.; *Finsler Metrics-A Global
Approach with applications to geometrics function the-
ory*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1994.
- [20] Bao, D., Chern, S.S. and Z. Shen; *An Introduction to
Riemann-Finsler Geometry*, Springer-Varlag, 2000.
- [21] Bao, D., Lacky, B.; *Special Eigenforms on the Sphere
Bundle of a Finsler Manifold*, Contemporary Mathe-
matics, vol. 196, 1996.
- [22] Bejancu, A.; *Finsler Geometry and Applications*, Ellis
Horwood limited publication England 1990.
- [23] Besse, A.L.; *Einstien manifolds*, Springer-Varlag,
Berlin, 1987.

- [24] Bidabad, B. *Transformations conformes et projectives d'une variétés riemannienne*. L'Université Paul Sabatier de Toulouse, France. Thèse de doctorat no 3402, (1987).
- [25] Bidabad, B. ; *Conformal vector fields on tangent bundle of Finsler manifolds*, Balkan Journal of Geometry and its Applications, 11, no. 2, 2006, pages 28-35.
- [26] Bidabad B.; *Complete Finsler manifolds and adapted coordinates*, Balkan Journal of Geometry and its Applications, Vol. 14, No 1, 2009, pp 21-29.
- [27] Bidabad B.; *A remark on the Gauss-Bonnet theorem in Finsler geometry* , BSG Proceeding 15, International Conference of Differential Geometry and Dynamical Systems, DGDS-2008, Bucarest Romania, pp. 1-10, Geometry of Balkan Press, 2009.
- [28] Bidabad B.; *Finsler manifolds of positive constant curvature*, 5th seminar of Geometry and Topology, Kurdistan University, Sanandaj, 12-14 May 2009.
- [29] Bidabad, B. and Hedayatian, S. ; *Conformal vector fields on tangent bundle of Riemannian manifolds*, Iranian Journal of Sciences and Technology, Transaction A, vol. 29, No. A3, 2005, 531-540.

- [30] Bidabad, B. and Hedayatian, S. ; *Compact Capacity on Finsler Spaces*, Iranian Journal of Sciences and Technology, Transaction A, vol. 31, No. A3, 2007.
- [31] Bidabad B. and Rafie-Rad, M.; *Pure pusuit Navigation on Riemannian Manifolds*, Non-Linear Analysis; Real World Application, Vol(10), 2009, 1265-1269.
- [32] Bidabad B. and Tayebi, A.; *A classification of some Finsler connections and its Applications* Publication Math. Debrecen, 71/3-4 (2007), 253-266.
- [33] Bidabad B. and Tayebi, A.; *Properties of Generalized Berwald Connections* Bulletin of the Iranian Mathematical Society Vol. 35 No. 1 (2009), pp 1-18.
- [34] Bidabad B. and Tayebi, A.; *Special Finsler metrics and Gauss-Bonnet theorem*, to appear.
- [35] Bishop, R. L. and Crittenden R. J. ; *Geometry of Manifolds*, Academic Press, 1964.
- [36] Boothby, W. M.; *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, 2003.
- [37] Brocker, T. and Dieck, T.; *Representations of compact Lie Groups*, Graduate texts in Math., Springer, 1995.

- [38] Bao, D. and Lackey, B.; *Special eigenforms on the sphere bundle of a Finsler Manifold*, Contemporary Mathematics, Vol. 196, 1996.
- [39] Cartan, E.; *Les Espaces de Finsler*, Herman, Paris, 1934.
- [40] Cheeger, J. and Ebin, D. ; *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, North Holland Press, 1993.
- [41] Chern, S. S. ; *Finsler Geometry is just Riemannian Geometry without the quadratic restriction*, Notices of Am. Math. Soc. 43, No. 9, (1964) 959-963.
- [42] Chern, S.S. and Shen, Z. *Riemann-Finsler Geometry*, World Scientific, Nankai tracts in Math. Vol. 6, 2005.
- [43] Eisenhart, P.; *Riemannian Geometry*, Princeton, Princeton University Press fifth Edition, 1964.
- [44] Do Carmo, M. P.; *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Printice-Hall, 1976.
- [45] Do Carmo, M. P.; *Riemannian Geometry*, Birkhauser, second edition, 1993.
- [46] Gallot S., Hulin D., Lafontaine J.; *Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, second edition, 1990.

- [47] Grifone, J. *Cours de maitrise en geometrie differentielle*, L'universite' Paul Sabatier de Toulouse, France, 2004.
- [48] Guillemin V. and Pollack A.; *Differential Topology*, Prentice Hall, 1974.
- [49] Helgason, S.; *Differential Geometry, Lie groups and Symmetric spaces*, Academic Press, 1978.
- [50] Hawking, S. W. and Ellis G. F. R.; *The Large-Scale of Space-time*, Cambridge University Press, Cambridge, 1973.
- [51] Husemoller, D.; *Fibre Bundles*, Springer Verlag, New York, (1993).
- [52] Jost J.; *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Springer-Verlag, second edition, 1998.
- [53] Kobayashi S., Nomizo, K.; *The Foundations of Differential Geometry*, Vol. 1, Wiley, 1969.
- [54] Lang, S.; *Differntial and Riemannian Manifolds*, Graduate texts in Math., Spriger, 1996.
- [55] Lang, S.; *Foundamentals of Differential Geometry*, Graduate texts in Mathematics, Springer, 1999.

- [56] Lee, J. M.; *Riemannian Manifolds*, Springer-Verlag, 1997.
- [57] Lee, J.M.; *Introuduction to smooth manifolds*, Springer-Verlag, 2001.
- [58] Levi-Civita, T.; *Nozione di parallelismo in una qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvature Riemanniana*, Rend. Palermo 42 (1917), 73-205.
- [59] Martin, D.; *Manifolds Theory*, Horwood Publishing Limited, England, 2002.
- [60] Matsumoto, M.; *Foundations of Finsler Geometry and Special Finsler Spaces*, Kaiseisha Press, Shigaken, 1986.
- [61] Montgomery, D. and Zippin, L.; *Topological Transformation Groups*, New York, Interscience, 1955.
- [62] Montiel S. and Ros, A.; *Curves and Surfaces*, AMS, Graduate Studies in Math., Vol.69, 2005.
- [63] Nakahara, M.; *Geometry, Topology and Physics*, IOP Publishing Limited, England, 1992.
- [64] O'Neil, B.; *Semi-Riemanniann Geometry with Applications to General Relativity*, Academic Press, New York, 1983.

- [65] Palais, R. ; *Morse theory on Hilbert Manifolds*, Topology, **2**, (1963), 299-340.
- [66] Petersen, P.; *Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, 1997.
- [67] Poor, Walter A.; *Differential Geometric Structures*, McGraw-Hill Inc., 1981.
- [68] Potrjagin, L.S.; *Topological Groups*, Princeton University Press, 1939.
- [69] Prakash, N.; *Differential Geometry*, Horwood Publishing Limited, England, 2002.
- [70] Sharpe, R.W.; *Differential Geometry*, Graduate texts in Math., Springer, 1995.
- [71] Shen, Z.; *Differential Geometry of Sprays and Finsler Spaces*, Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [72] Spivak, M. ; *A comprehensive Introduction to Differential Geometry*, volume I-V. Publish or Perish, Berkeley, 1979.
- [73] Steenrod N.; *The Topology of Fiber Bundles*, Princeton University Press, 1951.

- [74] Tonnelat, M.A., Les theories unitaires de l' electromagnetisme et de la gravitation, Gauthier-Villars, Paris, 1965.
- [75] Toponogov Victor A.; *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Birkhauser, 2006.
- [76] Warner, F.W.; *Foundations of Differential Manifolds and Lie Groups*, Graduate texts in Math., Spriger, 1983.
- [77] Yano, K.; *Integral Formula in Riemannian Geometry*, Marcel Dekker Inc., 1970.

نمایه

- ۴۹ curve, a along derivative covariant ۲۸۱ -h انحراف,
- ۵۵ trick, Cristoffel ۳۴۳, Akbar-Zadeh
- ۲۲۵ ۱-form, curvature ۲۸۴, Atiyah, M.F. and Singer, I.M.
- ۲۲۷ ۲-form, curvature ۳۹۹, Bishop-Gromov's theorem
- Finsler regular of torsion and curvature ۳۹۹, Hadamard-Cartan
- ۲۸۳ Connection, ۳۹۹, Hopf-Rinow's theorem
- ۲۵۶ distribution, ۲۸۴, Morse index theorem
- ۱۵۱ divergence, ۳۹۷, Myers's theorem
- ۱۶۳, ۱۶۱ Hoph, E. Rauch's first Comparison theorem
- ۱۰۷ equation, field Einstein ۳۹۹,
- ۱۷ Cartan, Elie ۳۹۹, Synge's theorem
- ۳۲۱ characteristic, Euler ۳۴۲ Allendoerfer,
- ۳۴۲ Fenchel, ۲۸۹ compatibility, metric Almost
- ۲۳۷, (fibre (espace bundle fiber ۱۷ Berwald,
- ۱۶ Finsler, ۲۴۸ Morphism, bundle
- ۲۷۸, ۲۷۵ Connexion, Finsler ۱۶ Caratheodory,
- ۲۷۶ structure, Finsler ۲۸۵ connection, Chern and Cartan
- ۱۶ Gauss, ۱۶ S., S. Chern,
- ۱۵۱, codifferential

- ۲۷۹ Connection: Finsler regular
 ۱۶ Riemann:
 ۳۴۲ Chern, S.S.
 ۱۰۳ signature:
 ۳۲۱ simplex:
 ۲۴۸ morphism: strong
 ۳۲۰ invariants: topologic
 ۲۸۹ freeness: Torsion
 ۱۰۷ curvature: scalar total
 ۳۴۲ Weil:
 ۲۱ Zermelo:
 ۲۱ Navigation: Zermelo
 آزاد روی M عمل می کند، ۳۱۲
 ابرویه، ۱۹۱
 ابرویه ها، ۳۴۲
 اتحاد اول یا اتحاد ریچی، ۸۵
 اتحاد ریچی، ۲۳۲
 اتحاد بیانچی، ۲۳۲
 از سمت چپ عمل، ۳۰۹
 استحکام منیفلدها، ۱۰۹
 استحکام یا صلیبیت، ۱۰۹
 استوانه یک گروه لی، ۳۰۱
 اسپری، ۱۱۷، ۱۱۸
 ۱۰۷، relativity general
 ۱۷۱ circle: geodesic
 ۶۲ sphere: on equation geodesic's
 ۱۶۱ harmonic:
 ۱۰۸ functional: action Hilbert
 ۳۴۲ Hopf:
 connections: Vertical and Horizontal
 ۲۸۳
 ۱۰۳ forms: quadratic of index
 ۳۳ indicatrix:
 ۲۶ Euler: Leonard
 ۱۷ Lichnerowicz:
 ۲۷۷ Lioville:
 ۱۰۷ metric: Lorentz
 ۳۴۲ Nash:
 ۳۳ Problem: Navigation
 ۲۲۱ bases: non-coordinate
 ۳۳ Okubo:
 ۴۲۲ formula: Peterson-Codazzi
 ۱۶ metric: Pseudo-Riemannian
 ۲۵۴ bundle: pullback
 ۲۱ metric: Randers

انحناهای اصلی، ۱۹۷	اطلس، ۲۳۸
انحناهای اصلی، ۸۱	التصاق
انحناهای متوالی فرنه، ۱۷۰	خطی یا آفین، ۴۴
انحنای عددی، ۱۰۰	التصاق چرن، ۲۸۸
انحنای اسکالر، ۱۰۷	التصاق جهتی، ۲۷۴
انحنای برشی، ۱۱۰، ۱۹۴	التصاق غیرخطی، ۲۶۶
انحنای برشی، ۹۲	التصاق غیرخطی، ۲۶۶
انحنای برشی ثابت، ۳۶۹	التصاق فینسلری، ۲۷۵، ۲۷۸
انحنای برشی منفی یا صفر، ۳۷۶	التصاق فینسلری افقی و عمودی، ۲۸۳
انحنای ریچی، ۹۹	التصاق فینسلری عمومی، ۲۷۶
انحنای عددی کل، ۱۰۷	التصاق فینسلری منظم، ۲۷۹
انحنای میانگین، ۱۹۷	التصاق قائم، ۱۸۶
انحنای وابسته به ∇ ، ۲۷۱	التصاق کارتان، ۲۸۶
انحنای ژئودزیک، ۳۲۵	انتقال راست، ۳۰۶
انحنای گاوسی، ۱۷۶، ۱۹۴، ۱۹۷	انتقال موازی، ۴۶
انحنای گاوسی، ۸۲	انتقال چپ، ۳۰۶
اندیس (یا تباهی)، ۳۸۷	انتقالی (متعدی)، ۳۱۱
اندیس (یا پوچی)، ۳۸۷	انتگرال جز به جز، ۱۶۴
اندیس انرژی و تباهی، ۳۶۵	انتگرال جز به جز، ۱۶۴
اندیس متریک های شبه ریمانی، ۱۰۴	انتگرال ریمان، ۲
انعطاف پذیر، ۱۱۰	انتگرالپذیر، ۲۵۶
انیشتن، متریک، ۱۰۰	انحراف v ، ۲۸۱
اولر، ۲۶	انحنا در مختصات موضعی، ۸۷
اولین فرم اساسی، ۱۷۶	انحنا و تاب التصاق فینسلری، ۲۸۳
اولین فرم اساسی، ۸، ۶	انحنا- h/h ، ۲۸۵

اولین معادلات ساختاری کارتان ، ۲۲۵	تاب کارتان ، ۲۲
اوکوبو، ۳۳	تاب- <i>hh</i> ، ۲۸۵
ایزومتر، ۵	تابع
ایزومتر یا هم متر، ۵	آفین، ۳۹۵
ایزومتری، ۵	اندیس، ۳۹۴
موضعی، ۵	پله‌ای، ۳۹۴
ایزومتری ، ۱۱۰	تار روی، ۲۳۸
ایزومتریکی موضعی یا سرتاسری، ۱۱۰	تانسور
ایندیکاتریکس، ۲۹	انحنای قائم، ۱۸۸
بدیهی سازی، ۲۳۹	تانسور اساسی
بردار	فینسلر، ۲۲
انحنای ژئودزیک، ۳۲۵	تانسور انحنای ریمان ، ۸۳
بردار افقی، ۴۲۷	تانسورهای تاب و انحنای التصاق فینسلری، ۲۸۴
بردارهای متوالی متعامد یکه، ۱۷۰	تباهی هسیان، ۳۸۲، ۳۹۳
برش لیوویل، ۲۷۷	تبدیل بینهایت کوچک همدیس ، ۷۴
برش موضعی، ۲۵۰	تحدب قوی، ۲۱
برش موقعیت، ۲۶۱	تخت ، ۸۹
برش های سراسری ، ۲۵۰	تعبیر هندسی
برش کلاف برداری، ۲۵۰	مشتق‌گیری همگرد، ۴۶
بمول ، ۷۰	تغییرات، ۳۴۷
بیانچی ، ۸۵	دوم، ۳۶۳
اتحاد دوم ، ۱۲۸	اول ، ۳۵۴
بیانچی اتحاد ، ۸۷	تغییرات سره، ۳۴۷
تاب، ۲۷۰	تقارن در علایم کریستوفل ، ۵۴
تاب آزادی، ۲۸۹	تنش ، ۱۰۸

- توزیع، ۲۵۶
توسیع پذیر، ۱۴۳
تکرر، ۳۷۴
تکرر نقطه‌ها، ۳۷۴
جاده‌نده، ۱۷۷
جبر لی، ۳۰۸
جمع مستقیم دو متریک، ۱۰
حاصلضرب گروه‌های لی، ۳۰۰
حسابان تغییرات، ۱۳۵، ۳۴۶
خاصیت m -زیرمنیفلدی، ۳۰۱
خودریختی یا اوتومورفیزم گروه‌های لی، ۳۰۵
دایره ژئودزیک، ۱۷۱
دومین فرم اساسی، ۱۷۶
دومین معادلات ساختاری، ۲۲۵
دومین معادلات ساختاری، ۲۲۷
دیز، ۷۰
دیفئو مورف، ۲۳۷
دیورژانس، ۱۵۱
راس، ۳۲۰
رتبه کلاف برداری، ۲۴۷
روش کریستوفل، ۵۵
روی پارامتری، ۹۸
زاویه راس، ۱۲۹
زرمولو، ۲۱
زیر منیفلد تماماً ژئودزیک، ۱۸۸
زیرفضای مماسی، ۱۷۹
زیرفضای نرمال، ۱۷۹
زیرمنیفلد منظم، ۳۰۲، ۳۰۶
زیرکلاف افقی، ۲۶۴
زیرکلاف برداری، ۲۵۶
زیرگروه توپولوژیک، ۲۹۵
زیرگروه لی از یک گروه لی، ۳۰۲
زیرگروه مجرد، ۳۰۴
زیرگروه یک گروه توپولوژیک، ۲۹۵
ساختار برگردان، ۲۵۴
ساختار فینسلری، ۲۷۶
سادک، ۳۲۱، ۳۲۴
شاخص، ۲۹
شار ژئودزیک، ۱۱۸
شارپ، ۷۰
شور
لم شور، ۹۲
صلبیت یا استحکام قوی، ۱۱۰
ضرایب افقی و عمودی التصاق کارتان، ۲۸۷
ضرب داخلی، ۳، ۱
ضرب درونی، ۱۵۹
ضرب کواترنیونی، ۲۹۳
طول منحنی
در هندسه اقلیدسی، ۱۹
در هندسه ریمانی، ۱۹

در هندسه فینسلری، ۲۰

فرمول مشتقات همگرد افقی و عمودی التصاق

طول پا، ۵

چرن، ۲۸۹

علامت متریک های شبه ریمانی، ۱۰۴

فرمول مشتقات همگرد افقی و عمودی التصاق

عمل C^∞ ، ۳۱۰

کارتان، ۲۸۸

عملگر دیورژانس، ۱۶۱

فرمول های فرنه در منیفلدهای ریمانی، ۱۷۰

عملگر شکل، ۱۹۶

۱- فرمی های التصاق، ۲۶۹

عنصر حجم، ۱۰۶

فضا-زمان انیشتن، ۱۰۳

عنصر حجمی، ۱۵۸

فضاهای مدل، ۱۱۰

فضاهای موضعاً متقارن، ۱۰۲

فرم انحنا، ۲۲۷

فضای

فرم التصاق، ۲۲۵

راندرز، ۲۴

فرم انحنا، ۲۲۶، ۲۷۱

کروپینا، ۲۴

فرم حجمی، ۱۵۸

فضای

فرم های التصاق، ۲۲۳

۲۵، (α, β)

۱- فرم هیلبرت، ۲۷۷

ماتسوموتو، ۲۴

فرمول

فضای تاری، ۲۳۷

مشتق لی در امتداد یک میدان برداری، ۷۴

فضای پوانکاره، ۶۷

مشتق گیری همگرد، ۷۵

فضای کل، ۲۳۸

مشتق گیری همگرد در طول یک منحنی،

فلات، ۷۰

۴۹

فیزیک نظری، ۲

موضعی مشتق لی در امتداد یک میدان برداری

فینسلر

۷۵،

ساختار، ۲۱

مشتق گیری همگرد، ۴۴

قاب، ۲۲۲

فرمول

قاب ژئودزیکی، ۱۵۹

گاوس-بونه، ۳۳۲

قاب ژئودزیکی موضعی، ۱۵۴

- قابلیت ارتجاع، ۱۱۰
قضایای
گاس-بونه، ۳۳۲
قضیه
استوکس، ۱۵۸
اولر، ۲۶
دیورژانس، ۱۶۳
سارد، ۳۷۹
مایرز، ۳۹۷
هاف، ۱۶۱
هاف-رینو، ۱۴۲
هاینه-بورل، ۱۴۲
قضیه اساسی هندسه ریمانی، ۵۲
قضیه اساسی هندسه شبه ریمانی، ۱۰۴
قضیه باهیت گاس، ۱۹۵
قضیه گاس-بنه، ۳۱۷
قطعه ای هموار، ۱۲۹
لاپلاسن، ۱۵۵
لویاچوفسکی، ۵۸
ماتریس رفتاری، ۲۲۸
ماتریس متریک حاصلضرب، ۱۰
متریک
اقلیدسی، ۴، ۹
القایی، ۶
حاصلضرب، ۱۰
راندرز، ۲۱
ریمانی، ۳
ریمانی شرایط وجود، ۱۲
زیرفضایی، ۷
طبیعی، ۴
فینسلری، ۲۰
ناتیهگون، ۴
چنبره، ۱۱
کانونی، ۴
کانونی کره، ۹
متریک شبه ریمانی، ۱۰۳
متریک تعمیم یافته انیشتنی، ۱۰۹
متریک ریمانی، ۲۴
متریک فانک، ۲۵
متریک لورنتس، ۱۰۴، ۱۰۷
متریک های ریمانی یک بعدی، ۵
متریک کانونی، ۷
متعدی، ۳۱۱
مقارن، ۱۰۲
مختصات متمایز، ۳۰۲
مختصات نرمال، ۱۲۳
مدار، ۳۱۱
مدل سازی ریاضی، ۳۱
مزدوج، ۲۱۸
مسطح، ۸۹

- مشتق همگرد موضعی از یک میدان برداری، ۵۶
 مشتق لی، ۷۴
 معادله ژئودزیک های کره، ۶۲
 معادله ژاکوبی، ۳۶۶
 مشتق همگرد
 معین منفی، ۳۹۰
 هر تانسور از درجه دلخواه، ۶۹
 معین منفی، ۳۹۳
 کل، ۷۲
 منحنی افقی، ۴۲۷
 مشتق همگرد w ، ۶۸
 منظم، ۲۱
 مشتق همگرد w (صورت موضعی)، ۶۸
 منیفلد
 مشتق گیری همگرد از متریک، ۷۵
 حاصلضرب، ۱۰
 مشتق گیری همگرد از یک ۱-فرم در طول منحنی
 ریمانی، ۵
 فینسلری، ۲۲
 مشتق گیری همگرد از یک ۱-فرم، ۶۸
 منیفلد مسطح، ۸۹
 مشتق گیری همگرد در طول یک منحنی، ۴۹
 منیفلد های کامل، ۱۴۳
 مشتق گیری
 منیفلد پایه، ۲۳۸
 همگرد، ۴۴
 موثر روی M عمل می کند، ۳۱۲
 مشتق گیری همگرد
 موسیقیایی، ۷۰
 در طول منحنی، ۴۶
 مولفه همانی، ۲۹۹
 مشخصه اولر، ۳۱۷، ۳۲۰، ۳۲۴
 مولفه همانی یک گروه لی، ۲۹۸
 مشخصه اولر در ابعاد بالا، ۳۲۴
 مولفه همبندی، ۲۹۹
 معادلات میدان انیشتن، ۱۰۷
 میدان
 معادله
 ایزومتري، ۷۴
 وینگارتن، ۱۸۵
 متجانس، ۷۴
 گاوس-کودازی، ۱۸۸
 همدیس، ۷۴
 معادله انیشتن در خلاء، ۱۰۸
 همدیس کیلینگ، ۷۴
 معادله ذاتی، ۱۶۸
 میدان برداری ژئودزیک، ۱۱۸
 معادله ژئودزیک ها، ۵۷
 میدان برداری قائم (نرمال)، ۱۷۹

- میدان برداری مماسی، ۱۷۹
نگاشت تغییر کارت یا تغییر مختصات، ۲۴۶
- میدان برداری گرادیان، ۱۵۰
نگاشت نمایی، ۱۱۹
- میدان تانسوری یک کلاف برداری، ۲۵۳
نگاشت گذر، ۲۴۶
- میدان تغییرات، ۳۴۸
نگاشت تصویر، ۲۳۸
- میدان موقعیت یا برش موقعیت، ۲۵۰
نگاشت تصویر روی مولفه اول، ۲۳۸
- میدان ژاکوبی، ۲۱۰
نیروی حرکت لحظه ای، ۱۰۸
- میدان ژاکوبی درطول ژئودزیک، ۳۸۰
نیم صفحه بالایی، ۵۸
- میدان ژاکوبی عمود، ۳۹۵
هارمونیک، ۱۶۱
- میدان کیلینگ، ۷۴
هسین همگرد، ۷۳
- ناتبیهگون، ۴
همبعد، ۱۹۱
- نرمال شده، ۱۳۷
همدیرانسیل، ۱۵۱
- نزدیک شدن و دور شدن ژئودزیکها، ۳۶۵
همریختی قوی، ۲۴۸
- نظریه نسبیت عام، ۱۰۷
همریختی کلاف برداری، ۲۴۸
- نقاط
همریختی یا همومورفیسیم گروههای لی، ۳۰۴
- بحرانی، ۳۸۰
همسایگی نرمال، ۱۲۱
- مقاطر روی کره، ۳۷۷
همگن مثبت، ۲۱
- مزدوج روی کره، ۳۷۷
همگن مثبت از درجه ۳، ۲۶
- نقاط مزدوج، ۳۶۴
همگن مطلق، ۲۶
- نقاط مزدوج با تکرر، ۳۹۴
هندسه یک حرکت، ۳۱
- نقطه ثابت عمل G ، ۳۱۱
وجه، ۳۲۴، ۳۲۰
- نماد کروئکر، ۲۵۹
پارامتری سازی موضعی، ۷
- نمایی
پاره ای هموار، ۱۲۹
- مشتق نگاشت نمایی، ۱۱۹
پاره ای یا قطعه قطعه، ۱۲۹
- نگاشت
پایا، ۱۱۰
- نمایی، ۳۴۹
پایا چپ یا راست، ۳۰۸

- پایاهای توپولوژیکی، ۳۱۹
 پایه موضعی روی فضای مماس، ۲۵۱
 پایه های غیر مختصاتی، ۲۲۲
 پترسون-کودازی، ۴۲۲
 پذیرفتنی، ۱۳۵
 پرش، ۳۵۴
 پوانکاره، ۵۸
 چنبره، ۱۱
 چنبره n بعدی یک گروه لی است، ۳۰۱
 چنبره n -بعدی، ۱۱
 چپ پایا (راست پایا)، ۳۰۸
 چگالی، ۱۰۷
 ژئودزیک، ۵۷
 ژئودزیک، ۵۶
 ژئودزیک کمینه یا مینیمال، ۱۴۵
 ژئودزیک شعاعی، ۱۴۰
 ژئودزیکها
 وجود و یکتایی، ۵۸
 ژئودزیکهای استوانه، ۳۸۵
 کاربرد میدانهای ژاکوبی، ۳۷۸
 کارت کلاف تاری، ۲۳۸
 کامل، ۱۴۳
 کامل ژئودزیک، ۱۴۳
 کامل ژئودزیک یا کامل، ۱۲۳
 کاملاً نرمال، ۱۴۰
 کره ژئودزیکی، ۱۲۳
 کلاف ایندیکاتریکس، ۲۴۲
 کلاف بدیهی شونده، ۲۳۹
 کلاف برداری، ۲۴۶
 کلاف برگردان، ۲۵۴
 کلاف تاری، ۲۳۷
 کلاف حاصلضرب، ۲۳۹
 کلاف دوگان، ۲۵۱
 کلاف عمودی، ۲۵۷
 کلاف عمودی E ، ۲۵۷
 کلاف قائم، ۱۸۶
 کلاف کروی تصویری، ۲۴۳
 کلاف کروی واحد، ۲۴۲
 کواترنيون، ۲۹۸
 کیلینگ، ۷۷
 گرادیان، ۱۵۰
 گروه کواترنيونی، ۲۹۴
 گروه ایزوتروپی x ، ۳۱۱
 گروه ایزومتري، ۳۱۴
 گروه تبدیل لی یا گروه تابع لی، ۳۱۰
 گروه توپولوژیک، ۲۹۳
 گروه حرکت صلب، ۳۱۴
 گروه خطی خاص، ۳۰۸
 گروه خطی عام، ۲۹۸
 گروه لی، ۲۹۶

گروه و جبرلی، ۲۹۱

گرین، ۱۶۵

گوی نرمال یا گوی ژئودزیک، ۱۲۳

گوی نرمال بسته، ۱۲۳

یال یا لبه، ۳۲۰

یکریختی موسیقیایی، ۷۰

یکریختی کلافهای برداری، ۲۴۸

یکریختی یا ایزومورفیزم گروههای لی، ۳۰۴

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Bianchi second identity	اتحاد دوم بیانچی
Hyper-surface	ابر رویه
Bianchi identity	اتحاد اول بیانچی
trace	اثر
freely	آزاد
spray	اسپری
strong rigidity	استحکام قوی
rigidity	استحکام یا صلبیت
Directional Connection	التصاق جهتی
Linear connection	التصاق خطی
Affine or Linear connection	التصاق خطی یا التصاق آفین
Reimannian connection	التصاق ریمانی
Levi- Civita Connection	التصاق لوی-چی ویتا
transport parallel	انتقال موازی
parallel transport	انتقال موازی
principle curvatures	انحنای اصلی
principal curvatures	انحنای اصلی
sectional curvature	انحنای برشی
total scalar curvature	انحنای عددی کل
Mean Curvature	انحنای میانگین
index	اندیس

flexible	انعطاف پذیر
contraction	انقباض
first Variation	اولین تغییرات
first fundamental form	اولین فرم اساسی
isometry	ایزومتري
globally isometric	ایزومتري سراسري
locally isometric	ایزومتري موضعي
locally isometric	ایزومتريک موضعي
isomorphism	ایزومورفيسم
trivialization	بدیهي سازی
position section	برش موقعیت
Pull back	برگردان
local parameterization	پارامتری سازی موضعي
Invariant	پایا
Base	پایه
non-coordinate bases	پایه های غیر مختصاتی
torsion freeness	تاب آزاد یا بدون تاب
Hilbert action functional	تابعک عمل هیلبرت
fiber	تار
fundamental tensor	تانسور اساسی
Riemann curvature tensor	تانسور انحناي ریمان
Riemann curvature of second kind	تانسور انحناي ریمان نوع دوم
Cartan torsion tensor	تانسور تاب کارتان
infinitesimal homothetic transformation	تبدیل بینهایت کوچک متجانس
Killing vector field or infinitesimal isometry	تبدیل بینهایت کوچک

infinitesimal conformal transformation	تبدیل بینهایت کوچک همدیس
strong convexity	تحدب قوی
Multiplicity	تکرر
stress	تنش
Distribution	توزیع
extendible	توسیع پذیر
density	چگالی
rigid motion	حرکت صلب
m-submanifold property	خاصیت m-زیرمنیفلدی
interinsic property	خاصیت ذاتی
automorphism	خودریختی یا اوتومورفیزم
curvature 2-form	دو فرم انحنا
dual	دوگان
divergence	دیورژانس
Intrinsic	ذاتی
Vertex	راس
rank	رتبه
Cristoffel trick	روش کریستوفل
Model space of surfaces	رویه‌های مدل
Sub-bundle	زیرکلاف
totally geodesic submanifold	زیر منیفلد تماماً ژئودزیک
Sub-bundle	زیرکلاف
abstract subgroup	زیرگروه مجرد
radial geodesic	ژئودزیک شعاعی
geodesically complete	ژئودزیکی کامل

Finsler structure	ساختار فینسلر
simplex	سادک
Metric compatibility	سازگاری با متریک
Proper	سره
Indicatrix	شاخص
Sharp) dieze(	شارپ (دیز)
Pseudosphere	شبه کره
signature	علامت
shape operator	عملگر شکل
volume element	عنصر حجمی
volume form	فرم حجمی
Kropina space	فضای کروپینا
Matsumoto space	فضای ماتسوموتو
Flat (bemol)	فلات (بمول)
geodesic frame	قاب ژئودزیک
complete	کامل
totally normal	کاملاً نرمال
Elasticity	کش آمدن
Indicatrix Bundle	کلاف ایندیکاتریکس
vector bundle	کلاف برداری
fiber bundle	کلاف تار
unitaryFiber Bundle	کلاف تار یکه
product bundle	کلاف حاصلضرب
normal bundle	کلاف قائم
Sphere Bundle	کلاف کروی

projective Sphere Bundle	کلاف کروی تصویری
tangent bundle	کلاف مماس
isotropy group	گروه ایزوتروپی
topological group	گروه توپولوژیک
General Linear group	گروه خطی عام
Quaternion group	گروه کواترنیون
Laplacian operator	لاپلاسین
Schur Lemma	لم شور
Lobachovski	لوباچوفسکی
attitude matrix	ماتریس رفتاری
matter	ماده
Alpha - Beta metric	متریک آلفا بتا
Induced metric	متریک القاء شده
generalized Einstein metrics	متریک تعمیم یافته انیشتنی
Product metric	متریک حاصلضرب
Randers metric	متریک راندرز
Reimannian metric	متریک ریمانی
Pseudo-Riemannian metric	متریک شبه-ریمانی
Natural metric	متریک طبیعی
canonical metric	متریک کانونی فضای اقلیدسی
transitive	متعدی
antipodal	مقاطر
triangulation	مثلث بندی
normal coordinates	مختصات نرمال
orbit of x	مدار x

mathematical modeling	مدل سازی ریاضی
mathematical modeling	مدل سازی ریاضی
conjugate	مزدوج
Navigation Problem	مساله ناوبری
flat	مسطح
flatness	مسطح بودن
covariant derivative on vector bundle	مشتق همگرد روی کلاف برداری
total covariant derivative	مشتق همگرد کل
covariant derivative	مشتق‌گیری همگرد
structural equations	معادلات ساختاری
Einstein field equation	معادلات میدان انیشتین
regularity	منظم بودن
Riemannian manifolds	منیفلدهای ریمانی
effectively	موثر
locally symmetric	موضعا متقارن
component of identity	مولفه همانی
connected component	مولفه همبندی
gradient vector field	میدان برداری گرادیان
Variational field	میدان تغییرات
homothetic vector field	میدان متجانس
Homothetic killing	میدان متجانس یا تبدیل بینهایت کوچک متجانس
position vector field	میدان موقعیت یا برش موقعیت
conformal killing,	میدان همدیس یا تبدیل بینهایت کوچک
non-degenerate	ناتبیهگون
Lorentz metric	نام متریک لورنتس

Zermelo navigation	ناوبری زرمelo
Ricci curvature	نحنای ریچی
general relativity	نسبیت عام
Imbedding	نشاننده
critical Point	نقطه بحرانی
fixed point	نقطه ثابت
transition function of a fiber bundle	نگاشت گذریک کلاف تار
momentum	نیروی حرکت لحظه ای
upper half plane	نیم صفحه بالایی
Semi-definite	نیمه معین
Semi-definite positive(negative)	نیمه معین مثبت (منفی)
hyperbolic	هذلولوی
Covariant Hessian	هسین همگرد یا هسین
Co-dimension	همبعد
Co-differential	همدیفرانسیل
vector bundle Morphism	همریختی کلاف تار
normal neighborhood of p	همسایگی نرمال
positive homogeneity	همگن مثبت
absolutely homogenous	همگن مطلق
homogeneity of geodesics	همگنی ژئودزیک ها
face	وجه
edge	یال یا لبه
connection 1-forms	یک فرم های التصاق
self ad joint isomorphism	یکریختی خود الحاق
musical(musiqua)l isomorphism	یکریختی موسیقایی

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

absolutely homogenous	همگن مطلق
abstract subgroup	زیرگروه مجرد
Affine or Linear connection	التصاق خطی یا التصاق آفین
Alpha - Beta metric	متریک آلفا بتا
antipodal	متقاطر
attitude matrix	ماتریس رفتاری
automorphism	خودریختی یا اوتومورفیسم
Base	پایه
Bianchi identity	اتحاد اول بیانچی
Bianchi second identity	اتحاد دوم بیانچی
canonical metric	متریک کانونی فضای اقلیدسی
Cartan torsion tensor	تانسور تاب کارتان
Co-differential	همدیفرانسیل
Co-dimension	همبعد
complete	کامل
component of identity	مولفه همانی
conformal killing,	میدان همدیس یا تبدیل بینهایت کوچک
conjugate	مزدوج
connected component	مولفه همبندی
connection 1-forms	یک فرم های التصاق
contraction	انقباض

covariant derivative	مشتق‌گیری همگرد
covariant derivative on vector bundle	مشتق همگرد روی کلاف برداری
Covariant Hessian	هسین همگرد یا هسین
Cristoffel trick	روش کریستوفل
critical Point	نقطه بحرانی
curvature 2-form	دو فرم انحنا
density	چگالی
Directional Connection	التصاق جهتی
Distribution	توزیع
divergence	دیورژانس
dual	دوگان
edge	یال یا لبه
effectively	موثر
Einstein field equation	معادلات میدان انیشتین
Elasticity	کش آمدن
extendible	توسیع پذیر
face	وجه
fiber	تار
fiber bundle	کلاف تار
Finsler structure	ساختار فینسلر
first fundamental form	اولین فرم اساسی
first Variation	اولین تغییرات
fixed point	نقطه ثابت
flat	مسطح
Flat (bemol)	فلات (بمول)

flatness	مسطح بودن
flexible	انعطاف پذیر
fundamental tensor	تانسور اساسی
freely	آزاد
General Linear group	گروه خطی عام
general relativity	نسبیت عام
generalized Einstein metrics	متریک تعمیم یافته انیشتنی
geodesic frame	قاب ژئودزیکی
geodesically complete	ژئودزیکی کامل
globally isometric	ایزومتري سراسری
gradient vector field	میدان برداری گرادیان
Hilbert action functional	تابع عمل هیلبرت
homogeneity of geodesics	همگنی ژئودزیک ها
Homothetic killing	میدان متجانس یا تبدیل بینهایت کوچک متجانس
homothetic vector field	میدان متجانس
hyperbolic	هذلولوی
Hyper-surface	ابر رویه
Imbedding	نشاننده
index	اندیس
Indicatrix	شاخص
Indicatrix Bundle	کلاف ایندیکاتریکس
Induced metric	متریک القاء شده
infinitesimal conformal transformation	تبدیل بینهایت کوچک همدیس
infinitesimal homothetic transformation	تبدیل بینهایت کوچک متجانس
interinsic property	خاصیت ذاتی

Intrinsic	ذاتی
Invariant	پایا
isometry	ایزومتري
isomorphism	ایزومورفيسم
isotropy group	گروه ایزوتروپی
killing vector field or infinitesimal isometry	تبدیل بینهایت کوچک
Kropina space	فضای کروپینا
Laplacian operator	لاپلاسين
Levi- Civita Connection	التصاق لوی-چی ویتا
Linear connection	التصاق خطی
Lobachovski	لوباچوفسکی
local parameterization	پارامتری سازی موضعی
locally isometric	ایزومتري موضعی
locally isometric	ایزومتريک موضعی
locally symmetric	موضعا متقارن
Lorentz metric	نام متریک لورنتس
mathematical modeling	مدل سازی ریاضی
mathematical modeling	مدل سازی ریاضی
Matsumoto space	فضای ماتسوموتو
matter	ماده
Mean Curvature	انحنای میانگین
Metric compatibility	سازگاری با متریک
Model space of surfaces	رویه‌های مدل
momentum	نیروی حرکت لحظه ای
m-submanifold property	خاصیت m-زیرمنیفلدی

Multiplicity	تکرر
musical(musiqual) isomorphism	یکریختی موسیقایی
Natural metric	متریک طبیعی
Navigation Problem	مساله ناوبری
non-coordinate bases	پایه های غیر مختصاتی
non-degenerate	ناتبیهگون
normal bundle	کلاف قائم
normal coordinates	مختصات نرمال
normal neighborhood of p	همسایگی نرمال
orbit of x	مدار X
parallel transport	انتقال موازی
position section	برش موقعیت
position vector field	میدان موقعیت یا برش موقعیت
positive homogeneity	همگن مثبت
principal curvatures	انحنای اصلی
principle curvatures	انحنای اصلی
product bundle	کلاف حاصلضرب
Product metric	متریک حاصلضرب
projective Sphere Bundle	کلاف کروی تصویری
Proper	سره
Pseudo-Riemannian metric	متریک شبه-ریمانی
Pseudosphere	شبه کره
Pull back	برگردان
Quaternion group	گروه کواترنیون
radial geodesic	ژئودزیک شعاعی

Randers metric	متریک راندرز
rank	رتبه
regularity	منظم بودن
Reimannian connection	التصاق ریمانی
Reimannian connection	التصاق ریمانی
Reimannian metric	متریک ریمانی
Ricci curvature	انحنای ریچی
Riemann curvature of second kind	تانسور انحنای ریمان نوع دوم
Riemann curvature tensor	تانسور انحنای ریمان
Riemannian manifolds	منیفلدهای ریمانی
rigid motion	حرکت صلب
rigidity	استحکام یا صلبیت
Schur Lemma	لم شور
sectional curvature	انحنای برشی
self adjoint isomorphism	یکریختی خود الحاق
Semi-definite	نیمه معین
Semi-definite positive(negative)	نیمه معین مثبت (منفی)
shape operator	عملگر شکل
Sharp) dieze(	شارپ (دیز)
signature	علامت
simplex	سادک
Sphere Bundle	کلاف کروی
spray	اسپری
stress	تنش
strong convexity	تحدب قوی

strong rigidity	استحکام قوی
structural equations	معادلات ساختاری
Sub-bundle	زیر کلاف
Sub-bundle	زیرکلاف
tangent bundle	کلاف مماس
topological group	گروه توپولوژیک
torsion freeness	تاب آزاد یا بدون تاب
total covariant derivative	مشتق همگرد کل
total scalar curvature	انحنای عددی کل
totally geodesic submanifold	زیر منیفلد تماما ژئودزیک
totally normal	کاملا نرمال
trace	اثر
transition function of a fiber bundle	نگاشت گذریک کلاف تار
transitive	متعدی
transport parallel	انتقال موازی
triangulation	مثلث بندی
trivialization	بدیهی سازی
unitaryFiber Bundle	کلاف تار یک
upper half plane	نیم صفحه بالایی
Variational field	میدان تغییرات
vector bundle	کلاف برداری
vector bundle Morphism	همریختی کلاف تار
Vertex	راس
volume element	عنصر حجمی
volume form	فرم حجمی

Zermelo navigation ناوبری زرمelo