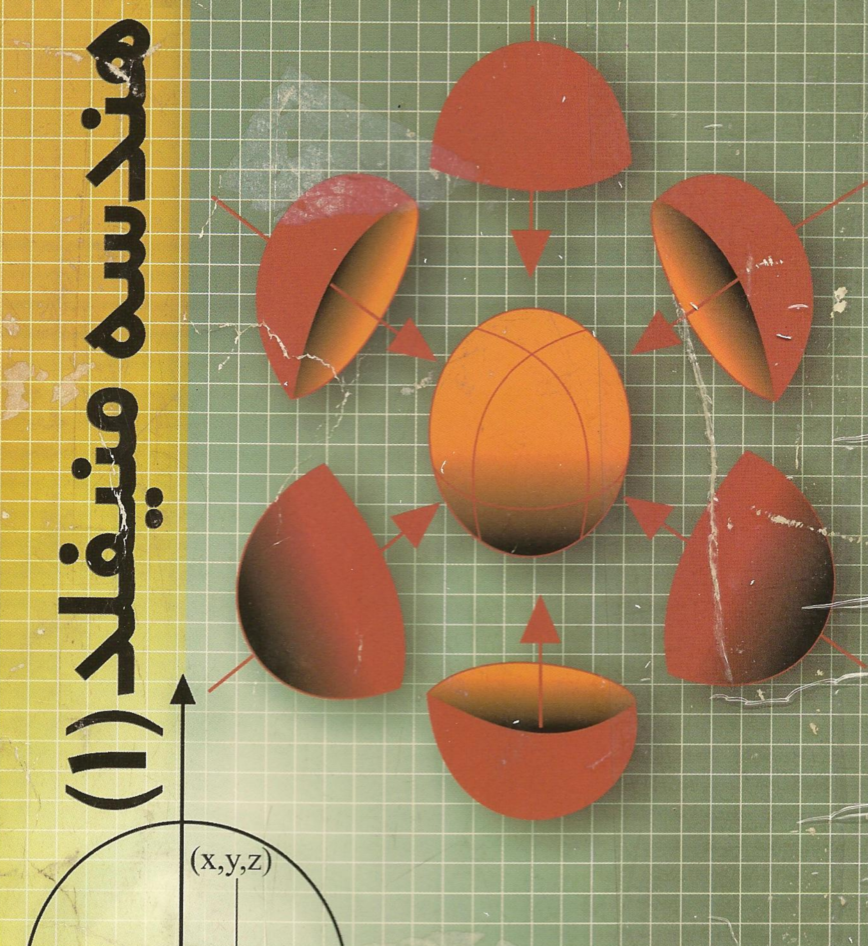
دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

هندسه منیفلد (۱)



تألیف : دکتر بهروز بید آباد
عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی امیر کبیر

بسم الله الرحمن الرحیم

هندسهٔ منیفلد (۱)

تألیف

دکتر بهروز بیدآباد

عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(پلی‌تکنیک تهران)

پائیز ۱۳۸۱

بیدآباد، بهروز، ۱۳۳۵ -
هندسه منیفلد / بهروز بیدآباد .ــ تهران: دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی‌تکنیک تهران)، مرکز نشر، ۱۳۷۹.
۳۷۰ ص.: مصور.

ISBN: 964-463-089-0

فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
واژه‌نامه.
کتابنامه: ص. ۳۵۳ - ۳۵۴.
چاپ دوم: ۱۳۸۱.
۱. چندگوناها (ریاضیات). الف. دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی‌تکنیک تهران). مرکز نشر. ب. عنوان.
۹ هـ ۹ ب/QA۶۱۳ ۵۱۶/۰۷
کتابخانه ملی ایران م۷۹-۱۶۹۶۴

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

عنوان کتاب : هندسهٔ منیفلد (۱)
تألیف : دکتر بهروز بیدآباد
ویراستار : دکتر ناصر بروجردیان
ناشر : مرکز نشر دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی‌تکنیک تهران)
لیتوگرافی، چاپ و صحافی : مرکز نشر دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی‌تکنیک تهران)
چاپ دوم : پائیز ۱۳۸۱
تیراژ : ۲۰۰۰ نسخه
قیمت : ۲۳۰۰ تومان
شابک : ۰-۰۸۹-۴۶۳-۹۶۴

تلفن مرکز پخش: ۶۴۹۸۸۶۸
ISBN: 964-463-089-0

آدرس: خیابان ولی‌عصر، روبروی خیابان بزرگمهر، فروشگاه کتاب مرکز نشر دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی‌تکنیک تهران)

به نام خداوند جان آفرین
حکیم سخن در زبان آفرین

مقدمهٔ چاپ دوّم

حمد خدا و درود به روان پاک انبیاء و جانشینان آنها و سلام به کسانی که با قدم زدن در راه علم و دانش موجبات تعالی جامعه بشریت را فراهم می‌آورند.

هندسه منیفلد یا هندسه چندگون از مباحث بسیار مهم ریاضی در قرن اخیر و ادامه راه ریاضیدانان بزرگی است که در طی تاریخ ظهور نموده‌اند.[1] این هندسه در حقیقت روشی است برای استفاده و تکمیل ریاضیات مجردی که در طی قرون، بشر به آن دست پیدا کرده است؛ به عبارت دقیق‌تر در کاربرد ریاضیات آن عملی که بیش از هر چیز به کار می‌آید عمل مشتق‌گیری از توابع است. انجام این عمل روی هر مجموعهٔ دلخواهی امکان‌پذیر نیست مگر آنکه روی آن مجموعه، ساختاری وجود داشته باشد که اصطلاحاً به ساختار مشتق‌پذیری موسوم است. این ساختار روی برخی از مجموعه‌ها بطور طبیعی وجود دارد مانند فاصله‌ای از خط یا ناحیه‌ای از صفحه و روی برخی از مجموعه‌ها بطور طبیعی وجود ندارد مانند دایره و کره. بنابراین اگر بخواهیم به زبان ساده مفهوم منیفلد یا چندگون را بیان کنیم می‌گوئیم مجموعه‌ای است همراه با یک ساختار مشتق پذیری که روی آن مجموعه تعریف می‌شود. در

۱ـ به مقدمه کتاب بخش تاریخچه هندسه مراجعه شود.

اینجا به عنوان مثال می‌توان کره را نام برد. تعریف تابع مشتق‌پذیر روی دایره و کره تنها با استفاده از چنین ساختاری می‌تواند معنی پیدا کند. از این مثال ساده می‌توان تا اندازه‌ای به عمق نیاز دانشجویان ریاضی، بلکه دانشجویان فنی مهندسی و سایر علوم، به این مفهوم هندسی پی برد.

دربارهٔ هندسه منیفلد یا هندسه چندگون تاکنون کتابی به زبان فارسی تألیف، و بطور مستقل، ترجمه نیز نشده است؛ لذا نگارنده بر این شد که به‌قدر استعداد خود و نیاز دانشجویان این مختصر را تألیف و در اختیار علاقه‌مندان قرار دهد. این کتاب پس از انتشار مورد توجه و تمجید اساتید محترم هندسه قرار گرفت و جویندگان آن زیاد بودند از این رو در مدت کمتر از یکسال کمیاب گردید. برادر مکرم جناب آقای دکتر مرتضی میرمحمدرضایی که از اساتید برجسته و صاحب نظر در این رشته هستند تقاضای تجدید چاپ نمودند و چون مجال نبود که تجدید نظر کامل در آن به عمل آید تعدادی تمرین به آن افزوده و برخی از اشکالات چاپی مرتفع گردید. در اینجا لازم می‌داند از زحمات و تشویق ایشان در تکمیل کتاب قدردانی و از خداوند توفیق روزافزون مسئلت نمایم. همچنین از استاد محترم جناب آقای دکتر ناصر بروجردیان که زحمت ویرایش کتاب را بعهده گرفتند و استاد معظم جناب آقای دکتر اسدالله رضوی که نظرات خود را ارائه نموده‌اند تشکر و سپاسگزاری می‌نمایم.

بدینوسیله از استاد عالیقدر جناب آقای دکتر مگردویچ تومانیان نیز که با ارسال رهنمودها و نظرات اصلاحی خود نگارنده را یاری نمودند قدردانی می‌گردد.

در خاتمه از خداوند متعال موفقیت و سلامتی تمامی همکاران، اساتید محترم و دانشجویانی را که در تألیف این کتاب بنده را یاری نموده‌اند مسئلت دارم.

مهرماه ۱۳۸۱

بهروز بیدآباد

به نام خداوند جان و خرد

کزین برتر اندیشه برنگذرد

مقدمه

تاریخچه هندسه

عالمی که ما در یکی از کرات آن زندگی می‌کنیم پر از اسرار و رموزی است که نمیتوان آنها را به حساب در آورد. بلکه هر یک از ذرات و اتمهای آن دارای حقیقتی است که از دیده‌ها پنهان می‌باشد.

دل هر ذره را که بشکافی

آفتابیش در میان بینی

بشر بعنوان یکی از موجودات این عالم، با قوه پنهانی و درونی خرد یا اندیشه خود دارای حس کنجکاوی زیادی است که همواره مایل است بر حقایق و اسرار جهان و رموز پنهان آن آگاهی حاصل نماید، این حس درونی موجب پیدایش علوم از جمله علوم ریاضی گردید. اولین قدمها در راه تحقیقات در یونان و مصر قدیم برداشته شد. در یونان، افلاطون از بزرگترین شاگردان سقراط بود که بعضی از دانشمندان معتقد به نبوت او نیز می‌باشند وی در سال ۳۸۶ پیش از میلاد در باغ شخصی خود موسوم به «آکادمیوس» مدرسه‌ای تاسیس نمود و نزدیک به

چهل سال در آنجا تدریس می‌کرد و آن مدرسه را آکادمی نامید. افلاطون برخلاف سقراط تعلیمات خود را به امور اخلاقی اختصاص نداده بلکه تحقیقات خود را به همه موجودات بسط داد. افلاطون معتقد بود که ریاضی را باید در تعلیم علوم مقدم داشت، زیرا معتقد بود برای ورزش فکر خیلی مفید بلکه لازم است و معروف است که بر سر در آکادمی خود این عبارت را نوشته بود:

«هرکس هندسه نمی‌داند نباید وارد این مدرسه شود»[1]

افلاطون درکتاب جمهوری می‌نویسد: «مطالعه ریاضیات دستگاه ذهن را توسعه داده و فکر را به کار می‌اندازد که ارزش آن از هزار چشم بیشتر است زیراکه درک حقایق جهان هستی فقط از راه تفکر میسر است»

پس از سقوط آتن، در سال ۳۳۱ پیش از میلاد، بندر اسکندریه در مصر مرکز علوم گردید. اقلیدس هندسه دان مشهور از شاگردان مکتب افلاطون بود که در این عصر ظهور کرد. اقلیدس آموزش و پرورش را در مصر رونق داد و در بسط علوم کوشید. هندسه او هنوز باگذشت ۲۴ قرن در دنیا مورد توجه عالمان این علم است. کتب او در صدر اسلام به عربی ترجمه و بعداً خواجه نصیرالدین طوسی آنها را تحریر و توضیح نمود. از دانشمندان دیگر در اسکندریه فیثاغورث بود که در قرن اول پیش از میلاد می‌زیسته است. اگر چه تعلیمات او بیشتر روحیه اخلاقی داشت ولی یافته‌های او در هندسه با پیشرفت فوق العاده علوم هنوز مورد استفاده قرار می‌گیرد.

لزوم فراگیری هندسه منیفلد در عصر حاضر

همانطوریکه در بالا اشاره شد فراگیری هندسه برای تقویت خرد و اندیشه همگان خوب است اما نیاز به آموزش هندسه منیفلد در رشته‌های فنی و علوم به مراتب بیشتر احساس می‌شود. درکشورهای پیشرفته برنامه‌های درسی دانشگاه‌ها دائماً در حال تحول و بازنگری است. بطوریکه دروس ریاضیات عمومی دانشجویان رشته‌های فنی و علوم مفاهیم منیفلدها را شامل می‌شود و سالهاست که در این کشورها تدریس می‌گردد، اگر چه استفاده ازکاربرد منیفلدها در رشته‌های مختلف در مقطع کارشناسی ارشد و دکترا صورت می‌گیرد. از طرف دیگر مراجعه

---

۱ – *این بخش تلخیصی است ازکتاب فلسفه فلوطین، رساله پایان نامه تحصیلی دانشسرای عالی سال ۱۳۱۷ انتشارات صالح چاپ سوم ۱۳۶۰ تألیف: مولاناالمعظم حضرت آقای حاج سلطانحسین تابنده گنابادی رضا علیشاه که تبرکاً در اینجا آورده شده است.*

روزافزون دانشجویان فنی و ریاضی کاربردی در این مقاطع به متخصصین هندسه منیفلد دلیل دیگری بر نیاز روزافزون به آموزش هندسه منیفلدها است.

لزوم استفاده از هندسه منیفلدها در حقیقت بطور طبیعی در ریاضیات مقدماتی آشکار می‌شود. به عنوان مثال وقتی بخواهیم مشتق‌پذیری یک تابع پارامتری ساده که نمودار آن مثلاً یک نیم‌دایره مانند $F(t) = (\cos t , \sin t)$ $0<t<\pi$ است را بررسی نمائیم با استفاده از ریاضیات عمومی این کار عملی است اما سؤالی که غالباً مطرح می‌شود این است که آیا معکوس این تابع نیز مشتق‌پذیر است؟ جواب این سؤال با تمام سادگی آن احتیاج به مفاهیم دقیق دارد که متأسفانه از عهده دانشجویان فنی که با مفهوم "زیرمنیفلدها" آشنایی ندارند خارج است. لذا مشاهده می‌شود نقاط کوری در آموزش این دانشجویان وجود دارد که لازم است در رفع آنها اقدام نمود.

منیفلدها در علوم و فنون مختلف کاربردهای متنوعی دارند به عنوان مثال در برخی از شاخه‌های فیزیک مانند نظریه نسبیت عام و یا نظریه کوانتوم، هندسه منیفلدها نقش زیربنایی دارد و کتب بسیار متنوعی در این زمینه تألیف شده است. هنگام استفاده از تئوری معادلات دیفرانسیل، منیفلدها از اهمیت خاصی برخوردارند و یا هرگاه بخواهیم مقدار یک انتگرال را روی یک فضای پیچیده یا نامتناهی محاسبه کنیم نیاز به استفاده از مفهوم انتگرال روی منیفلدها داریم و یا وقتی بخواهیم در علم مکانیک پایداری یک جسم (مثلا یک ماهواره) بر روی یک مسیر را در فضا مطالعه نمائیم نیاز به مفهوم انحنای فضا و محاسبه ژئودزیک‌های آن داریم (این مباحث در هندسه منیفلد ۲ مورد مطالعه قرار می‌گیرند) اخیراً حتی در علوم طبیعی مانند بیولوژی و زمین‌شناسی نیز از مفهوم منیفلدهایی که در روی آنها مترفینسلر (Finsler) تعریف شده باشد استفاده می‌کنند.[1] در مخابرات و کنترل برای حل مسائل پیچیده کنترل به حل معادله موج $y'' + \lambda^2 y = 0$ می‌رسیم که یکی از بهترین جوابهای این معادله با استفاده از

۱- *علاقه‌مندان به کاربرد منیفلدها در فیزیک و بیولوژی می‌توانند به تحقیقات Matsumoto و یا کتب زیر مراجعه نمایند.*

- The Theory of Sprays and Finsler spaces with application in physics and Biology: by Antonelli - Ingarden - Matsumoto, Kluwer Academic Pub, 1993

- Finsler Geometry , Relativity and Gauge Theories and Quantum Cosmology , by Asanov 1985 ISBN 90 - 277 - 1960 - 8

منیفلدها بدست می‌آید.[1] [2] کاربرد هندسه منفیلد به همین موارد ختم نمی‌شود بلکه می‌توان از آن به عنوان پل ارتباطی بزرگی بین ریاضیات محض و کاربرد ریاضی در علوم مختلف نام برد.

شاید به همین دلیل باشد که مفهوم هندسه منیفلد در دروس مقدماتی ریاضی عمومی این‌گونه کشورها وارد شده است، ممکن است دلایل دیگری نیز برای این موضوع موجود باشد. اما به هر حال دقت در این امر جامعه ریاضی ما را بر آن می‌دارد که لزوم فراگیری هندسه منیفلد در مقاطع کارشناسی ریاضی را مورد مطالعه قرار داده برنامه‌ای جهت تدریس آن برای دانشجویان فنی مهندسی را در دستورکار خود قرار دهد.

کلیاتی درباره کتاب حاضر

الف - درباره علت تدوین و مواخذ:

اگر چه هندسه از ابتدایی‌ترین مفاهیم ریاضی است که توسط بشر مورد مطالعه قرار گرفته است اما مفهوم منیفلد در تاریخ ریاضی مبحث جدیدی به شمار رفته تاریخچه آن به مقالات بعد از سالهای ۱۹۴۵ میلادی برمی‌گردد، لذا نسبت به مباحثی مانند جبر و آنالیز که قدمت آنها به چندین قرن می‌رسد جوان بوده و کمتر متون درسی در این زمینه تالیف گردیده است. این موضوع که یکی از مشکلات دانشجویان ریاضی در رشته هندسه به شمار می‌رود نگارنده را بر آن داشت تا با وجود تمام دشواری‌هایی که تألیف کتب تخصصی در ایران دارد بنابر تقاضای دانشجویان و یا تشویق اساتید با استفاده از آخرین روش‌های تدریس، کتاب حاضر را با توجه به سطح اطلاعات دانشجویان کارشناسی ارشد ریاضی در ایران تألیف نمائیم.

بستر این کتاب در حقیقت بیشتر از یادداشتهایی است که نگارنده از دروس هندسه منیفلد که اخیراً در دانشگاه‌های فرانسه توسط اساتیدی چون J. Lafontaine , T.Aubin, A.Gromov,

---

۱- *برای کاربرد منیفلدها در مسایل کنترل می‌توان به عنوان مثال به کتاب زیر مراجعه کرد*

- Controlabilite Exact , Perturbations et Stabilisation de Systeme distrbues by J.L, Lions France 1996

۲- *علاقه‌مندان به کاربرد منیفلدها، در مکانیک تحلیلی می‌توانند به کتاب زیر مراجعه کنند.*

- Foundations of Mechanics, second edition , Benjamin - Cumming Publ. by Abraham and Marsden

P.Libermann, M.Berger مرحـوم A.Crumeyrolle و عـلی الخـصوص J.Grifone ارائـه گردیده است، اقتباس نموده آنها را با مطالب مشابه درکشورهای دیگر مقایسه و سپس چند سال متوالی آنها را در دانشگاه‌های مختلف ایران تدریس نموده، آنچه را برای دانشجویان ایرانی مفید دانسته بدان افزوده است. علاوه بر مراجع فوق الذکر کتب دیگری نیز در تدوین این کتاب مورد استفاده قرار گرفته است که در موارد لزوم در فصول مختلف به آنها اشاره شده است.

برای آنکه علاقه‌مندان به مطالعه کتب هندسه به زبانهای انگلیسی و فرانسوی بتوانند از این متن استفاده کامل نمایند هرجا که تعریف جدیدی بیان گردیده است در پاورقی نام انگلیسی آن نیز ذکر شده است و چنانچه این نام با نام معادل فرانسوی متفاوت باشد کلمه مترادف فرانسوی آن نیز در پرانتز آورده شده است.

ب - درباره پیشنهاد واژه فارسی برای کلمه منیفلد

در این کتاب سعی شده است از واژه‌های فارسی که در فرهنگ ریاضی کشور مرسوم بوده و در واژه‌نامه انجمن ریاضی ایران نیز تأئید گردیده است استفاده شود در مواردی که واژه فارسی معادل برای کلمه‌ای موجود نبوده است با دقت کلمات مترادفی برای آنها انتخاب کرده‌ایم. در اینگونه موارد همواره با واژه ابداعی فارسی کلمه، معادل لاتین آن اعم از انگلیسی یا فرانسه (چنانچه با یکدیگر متفاوت باشند) ذکر گردیده است تا خواننده هنگام مطالعه کتاب دچار مشکل نگردد. به عنوان مثال واژه «پوشاننده» به جای کلمه "submersion" آورده شده است که از نظر مفهوم ریاضی نیز به آن نزدیک است[۱]. ترجمه فرانسه این واژه مشابه آن بوده لذا از ذکر آن خودداری می‌شود.

در برخی از موارد با کلماتی مواجه شدیم که واژه فارسی معادل آن تثبیت نشده است و یا آنکه ترجمه‌های مختلف موجود هیچیک جامعیت کافی را نداشته و از هر نظر بیان کننده واژه اصلی نیست. یک نمونه از این کلمات، کلمه منیفلد[۲] است.

اغلب مترجمان فارسی این کلمه را «چند گونا» ترجمه کرده‌اند. برخی دیگر از نویسندگان از معادل فرانسوی کلمه یعنی «واریته» استفاده کرده‌اند، عده‌ای دیگر آنرا «بسلا» خوانده‌اند. اخیراً در واژه‌نامه انجمن ریاضی ایران این کلمه را «خمینه» نامگذاری کرده‌اند اگر چه خمینه ترجمه کلمه منیفلد نیست ولی از آنجا که برخی از منیفلدها دارای شکل خمیده هستند مانند خمها و رویه‌ها از این نام استفاده شده است. مشکل این نامگذاری آن است که بسیاری از منیفلدها هستند که

۱- قضیه رتبه روی منیفلدها را ببینید.

۲- *Manifold (Variété)*

مفهوم خمیدگی یا انحناء در آنها قابل شهود نبوده[۱] و یا حتی ممکن است غیرقابل تعریف و یا اصولا بی معنی باشد[۲]، لذا نمی‌توانیم بگوئیم که این نام از جهت ترجمه یا مفهوم کمال مطلوب را داراست. در آیین نامه‌های وزارت فرهنگ و آموزش عالی نیز تضادهایی در مورد بکار بردن نامهای مختلف برای این واژه دیده می‌شود. لذا عدم وجود ترجمه مناسب و تثبیت شده‌ای برای این کلمه موجب گردید که در این کتاب نیز از کلمه منیفلد استفاده شود.

لازم به یادآوری است که واژه‌های دیگری برای این کلمه موجود است که از نظر لغت و معنی به مفهوم اصلی نزدیک‌تر است اما استفاده از آن به دلیل عدم شناخت جامعه ریاضی ایران ممکن است مشکلاتی ایجاد نماید. بعنوان مثال می‌توان واژه «**چندگون**» را پیشنهاد نمود. این واژه نه تنها ترجمه تحت‌الفظی کلمه منیفلد است بلکه از نظر مفهوم هندسی نیز شباهت زیادی به کلمات «بیضگون» «سهمیگون» زنجیرگون، مارپیچ گون و غیره که مثالهایی از منیفلدها هستند، دارد. ویژگی دیگر نام «**چندگون**» که در حقیقت یکی از دلایل انتخاب کلمه «منیفلد» در زبان انگلیسی و معادل آن یعنی «واریته»[۳] در زبان فرانسه است ناشی از خاصیت گوناگون بودن ماهیت منیفلدها است و خواننده در برخورد اول با این واژه برداشت نادرستی از مفهوم ریاضی کلمه در ذهن خود نخواهد داشت.

ج - درباره مباحث مورد بحث و پیشنیازها

این کتاب به گونه‌ای تألیف گردیده است که احتیاج به مقدمات چندانی بیش از دروس کارشناسی ریاضی محض ندارد. چنانچه موارد پیشنیاز بیشتری برای درک بهتر مفاهیم این کتاب مورد نیاز باشد در یادآوری و پیوست‌های آخر هر بخش توضیحات کافی آورده شده است.

مطالب مطرح شده در این کتاب کلیه مباحث درس هندسه منیفلد ۱ را می‌پوشاند. در بسیاری از فصول بخش‌هایی بیش از آن چیزی که مورد نیاز این درس است و در آینده می‌تواند مورد استفاده قرارگیرد مطرح شده است، توصیه‌های لازم در مورد نحوه مطالعه این بخش‌ها در ابتدای هر فصل آمده است.

د - درباره تمرین‌ها

در این کتاب تمرین‌های گوناگونی با دقت انتخاب گردیده و با اهداف زیر در هر فصل

۱- *مانند فضاهای برداری و جبرها*

۲- *مانند منیفلدهایی که هاسدرف (Hassdorf) یا پیرافشرده (Paracompact) نباشند.*

3-Variété

گنجانیده شده‌اند:

۱-کمک به درک مطالب فصل ۲- رفع کمبودهای موجود در متن هر فصل ۳- وادار نمودن خواننده به اندیشیدن و آزمون فراگرفته‌های خود ۴- تشویق خواننده به مراجعه به مراجع دیگر.

غالب تمرین‌های ارائه شده با استفاده از اطلاعات موجود در هر بخش قابل حل هستند. در پاره‌ای از موارد نیز راهنمایی لازم آورده شده است. ممکن است برای برخی از دانشجویان با توجه به سوابق تحصیلی آنها حل پاره‌ای از تمرین‌های براحتی امکان‌پذیر نباشد اما تفکر در آنها می‌تواند ذهن خواننده را برای درک بهتر مفاهیم پیچیده ریاضی آماده نماید حتی اگر به راه حل آنها بطورکامل پی نبرد. یکی از دلایل قرار دادن چنین تمرین‌هایی در اینجا تشویق خواننده است به مراجعه به مراجع دیگر. اصولاً نباید این توهم را در خواننده ایجاد نمود که با خواندن یک متن به کلیه اطلاعات موجود در این زمینه دست یافته است و احتیاجی به مطالعه کتب دیگر ندارد بلکه یکی از اهداف، ترغیب دانشجویان به تفکر است اما باید توجه داشت که مطالعه مراجع متنوع پس از درک مطالب این کتاب و تسلط به تعاریف اصلی آن و یا در جهت درک آنان باید صورت پذیرد، در غیر این صورت مراجعه به مراجع متنوع به دلیل تفاوت در نحوه بیان و تعاریف می‌تواند موجب بروز اشکالاتی برای خوانندهٔ مبتدی گردد.

ه- درباره روش مطالعه

در اینجا می‌توان گفتاری کوتاه با علاقه‌مندان به مطالعه و درک مفاهیم پیچیده ریاضی داشت و تا اندازه‌ای آنها را با روش مطالعه آشنا نمود.

یادآوری می‌شود دانشجویان دروس ریاضی نباید انتظار داشته باشند که تنها با حضور در کلاس درس و شنیدن مطالب بتوانند به عمق مفاهیم پیچیده ریاضی دست یابند. این موضوع مانند آن است که جمعی از علاقه‌مندان به ورزش وزنه برداری بطور منظم در سالن‌های ورزشی جهت مشاهده مسابقات وزنه برداری شرکت نموده سپس انتظار داشته باشند که پس از پایان جلسات، خود نیز بتواند وزنه‌های سنگین را براحتی بلند کنند.

به عبارت دیگر می‌دانیم که تقویت فکر نیز مانند دیگر اعضای بدن احتیاج به تمرین دارد. مطالعه و کوشش در درک مفاهیم پیچیده خود یک نوع ورزش فکری و موجب تقویت فکر است و می‌دانیم که تقویت مغز نیز مانند دیگر اعضای بدن بطور تدریجی حاصل می‌شود. لذا بدون اینکه از عدم درک مفاهیم پیچیده ریاضی دچار یاس و ناامیدی شویم باید با مراجعه به مراجع متفاوت و اهتمام و پافشاری در درک یک مسئله، اندک اندک توانایی خود را بالا ببریم. لازم به یادآوری است که میزان مصرف کالری در بدن هنگام فکر کردن بسیار بالا بوده و در برخی موارد

تا چندین برابر میزان مصرف کالری هنگام انجام کارهای جسمی است. از این موضوع می‌توان نتیجه گرفت که مطالعه کتب ریاضی و کوشش در درک مفاهیم آن میزان زیادی از کالری موجود در بدن را مصرف نموده و انسان را دچار خستگی می‌نماید، لذا هر کس باید متناسب با توانائی جسمی خود کوشش نموده بتدریج آنرا افزایش دهد تا دچار خستگی و در نتیجه ناامیدی نگردد.

آخرین موضوعی که در رابطه با روش مطالعه باید بخاطر داشت آن است که افکار انسان پس از مدتی فراغت از تحصیل نظم لازم جهت مطالعه ریاضی را از دست می‌دهد این موضوع موجب می‌شود که شروع به مطالعه مفاهیم ریاضی امری صعب و دشوار نماید یا آنکه حافظه انسان در اثر دوری از مطالعه ضعیف گردیده آمادگی خود را جهت بخاطر سپردن تعاریف پیچیده ریاضی از دست می‌دهد، اما با گذشت چند روز اشتغال به تفکر و مطالعه رفته رفته مغز انسان آمادگی خود را باز یافته با درک مفاهیم پیچیده از مطالعه ریاضی لذت نیز می‌برد. چنانچه با توجه به میزان توانایی جسمی خود به این کار ادامه دهد رفته رفته مطالعه مفاهیم ریاضی می‌تواند از بالاترین تفریحات برای او تلقی شود.

در خاتمه در صورت وجود نواقص و غلطهای چاپی از خوانندگان گرامی پوزش خواسته امید است با ارسال رهنمودها و نظرات خود نگارنده را در رفع آنها یاری نمایند.

بهروز بید آباد

دانشکده ریاضی و کامپیوتر دانشگاه امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)

نوروز ۱۳۷۹ مطابق با سال ۲۰۰۰ میلادی سال جهانی ریاضیات

فهرست مطالب

فصل ۱: منیفلدهای دیفرانسیل‌پذیر[۱]

مقدمه فصل اول

در این فصل ابتدا در بخش § ۱ به معرفی کارت موضعی و اطلس پرداخته سپس در بخش § ۲ *منیفلد دیفرانسیل‌پذیر را به صورت "یک مجموعه که در روی آن یک اطلس ماکزیمال (یا ساختار دیفرانسیل‌پذیری) تعریف شده باشد" تعریف می‌نماییم.*

در بخش § ۳ به تعریف توابع دیفرانسیل‌پذیر روی منیفلدها پرداخته و خواهیم دید که مفهوم دیفرانسیل پذیری یک تابع روی یک منیفلد بستگی به ساختار دیفرانسیل‌پذیری آن دارد. به عبارت دیگر یک تابع روی یک منیفلد ممکن است با توجه به یک اطلس ماکزیمال دیفرانسیل‌پذیر باشد اما با توجه به اطلس ماکزیمال دیگر دیفرانسیل‌پذیر نباشد.

در بخش § ۴ قاعده زنجیره‌ای را برای منیفلدها مورد مطالعه قرار می‌دهیم. بخش § ۵ به توپولوژی منیفلدها اختصاص داشته در آنجا مشاهده خواهیم کرد که خانواده حوزه تعریف کارت‌های یک منیفلد در اطلس ماکزیمال تشکیل یک پایه توپولوژی روی آن منیفلد می‌دهد. به عبارت دیگر در تمرینات این بخش خواهیم دید که می‌توان تعریف معادل دیگری از منیفلدها به صورت زیر ارائه نمود:

یک فضای توپولوژیک را یک منیفلد توپولوژیک n بعدی گوییم. هرگاه هر نقطه آن دارای یک همسایگی باشد که با بازی از $\mathbb{R}^n$ هومئومورف است.

---

[۱] $Differentiable\ manifolds\ -\ variétés\ différentiable$

تعریف اخیر منیفلدها دارای این برتری است که خاصیت اساسی منیفلدها یعنی موضعاً هومئومورف بودن با $I\!\!R^n$ را در مرحله اول معرفی می‌نماید. به همین دلیل نیز در متون پیشرفته هندسه و فیزیک از این تعریف استفاده می‌نمایند. اما تعریفی که در بخش § ۲ آورده شده است نه تنها برای خوانندگان مبتدی ملموس‌تر است بلکه هنگام کاربرد نیز در اثبات منیفلد بودن یک مجموعه براحتی می‌توان از آن استفاده کرد بدون آنکه نیازی به بررسی شرایط فضای توپولوژیک داشته باشیم. این خاصیت به خودی خود با تعیین حوزه تعریف کارت‌ها برقرار می‌باشد.

حذف بخش § ۵ بطور موقت مشکلی برای پیوستگی مطالب در فصل دوم ایجاد نمی‌کند. لذا خوانندگان مبتدی می‌توانند آن را در نگرش‌های بعدی خود مورد مطالعه قرار دهند.

درک مثالها و تمرینات این فصل برای فراگیری مفهوم منیفلدها ضروری است. لذا به خوانندگان توصیه می‌گردد در این مورد صرف وقت کافی بنمایند. ممکن است برخی از تمرینات این فصل بدون راهنمایی براحتی قابل حل نباشند اما اندیشیدن در آنها می‌تواند ما را تا اندازه زیادی به نتیجه مورد نظر نزدیک نماید حتی اگر به راه حل آنها پی‌نبریم. یکی از دلایل قرار دادن چنین تمریناتی در این کتاب تشویق خواننده است به مراجعه به مراجع دیگر (البته پس از تسلط به مطالب این کتاب). اصولاً نمی‌خواهیم در خواننده این توهم را ایجاد نماییم که با خواندن این متن احتیاجی به متون دیگر ندارد. ما معتقدیم که اکتفا نمودن به یک کتاب هرچند که جامع نیز باشد از گسترش روحیه پویایی و تحقیقاتی خواننده می‌کاهد. لذا در این کتاب در هر موضوع که احتیاج به توضیح بیشتر داشته باشد مراجعی معرفی گردیده است. در مورد فصل اول مراجع بسیار متنوعی موجود است که به عنوان مثال می‌توان به کتاب $Brickell\ \&\ Clark$ مراجعه نمود.

در انتهای فصل اول پیوست I مربوط به یادآوری چند تعریف و قضیه از آنالیز ریاضی است که مطالعه آن برای درک بهتر مفاهیم این کتاب مفید است. به خوانندگان توصیه می‌گردد قبل از مطالعه فصل اول مروری بر این مطالب داشته باشند.

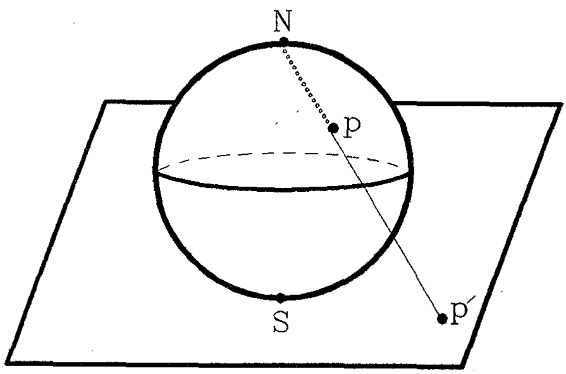
پیشگفتار: در دروس آنالیز فراگرفتیم که چگونه می‌توان محاسبات دیفرانسیل و انتگرال را روی بازهای $\mathbb{R}^n$ انجام داد .هندسه دیفرانسیل یا منیفلد در حقیقت عبارت از گسترش و تعمیم این محاسبات وبررسی هندسی آنها روی زیر مجموعه‌هایی از $\mathbb{R}^n$ است که بتوان بر روی آن یک **دستگاه مختصات** مناسب به طور موضعی (یعنی در همسایگی هر نقطه)تعریف نمود. به عنوان مثال می‌توان دستگاههای مختصات مختلفی روی کره S^2 به عنوان زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}^3$ به صورت زیر تعریف نمود.

الفـ فرض کنیم یک نقطه از کره S^2 به عنوان نقطه‌ای از $\mathbb{R}^3$ عبارت باشد از

$x = (x_1, x_2, x_3)$ و در نتیجه $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ لذا

$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | f(x) = 0\}$ که در آن تابع $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ به صورت

$f : (x_1, x_2, x_3) \to x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$ تعریف می‌شود.



شکل ۱.۱ : تصویر استریوگرافیک

می‌توان از تصویر استریوگرافیک[1] به عنوان یک روش ارائه مختصات روی کره استفاده کرد در این روش مختصات هر نقطه P از کره را توسط مختصات P' از صفحه‌تعریف می‌نمائیم. به شکل ۱.۱ مراجعه شود.

با این روش تمام نقاط کره به جز قطب شمال N دارای یک مختصات خواهند شد و برای

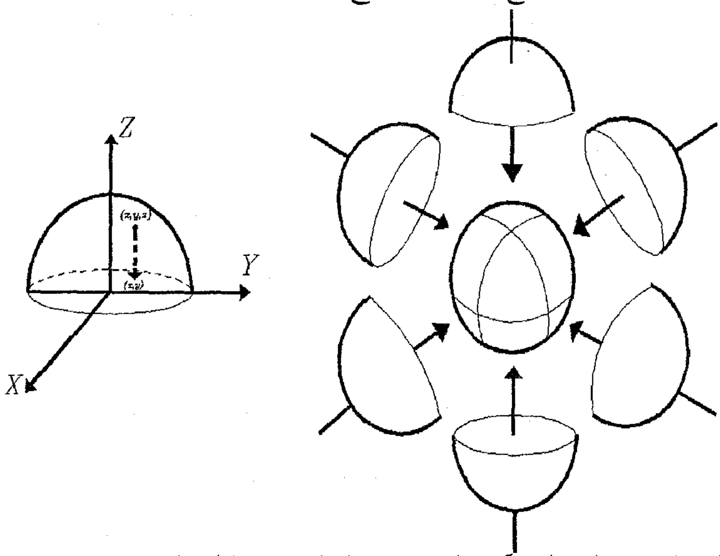
[1] *Stereographic projection*

معرفی کل کره می‌توان یک تصویر استریوگرافیک دیگر نسبت به قطب جنوب S تعریف نمود (که تمام کره بجز قطب جنوب را معرفی می‌نماید)سپس با استفاده از این دو دستگاه مختصات استریوگرافیک می‌توان کل کره را پوشانید.

ب- می‌توان دستگاه مختصات دیگری نیز برای کره معرفی نمود که نیمکره شمالی را توسط نمودار تابع $z = f_1(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ونیمکره جنوبی را توسط تابع زیر بپوشاند.

$$z = f_2(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

اما اگر در اینجا فرض را برآن بگذاریم که حوزه تعریف توابع فوق قرص بازی از صفحه $\mathbb{R}^2$ باشند این توابع روی کره S^2 دایره $x^2 + y^2 = 1$ را نمی‌پوشانند . لذا برای اینکه بتوانیم یک دستگاه مختصات به کره نسبت دهیم باید توابع دیگری نیز مشابه توابع فوق تعریف کنیم تا حوزه مقادیر توابع مذکور کل کره را بپوشاند .حدس می‌زنید برای اینکار احتیاج به چند تابع (یا نیمکره باز)داریم ؟ جواب این سؤال را می‌توانید با مراجعه به شکل زیر بدست آورید توجه کنید که وارون توابع بالا همان توابع مختصات هستند.



شکل ۱.۲ : با شش تابع یا نیمکره باز نیز می‌توان کره را پوشانید که در سمت چپ یکی از آنها را مشاهده می‌کنید

در اینجا مایل هستیم با انتخاب چند **دستگاه مختصات مناسب** روی $S^۲$ **شرایط لازم برای تعریف یک تابع دیفرانسیل‌پذیر** (بعنوان مثال از $S^۲$ در $S^۲$) **را فراهم آوریم.** بررسی این مختصات روی زیر مجموعه‌هایی از $\mathbb{R}^n$ و انتخاب بهترین آنها جهت محاسبات حساب دیفرانسیل و انتگرال ما را بر آن می‌دارد که در این فصل به تعریف یکی از اساسی‌ترین مفاهیم جدید ریاضی به نام منیفلد بپردازیم.

۱.۱ § کارت‌های موضعی و اطلس [۱]

در اینجا به تعریف نگاشتی می‌پردازیم که از آن برای تعیین مختصات روی مجموعه با استفاده می‌شود.

تعریف: *فرض کنیم M یک مجموعه ناتهی، O زیر مجموعه بازی از $U \subseteq M, \mathbb{R}^n$باشد. نگاشت دوسویی $x : U \mapsto x(U) = O \subset \mathbb{R}^n$ را یک* **کارت n بعدی**، *U را حوزه کارت و زوج (x, U) را یک* **کارت موضعی** *می‌نامیم.*

اگر تابع $P^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ به صورت $P^i : (t^۱, \cdots, t^n) \mapsto t^i$ تعریف شود آنگاه توابع $x^i = P^i \circ x : U \longrightarrow \mathbb{R}$ را **توابع مختصاتی**[۲] می‌گویند. به همین دلیل زوج (x, U) را **دستگاه مختصات موضعی**[۳] نیز می‌نامند . لذا هر نقطه روی U توسط n تایی از توابع حقیقی $(x^۱, \cdots, x^n)$ معرفی می‌شود.

تذکر ۱: *همانطوری که ملاحظه نمودید درتعریف کارت موضعی (x, U) دو موضوع مطرح است، اولاً x* **دوسویی** *باشد، ثانیاً $x(U)$* **باز** *باشد.*

مثال ۱: فضای $M = \mathbb{R}^n$ همراه با نگاشت همانی $x = Id$ یک کارت موضعی nبعدی بدیهی روی $\mathbb{R}^n$ تشکیل می‌دهد.

$$x = Id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad ; x(p) = p$$

---

[۱] *Local chart (Carte locale) – Atlas*

[۲] *Coordinate functions (Fonctions des coordonne'es)*

[۳] *Local coordinate system*

مثال ۲: نیمکره باز $S^{۲}_{+}$ با نگاشت تصویر روی صفحه $I\!R^{۲}$ (مثال ج در پیشگفتار) یک کارت ۲بعدی روی $S^{۲}$ تعریف می‌نماید. (شکل ۱.۲ : سمت چپ)

در حقیقت نگاشت دو سویی تصویر f را از نیمکره باز $S^{۲}_{+}$ در دیسک باز $D^{۲}$ زیر در نظر گرفته‌ایم

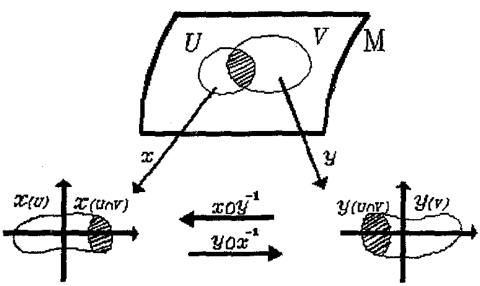
$$f:\ S^{۲}_{+} \longrightarrow D^{۲} \subset I\!R^{۲}$$
$$(x, y, \sqrt{۱ - x^{۲} - y^{۲}}) \longrightarrow (x, y)$$

لذا $(f, S^{۲}_{+})$ یک کارت دوبعدی روی $S^{۲}$ تعریف می‌کنند.

مثال ۳: $M = M_{n,p}(I\!R)$ مجموعه ماتریس‌های $n \times p$ حقیقی همراه با نگاشت

$$x : M_{n,p}(I\!R) \to I\!R^{np}$$
$$[a_{ij}] \longmapsto (a_{۱۱}, a_{۱۲}, \cdots a_{ij}, \cdots, a_{np})$$

یک کارت npبعدی روی تمام M تعریف می‌نماید.



شکل ۱.۳ : کارت‌های مرتبط و نگاشت تغییر کارت

تعریف: فرض کنیم (x, U) و (y, V) دو کارت موضعی n- بعدی روی M باشند، گوئیم این دو کارت C^{k}- مرتبط [1] هستند اگر نگاشت زیر که آنرا **نگاشت تغییر کارت** می‌نامیم

---
[1] $k - related\ (k - relie')$

$$y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \to y(U \cap V)$$

و معکوس آن توابعی از کلاس C^k بین دو باز $\mathbb{R}^n$ باشند. به عبارت دیگر $x(U \cap V)$ و$y(U \cap V)$ بازهایی از $\mathbb{R}^n$ بوده و $y \circ x^{-1}$ و $x \circ y^{-1}$ از کلاس C^k باشند. درحالت $U \cap V = \phi$ بنا به تعریف این دو کارت را C^k– مرتبط می‌نامیم.

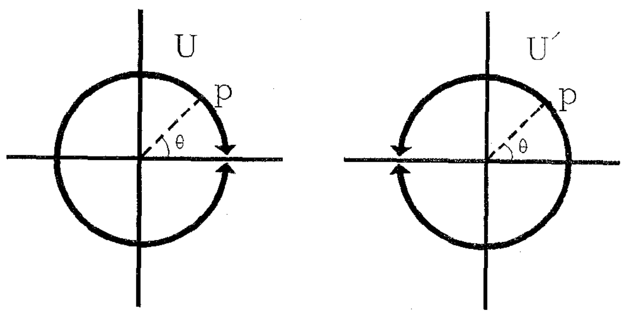
تعریف: گوئیم یک خانواده از کارت‌های C^k مرتبط $\{(x_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ تشکیل یک اطلس n C^k بعدی روی M می‌دهند اگر حوزه تعریف آنها M را بپوشاند، یعنی $M = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$

مثال ۴: فرض کنیم $M = S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

$$U = \{(\cos\theta, \sin\theta) : 0 < \theta < 2\pi\} \subseteq M$$

$$x \ : \ U \longrightarrow]0, 2\pi[$$

$$p = (\cos\theta, \sin\theta) \mapsto \theta$$



شکل ۱.۴ : تعریف دو کارت که دایره را می‌پوشاند

x یک تابع دوسویی از U روی بازی از $\mathbb{R}$ است بنابراین (x, U) یک کارت روی S^1 تعریف می‌نماید. فرض کنیم

$$U' = \{(\cos\theta, \sin\theta) : -\pi < \theta < \pi\}$$

$$x' : U' \longrightarrow]-\pi, \pi[$$

$$(\cos\theta, \sin\theta) \longrightarrow \theta$$

(x', U') کارت دیگری روی $S^۱$ تعریف می‌کند.

در نتیجه دو دستگاه مختصات موضعی روی دایره تعریف نمودیم که کل M را می‌پوشانند.

حال نگاشت تغییر کارت را بررسی کنیم.

در اینجا $x(U \cap U') =]\circ, \pi[\cup]\pi, ۲\pi[$ یک باز از $I\!R$ بوده و به همین صورت $x'(U \cap U') =]\circ, \pi[\cup] - \pi, \circ[$ نیز یک باز از $I\!R$ می‌باشد.

بنابراین روی فاصله $]\circ, \pi[$ داریم $x = x'$ و در نتیجه $x' \circ x^{-۱}|_{]\circ,\pi[} = Id$ و روی فاصله $]\pi, ۲\pi[$ داریم $x'(p) = x(p) - ۲\pi$ چون $x(p) = \theta$ پس $p = x^{-۱}(\theta)$ لذا $x' \circ x^{-۱}(\theta) = \theta - ۲\pi$ در نتیجه

$$x' \circ x^{-۱}(\theta) = \begin{cases} \theta & \theta \in]\circ, \pi[\\ \theta - ۲\pi & \theta \in]\pi, ۲\pi[\end{cases}$$

چون نگاشت تغییر کارت از کلاس C^∞ می‌باشد، یک اطلس C^∞ یک‌بعدی روی $S^۱$ که از دو کارت تشکیل شده است تعریف نمودیم.

مثال ۵: فرض کنیم $M = A \cup B$ به طوری که A و B دو پاره خط زیر باشند.

$$A = \{(t, \circ) \in I\!R^۲ | - ۱ < t < ۱\}$$

$$B = \{(t, t) \in I\!R^۲ | \circ < t < ۱\}$$

فرض کنیم دو کارت (x, A) و (y, V) به صورت زیر تعریف شوند

$$x \ : \ A \longrightarrow] - ۱, ۱[\subset I\!R$$

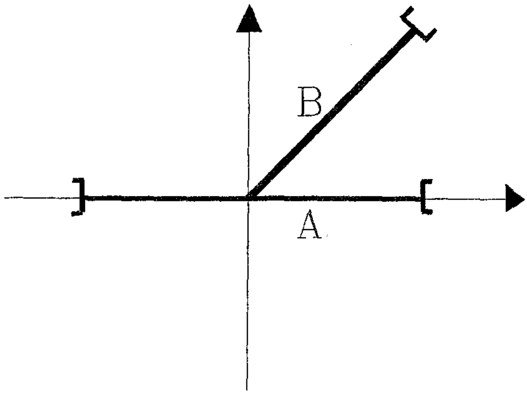
$$(t \ , \ \circ) \longmapsto t$$

$$V = \{(t, \circ) \in I\!R^۲ | - ۱ < t \leq \circ\} \cup \{(t, t) \in I\!R^۲ | \circ < t < ۱\}$$

به طوری که

$$y : V \to] - ۱, ۱[$$

$$(t, \circ) \longmapsto t$$
$$(t, t) \longmapsto t$$



شکل ۱.۵ : دو کارت غیر مرتبط

حوزه تعریف این دو کارت M را می‌پوشاند و همین طور داریم $y \circ x^{-1} = Id$ بنابراین نگاشت تغییر کارت از کلاس C^k می‌باشد .اما حوزه تعریف $y \circ x^{-1}$ (یعنی $x(A \cap V)$) عبارت است از فاصله $[\circ, 1 - [$ که باز نیست و در نتیجه این دو کارت C^k- مرتبط نبوده و تشکیل یک اطلس نمی‌دهند.

تمرین: نشان دهید C^k- مرتبط بودن یک رابطه هم‌ارزی نیست.(کافی است عدم برقراری شرط تعدی را بررسی کنید)

۲.۱ § اطلس ماکزیمال ـمنیفلد دیفرانسیل‌پذیر

همانطور که دیدیم ارائه یک اطلس به ما اجازه می‌دهد که یک دستگاه مختصات روی یک مجموعه تعریف نمائیم . فرض کنیم $\mathcal{A}$ و $\mathcal{A}'$ دو اطلس C^k nبعدی از M باشند. ممکن است مجموعهٔ کارت‌های $\mathcal{A}$ و $\mathcal{A}'$ به روی هم یک اطلس C^k از M نباشند زیرا اگر $x \in \mathcal{A}$ و $y \in \mathcal{A}'$ آنگاه ممکن است $y \circ x^{-1}$ یا معکوس آن از کلاس C^k نباشد برای آنکه $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ نیز یک اطلس C^k باشد تعریف زیر را می‌آوریم.

تعریف: دو اطلس C^k nبعدی از M را **هم ارز**[۱] گوئیم اگر اجتماع آنها نیز یک اطلس C^k باشد.

مثال ۶: می‌خواهیم یک اطلس C^∞ دیگر روی $S^۱$ تعریف نموده و هم ارزی آنرا با اطلسی که قبلاً روی $S^۱$ تعریف کردیم بررسی نمائیم. فرض کنیم $U_۱ = \{(x,y) \in S^۱ | x > ۰\}$

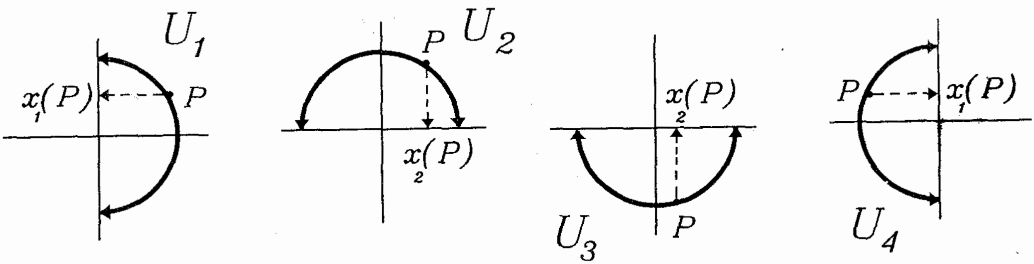
$x_۱ : U_۱ \to]-۱,۱[$

$(x,y) \longmapsto y$

در این صورت $(x_۱, U_۱)$ یک کارت موضعی برای $S^۱$ می‌باشد. به همین صورت فرض کنیم $U_۲ = \{(x,y) \in S^۱ | y > ۰\}$

$x_۲ : U_۲ \to]-۱,۱[$

$(x,y) \longmapsto x$



شکل ۱.۶ : اطلس چهار کارتی روی دایره

در این صورت $(x_۲, U_۲)$ نیز کارت دیگری روی $S_۱$ می‌باشد. و به همین ترتیب اگر فرض کنیم

$U_۳ = \{(x,y) \in S^۱ | y < ۰\}$

$U_۴ = \{(x,y) \in S^۱ | x < ۰\}$

$x_۴ : U_۴ \to]-۱,۱[\quad , \quad x_۳ : U_۳ \to]-۱,۱[$

$(x_۴, U_۴), (x_۳, U_۳)$ کارت‌های دیگری روی $S^۱$ می‌باشند حوزه تعریف این چهار

---

[۱] *equivalent*

کارت S^{1} را می‌پوشاند و نگاشت‌های تغییر کارت از کلاس C^k می‌باشند. به عنوان مثال نگاشت $x_2 \circ x_1^{-1}$ را بررسی می‌کنیم. روی $U_1 \cap U_2$ داریم $y = \sqrt{1 - x^2}$ بنابراین اگر

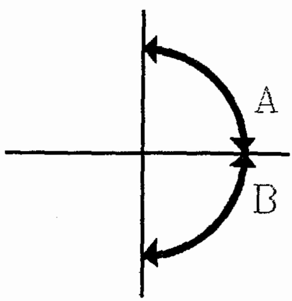
$$x_1 : U_1 \cap U_2 \to]0, 1[$$
$$p \longmapsto x_1(p) = t$$

نگاشت $x_2 \circ x_1^{-1}$ از کلاس C^∞ است زیرا

$$x_2 \circ x_1^{-1} :]0, 1[\to]0, 1[$$
$$t \longmapsto \sqrt{1 - t^2}$$

در نتیجه یک اطلس C^∞ دیگر روی S^1 تعریف نمودیم .حال این سوال را مطرح می‌کنیم که آیا این اطلس با اطلس ارائه شده در مثال ۴ هم‌ارز می‌باشد؟ برای پاسخ به این سوال نگاشت تغییر کارت روی $U \cap U_1$ را در نظر می‌گیریم. داشتیم

$$x : U \to]0, 2\pi[\qquad x' : U' \to]-\pi, \pi[$$
$$(\cos\theta, \sin\theta) \longmapsto \theta \quad (\cos\theta, \sin\theta) \longmapsto \theta$$
$$0 < \theta < 2\pi \qquad -\pi < \theta < \pi$$
$$U \cap U_1 = A \cup B$$



شکل ۱.۷ : حوزه تعریف نگاشت تغییر کارت

رجوع شود به شکل زیر

$$A = \{(x, y) \in S^1 | x > 0, y > 0\}$$
$$B = \{(x, y) \in S^1 | x > 0, y < 0\}$$

روی A داریم : $x_1(p) = \sin x(p)$ بنابراین اگر $p = x^{-1}(\theta)$ آنگاه

$$\begin{aligned} x_1 \circ x^{-1} :]0, \pi/2[&\to]0, 1[\\ \theta &\longmapsto \sin\theta \end{aligned}$$

یک نگاشت C^∞ است. روی B نیز چنین است.

به همین صورت می‌توان بررسی نمود که نگاشت‌های تغییر کارت بین کارتهای دو اطلس $\mathcal{A}$ و $\mathcal{A}'$ از کلاس C^∞ می‌باشند بنابراین $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ یک اطلس C^∞ می‌باشد.لذا $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ دو اطلس هم‌ارز هستند.

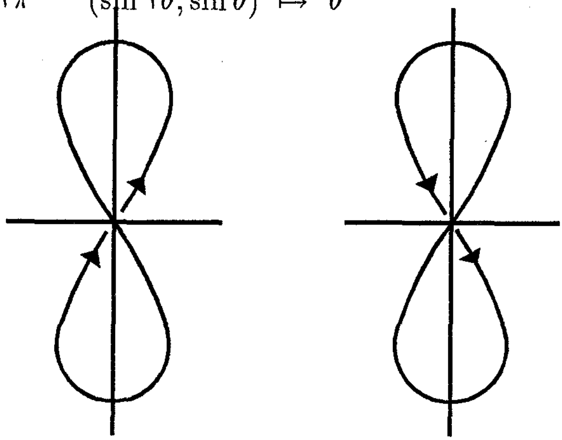
حال در اینجا مثالی از دو اطلس می‌آوریم که هم ارز نمی‌باشند.

مثال ۷: فرض کنیم

$$H = \{(x_1, x_2) \in I\!R^2 | x_1 = \sin 2\theta, x_2 = \sin\theta, \theta \in]0, 2\pi[\}$$

$$x : H \longrightarrow]0, 2\pi[\subset I\!R$$

$$0 < \theta < 2\pi \qquad (\sin 2\theta, \sin\theta) \mapsto \theta$$



شکل ۱.۸ : یک مجموعه با دو اطلس غیر هم‌ارز

در اینجا یک اطلس داریم که از یک کارت تشکیل می‌شود می‌توان اطلس دیگری در نظر گرفت

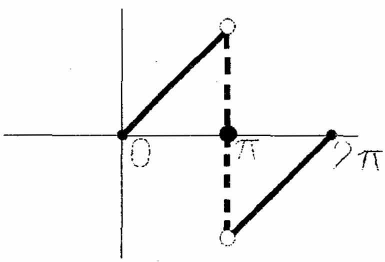
$x' : H \longrightarrow]-\pi, \pi[\subset \mathbb{R}$

$(\sin 2\theta, \sin\theta) \mapsto \theta$

$-\pi < \theta < \pi$

نشان می‌دهیم این دو اطلس هم‌ارز نمی‌باشند. در حقیقت نگاشت تغییر کارت عبارت است از

$$\begin{aligned} x' \circ x^{-1} : x(H) &\longrightarrow x'(H) \\ ]0, 2\pi[&\mapsto]-\pi, \pi[\end{aligned}$$



شکل ۱.۹ : نمودار نگاشت تغییر کارت

به عبارت دیگر
$$x' \circ x^{-1}(\theta) = \begin{cases} \theta & 0 < \theta < \pi \\ 0 & \theta = \pi \\ \theta - 2\pi & \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$$

این تابع C^∞ نیست زیرا نمودار آن در نقطه $\theta = \pi$ پیوسته نیست . بنابراین این دو اطلس هم ارز نمی‌باشند.

تعریف: یک اطلس C^k از M را **ماکزیمال**[1] یا **کامل** گوئیم اگر زیرمجموعهٔ یک اطلس C^k دیگر نباشد.

قضیه: فرض کنیم A یک اطلس C^k باشد. در این صورت یک وتنها یک اطلس C^k ماکزیمال $\overline{A}$ وجود دارد که شامل A باشد.

[1] *maximal , complet*

اثبات: اثبات واضح است کافی است ابتدا به عنوان تمرین ثابت کنید رابطه هم‌ارز بودن اطلسها یک رابطه هم‌ارزی است، سپس قرار دهید:

$$\overline{\mathcal{A}} = \cup \mathcal{A}'$$

در اینجا $\mathcal{A}'$ کلیه اطلس‌های هم‌ارز با اطلس $\mathcal{A}$ است. یکتایی $\overline{\mathcal{A}}$ از هم‌ارزی بودن رابطه اطلسهای هم‌ارز نتیجه می‌شود. □

گاهی اوقات اطلس ماکزیمال $\overline{\mathcal{A}}$ را اطلس اشباع شده $\mathcal{A}$ نیز می‌گویند.

تعریف: مجموعه M همراه با یک اطلس C^k ماکزیمال nبعدی را یک **منیفلد دیفرانسیل‌پذیر**[۱] n بعدی از کلاس C^k می‌گوئیم (ما غالبا" برای اختصار آن را منیفلد می‌نامیم). یک اطلس ماکزیمال روی M را **یک ساختار دیفرانسیل‌پذیری**[۲] نیز می‌گویند.

تذکر ۲: برای تعریف نمودن ساختار یک منیفلد دیفرانسیل پذیر روی مجموعه M کافی است بعد از قضیه فوق یک اطلس C^k در نظر گرفت، سپس اطلس C^k ماکزیمالی را که شامل آن می‌باشد را در نظر گرفت. در واقع می‌توان ثابت کرد بعد از مشخص نمودن اطلس $\mathcal{A}$ کافی است تمام کارت‌های C^k- مرتبط را به آن اضافه کنیم تا اطلس ماکزیمال شامل $\mathcal{A}$ بدست آید.

مثال ۸: فرض کنیم $M = I\!R^n$ و $\mathcal{A} = Id$. ساختار دیفرانسیل پذیر C^∞ تعریف شده توسط $\mathcal{A}$ عبارت است از اطلس ماکزیمال $\overline{\mathcal{A}}$ که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\overline{\mathcal{A}} = \left\{ \begin{array}{ll|l} x : U \subset I\!R^n \to & O \subset I\!R^n & x \text{ دوسویی ، } x \circ Id^{-1} \text{ , } Id \circ x^{-1} \text{ یعنی} \\ & O \text{ باز } I\!R^n & x \text{ و } x^{-1} \text{ از کلاس } C^\infty \text{ باشند} \end{array} \right\}$$

بدین صورت اشباع نمودن اطلس طبیعی $(I\!R^n, Id)$ عبارت است از در نظر گرفتن تمام دستگاههای مختصات موضعی (x, U) روی $I\!R^n$ (به نحوی که x دیفئومورفیسم- C^∞ باشد، یعنی x و x^{-1} از کلاس C^∞ باشند.)

تذکر ۳: بجای $I\!R^n$ در تعریف منیفلد دیفرانسیل‌پذیر می‌توان یک فضای باناخ با بعد احیاناً

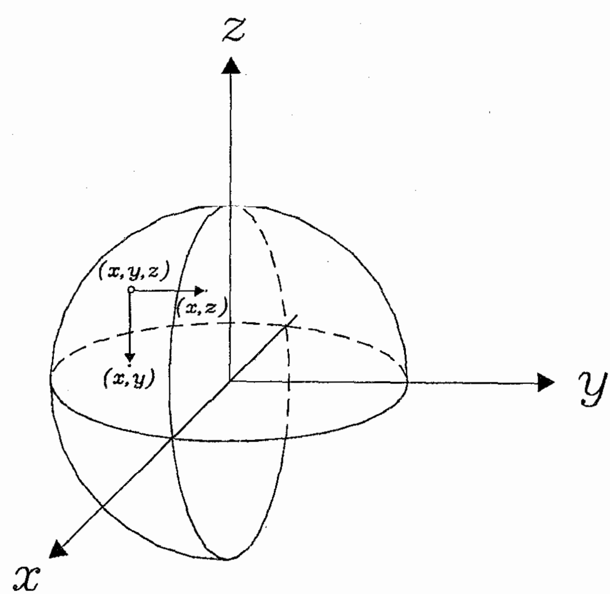
---

[۱] *Differentiable manifold (Varie'te' différentiable)*

[۲] *Differentiable structure (Structure différentiable)*

نامتناهی در نظر گرفت. در این صورت دامنه تعریف منیفلد گسترده می‌شود ولی مطالعه آن کمی پیچیده‌تر می‌گردد. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه می‌توان به [۱۸] صفحه ۴۲۱ مراجعه نمود.

مثال ۹: در مقدمه این فصل شکل ۱.۲ دیدیم کره را می‌توان توسط شش نیمکره باز پوشانید. اگر فرض کنیم هر نیمکره باز حوزه تعریف یک کارت باشد نشان می‌دهیم که این کارت‌ها C^∞ مرتبط هستند. فرض کنیم U_1 نیمکره باز شمالی و φ_1 نگاشتی باشد که U_1 را بر قرص بازی از صفحه که در زیر آن قرار دارد تصویر نماید.



شکل ۱.۱۰ : *رابطه بین دو کارت در روی کره*

$$\begin{array}{lcl} \varphi_1 : U_1 \subset S^2 & \longrightarrow & O_1 \subset I\!R^2 \\ (x, y, z) & \longrightarrow & (x, y) \end{array}$$

φ_1 یک به یک بوده تصویر آن باز است لذا (φ_1, U_1) یک کارت روی S^2 تعریف می‌کند. در این صورت اگر U_2 نیمکره باز شرقی بوده و توسط φ_2 بر روی قرص بازی از صفحه

مقابل خود تصویر گردد زوج (φ_2, U_2) یک کارت ۲ـ بعدی روی S^2 است.

$$\varphi_2 : U_2 \subset S^2 \longrightarrow \sigma_2 \subset \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \longrightarrow (x,z)$$

لذا نگاشت تغییر کارت بصورت زیر می‌باشد

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$
$$(x,y) \longrightarrow (x,z)$$

از $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ نتیجه می‌شود نگاشت تغییر کارت و معکوس آن دیفرانسیل‌پذیر از کلاس C^∞ بوده باز را به باز می‌برند بنابراین دو کارت فوق C^∞ـ مرتبط هستند. به همین صورت ثابت می‌شود که شش کارت فوق تشکیل یک اطلس ـ C^∞ ۲ ـ بعدی روی S^2 می‌دهند که آنرا با $\mathcal{A}$ نشان می‌دهیم.

$\overline{\mathcal{A}}$ اطلس ماکزیمالی که از اشباع نمودن $\mathcal{A}$ بدست می‌آید یک ساختار دیفرانسیل‌پذیری روی S^2 تعریف می‌کند. بنابراین S^2 یک منیفلد C^∞ ۲ـ بعدی است.

منیفلد حاصلضرب[1]

فرض کنیم M_1 و M_2 دو منیفلد از کلاس C^k با اطلس‌های C^∞، $\mathcal{A}_1$ و $\mathcal{A}_2$ باشند.آنگاه حاصلضرب $M_1 \times M_2$ به طور طبیعی دارای یک ساختار دیفرانسیل‌پذیری از کلاس C^k می‌باشد که توسط حاصلضرب اطلس‌های $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{A}_1 = \{(x_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A} \qquad \mathcal{A}_2 = \{(x_\beta, U_\beta)\}_{\beta \in B}$$
$$\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = \{x_\alpha \times x_\beta, U_\alpha \times U_\beta\}_{(\alpha,\beta)\in A\times B}$$
$$x_\alpha \times x_\beta : U_\alpha \times U_\beta \to \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$$

---

[1] *Product manifold (Variété de produit)*

نگاشت فوق دوسویی است و حوزه مقادیر آن حاصلضرب دو باز در $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ بوده لذا یک کارت است.

داریم

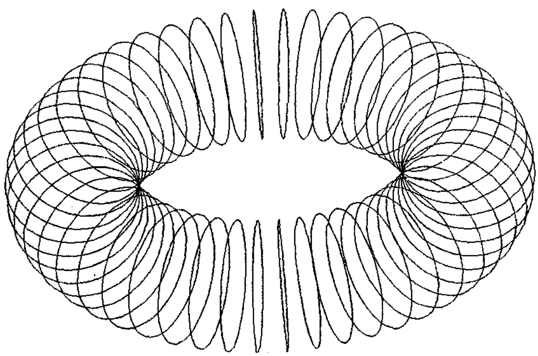
$$(x_\alpha \times x_\beta)\circ(x_{\alpha'} \times x_{\beta'})^{-1} = (x_\alpha \times x_\beta)\circ(x_{\alpha'}^{-1} \times x_{\beta'}^{-1}) = (x_\alpha \circ x_{\alpha'}^{-1} \times x_\beta \circ x_{\beta'}^{-1})$$

نگاشت تغییر کارت C^∞ است در نتیجه $M_1 \times M_2$ منیفلد C^∞ به بعد $n_1 + n_2$ است.

$$\dim(M_1 \times M_2) = \dim M_1 + \dim M_2$$

مثال ۱۰: چنبره[1] دو بعدی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T^2 = S^1 \times S^1$$



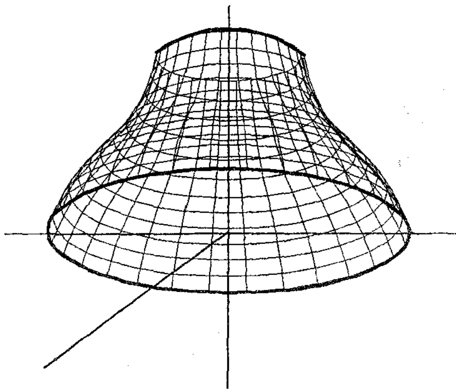
شکل ۱.۱۱ : *نمایش دوایری از چنبره*

چنبره T^2، منیفلدی دیفرانسیل‌پذیر با بعد ۲ است. برای مشخص نمودن اطلس آن ابتدا اطلس S^1 را که از دو کارت (x, U) و (x', U') تشکیل گردیده است در نظر می‌گیریم(رجوع

[1] $Torus\ (Tore)$

شود به مثال ۴). اطلس حاصلضرب $T^{۲}$ از کارت‌های $x \times x$ ، $x' \times x$، $x \times x'$ و $x' \times x'$ تشکیل می‌گردد. چون نگاشت‌های تغییر کارت از کلاس C^{∞} هستند، $T^{۲}$ از کلاس C^{∞} می‌باشد. (شکل ۱.۱۰) به همین صورت چنبره n بعدی $T^n = S^{۱} \times \cdots \times S^{۱}$ منیفلدی با بعد n می‌باشد.

مثال ۱۱: سطح دوار[1] که از حاصلضرب یک منحنی در یک دایره پدید می‌آید نیز یک منیفلد دوبعدی است. (شکل ۱.۱۲)



شکل ۱.۱۲ : نمایش خطوطی از سطح دوّار

تمرین

۱ـ با استفاده از **تصویر استریوگرافیک**[2] بشرح زیر ثابت کنید کره S^n یک منیفلد $n-$ بعدی است.

$$S^n = \{(x_{۱}, \cdots, x_{n+۱}) \in I\!R^{n+۱} | x_{۱}^{۲} + \cdots + x_{n+۱}^{۲} = ۱\}$$

ابتدا کره $S^{۲}$ را در نظر گرفته فرض کنیم $U_{۱} = S^{۲} - \{N\}$ کره بدون قطب شمال و $U_{۲} = S^{۲} - \{S\}$ کره بدون قطب جنوب باشد. تصویر استریوگرافیک نقطه p روی کره

---

[1] *Surface of revolution (Surface de revolution)*

[2] *sterographic projection (Projection stéréographic)*

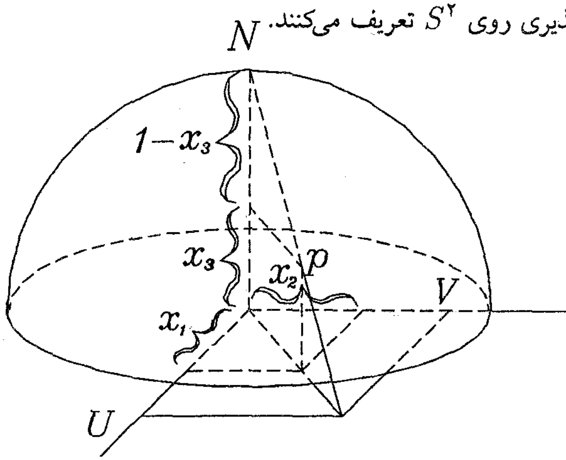
نسبت به قطب شمال و جنوب را با φ_1 و φ_2 نمایش می‌دهیم.

الف) اگر (x_1, x_2, x_3) مختصات نقطه p باشد با توجه به شکل و خواص مثلثهای متشابه ثابت کنید.

$$\varphi_1(p) = \left(\frac{x_1}{1 - x_3} \ , \ \frac{x_2}{1 - x_3}\right)$$

$$\varphi_2(p) = \left(\frac{x_1}{1 + x_3} \ , \ \frac{x_2}{1 + x_3}\right)$$

ب) نشان دهید (φ_1, U_1) و (φ_2, U_2) دو کارت C^∞ مرتبط بوده و یک ساختار دیفرانسیل‌پذیری روی S^2 تعریف می‌کنند.



شکل ۱.۱۳ : جزئیات تصویر استریوگرافی

ج) با استفاده از تصویر استریوگرافیک نسبت به قطب شمال و جنوب نشان دهید کره S^n با دو کارت (φ_1, U_1) و (φ_2, U_2) که بشرح زیر تعریف می‌شوند یک منیفلد $n-$ بعدی است.

$$U_1 = S^n - \{N\} \quad , \quad U_2 = S^n - \{S\}$$
$$\varphi_1(p) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \cdots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}}\right)$$
$$\varphi_2(p) = \left(\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \cdots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}}\right)$$

۲ـ نشان دهید هر فضای برداری حقیقی به بعد n یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر nبعدی است.

۳ـ فرض کنیم $M = GL(n$ و $\mathbb{R})$ گروه خطی ماتریس‌های حقیقی $n \times n$ (یا مجموعه تبدیلات خطی وارون‌پذیر حقیقی $\mathbb{R}^n$)باشد. نشان دهید M یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر است.

راهنمایی: چون دترمینان این ماتریس‌ها مخالف صفر است از خاصیت نگاشت پیوسته دترمینان نتیجه می‌شود که تصویر M توسط نگاشت Id در $\mathbb{R}^{n^۲}$ باز است و با یک کارت کلی M منیفلد دیفرانسیل‌پذیر می‌شود.

۴ـ با ارائه یک مثال نشان دهید عکس تمرین ۲ برقرار نیست.

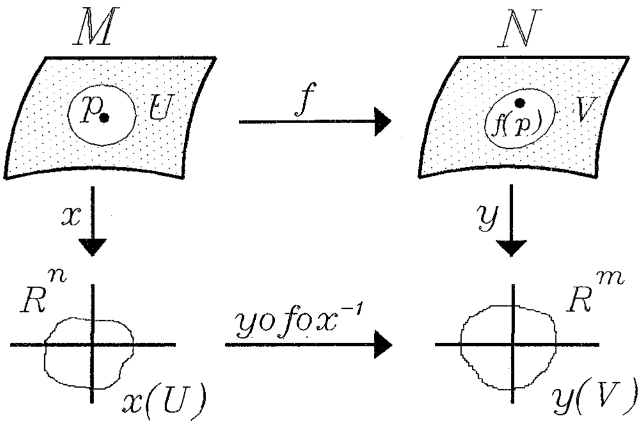
۳.۱ § توابع دیفرانسیل پذیر روی منیفلدها

یکی از مهمترین دلایل تعریف منیفلدهای دیفرانسیل‌پذیر ایجاد شرایطی روی مجموعه M بود که تحت آن شرایط ما بتوانیم روی این مجموعه تابع دیفرانسیل‌پذیر را تعریف نمائیم. در اینجا به تعریف نگاشت دیفرانسیل پذیر از یک منیفلد به منیفلد دیگر می‌پردازیم.

تعریف: *فرض کنیم M و N دو منیفلد از کلاس C^k باشند. نگاشت f از M در N را درنقطه $p \in M$، **دیفرانسیل‌پذیر از کلاس** $C^r(r \leq k)$ گوئیم اگر یک کارت موضعی (x, U) در اطلس ماکزیمال M شامل نقطه p ویک کارت موضعی (y, V) شامل نقطه $f(p)$ در اطلس ماکزیمال N موجود باشد به طوری که نگاشت زیر*

$$y \circ f \circ x^{-۱} : x(U) \subset \mathbb{R}^n \to y(V) \subset \mathbb{R}^m$$

در نقطه $x(p)$ از کلاس C^r باشد.



شکل ۱.۱۴ : *تعریف تابع دیفرانسیل‌پذیر بین دو منیفلد*

اگر f در تمام نقاط M دیفرانسیل‌پذیر باشد گوئیم **f** روی **M** **دیفرانسیل‌پذیر** است. این تعریف بستگی به انتخاب کارت‌های موضعی ندارد یعنی اگر این شرایط برای دو کارت x, y برقرار شوند برای هر دو کارت x', y' دیگری نیز برقرار خواهند بود، زیرا اگر x' و y' دو کارت دیگر در اطراف نقطه p و $f(p)$ باشند آنگاه

$$y' \circ f \circ x'^{-۱} = \underbrace{(y' \circ y^{-۱})}_{\text{از کلاس } C^k} \circ \underbrace{(y \circ f \circ x^{-۱})}_{\text{از کلاس } C^r} \circ \underbrace{(x \circ x'^{-۱})}_{\text{از کلاس } C^k}$$

در نتیجه نگاشت $y' \circ f \circ x'^{-۱}$ از کلاس C^r می‌باشد.

تعریف: نگاشت f از منیفلد M در منیفلد N را یک **دیفئومورفیسم**[۱] از کلاس C^r گوئیم *اگر f دوسویی بوده و f و $f^{-۱}$ از کلاس C^r باشند.*

اگر $r = ۰$ آنگاه f را **همئومورفیسم**[۲] می‌نامیم. براحتی ثابت می‌شود که اگر چنین نگاشتی بین دو منیفلد موجود باشد، آنگاه این دو منیفلد دارای ابعاد مساوی‌اند. باید توجه داشت که کلاس یک منیفلد C^k و کلاس نگاشتی که روی آن تعریف می‌شود C^r، ممکن

---

[۱] $C^r - diffeomorphism$

[۲] $homeomorphism$

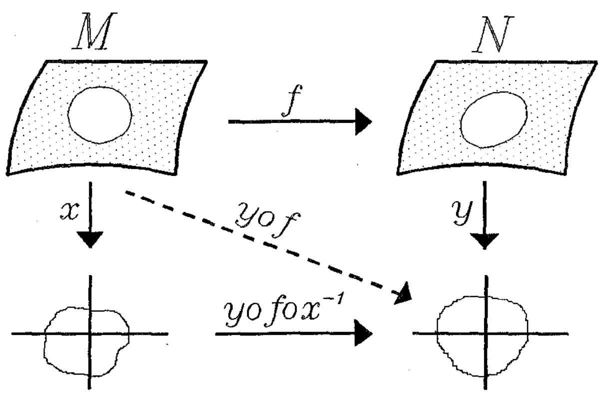
است یکی نباشد. $(r \leq k)$

قضیه: فرض کنیم M و N دو منیفلد C^k n–بعدی با اطلسهای ماکزیمال باشند و نگاشت $f : M \to N$ دو سویی باشد. آنگاه f یک دیفئومورفیسم C^r است اگر وتنها اگر تعویض اطلس نماید. به عبارت دیگر اگر وتنها اگر

$$\mathbf{y} \in \mathcal{A}(\mathbf{N}) \iff \mathbf{y} \circ \mathbf{f} \in \mathcal{A}(\mathbf{M})$$

در اینجا $\mathcal{A}(M)$ و $\mathcal{A}(N)$ اطلس‌های ماکزیمال M و N می‌باشند. $(r = k)$

اثبات: فرض کنیم شرط قضیه برقرار است. از $y \in \mathcal{A}(N)$ نتیجه شود $y \circ f \in \mathcal{A}(M)$. این بدان معنی است که $y \circ f$ یک کارت مرتبط با کارت‌های $\mathcal{A}(M)$ می‌باشد، یعنی به ازاء هر $x \in \mathcal{A}(M)$ نگاشت تغییر کارت $(y \circ f) \circ x^{-1}$ از کلاس C^r می‌باشد و بنا به تعریف f از کلاس C^r است. (چون y کارت N و x کارت M است)



شکل ۱.۱۵ : *تعویض اطلس تابع f*

همچنین از $y \circ f \in \mathcal{A}(M)$ نتیجه شود که $y \in \mathcal{A}(N)$. به ازاء هر کارت دیگر از $\mathcal{A}(M)$ مانند x نگاشت تغییر کارت $x \circ (y \circ f)^{-1}$ از کلاس C^k می‌باشد. بنابراین $x \circ f^{-1} \circ y^{-1}$ از کلاس C^k بوده و در نتیجه چون y یک کارت N است بنابه تعریف،

f^{-1} از کلاس C^r می‌باشد و لذا f دیفئومورفیسم C^r است.

عکس قضیه نیز به همین سادگی قابل بررسی می‌باشد. $\square$

مثال: فرض کنیم $M = \mathbb{R}$ همراه با کارت زیر باشد

$$\begin{aligned} x : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto t^3 \end{aligned}$$

اطلس ماکزیمال چون تک کارتی است به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\overline{\mathcal{A}'} = \{y' : U \subset M \to O \subset \mathbb{R} \text{ بازه } | C^\infty \text{ از کلاس } y' \circ x^{-1},\ x \circ y'^{-1},\ \text{ دوسویی } y'\}$$

یادآوری می‌کنیم که اطلس ماکزیمال $\overline{\mathcal{A}'}$ با اطلس ماکزیمال $\overline{\mathcal{A}}$ وابسته به اطلس $\mathcal{A} = Id$ که در مثال بخش قبل بر روی $\mathbb{R}$ تعریف گردید متفاوت است زیرا $Id \notin \overline{\mathcal{A}}'$ (در حقیقت $Id \circ x^{-1}$ نگاشت $t \mapsto \sqrt[3]{t}$ است که در نقطه $t = 0$ مشتق‌پذیر نیست لذا Id نمی‌تواند متعلق به اطلس ماکزیمال $\overline{\mathcal{A}'}$ باشد). به این نحو روی $\mathbb{R}$ دو **اطلس ماکزیمال** متفاوت یا **دو ساختاردیفرانسیل پذیری** مختلف تعریف نمودیم. با این حال اگر چه این دو اطلس ماکزیمال متفاوت هستند اما با یکدیگر دیفئومورف می‌باشند (یعنی یک دیفئومورفیسم بین آنها وجود دارد)زیرا یک نگاشت دوسویی مانند f بین دو اطلس وجود داردکه تعویض اطلس نموده یا به طور معادل اطلسها را به یکدیگر تبدیل می‌نماید. به عبارت دیگر

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, \overline{\mathcal{A}'}) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}, \overline{\mathcal{A}}) \\ x \downarrow & \searrow & \downarrow y \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{Id} & \mathbb{R} \end{array}$$

در حقیقت اگر فرض کنیم $f(t) = t^3$ چون f دوسویی است، با توجه به قضیه قبل داریم

$(y \circ f) \circ x^{-1} \Rightarrow$ و $x \circ (y \circ f)^{-1}$ از کلاس C^∞ هستند $\Rightarrow y \circ f \in \overline{\mathcal{A}'}$

$y \circ Id \Rightarrow y \in \overline{\mathcal{A}}$ و $Id \circ y^{-1}$ از کلاس C^∞ هستند (چون $x = f$)

چون روابط فوق برگشت‌پذیر می‌باشند بنابر قضیه بالا f یک دیفئومورفیسم (نسبت به دو اطلس فوق الذکر)می‌باشد.

تذکر ۱: *باید توجه داشت که در مثال بالا f ممکن است برای ساختارهای دیفرانسیل‌پذیری دیگر دیفئومورفیسم نباشد به عنوان مثال اگر روی دومنیفلد بالا اطلس $A = Id$ تعریف شده باشد آنگاه معکوس f در صفر مشتق پذیر نبوده و در نتیجه f دیفئومورفیسم نیست. بنابراین مفهوم* **دیفرانسیل‌پذیری یک تابع بر روی یک منیفلد بستگی به اطلس ماکزیمال یا ساختار دیفرانسیل‌پذیری منیفلد دارد.** *در روی $\mathbb{R}^n$ غالباً ساختار دیفرانسیل‌پذیری طبیعی (یعنی اطلسی که توسط نگاشت همانی تعریف می‌شود) را در نظر می‌گیرند.*

تذکر ۲: *در مثال بالا f دیفئومورفیسم بوده و دو ساختار دیفرانسیل‌پذیری فوق روی $\mathbb{R}$ با تقریب یک دیفئومورفیسم با هم برابر می‌باشند.*

حال در اینجا با مسئله طبقه بندی نمودن ساختارهای دیفرانسیل‌پذیری[1] C^∞ با تقریب یک دیفئومورفیسم مواجه می‌شویم. بعداً خواهیم دید که هر ساختار دیفرانسیل‌پذیری روی M یک توپولوژی روی M ایجاد می‌کند که آنرا توپولوژی ذاتی خواهیم نامید.

در مورد $M = \mathbb{R}^n$ و $(n \neq ۴)$ می‌توان نشان داد که تمام ساختارهای دیفرانسیل پذیری که همان توپولوژی $\mathbb{R}^n$ را ایجاد می‌کنند با ساختار دیفرانسیل‌پذیر طبیعی (یعنی اطلسی که توسط نگاشت همانی $A = Id$ تعریف می‌شود) دیفئومورف می‌باشند. اما اگر $n = ۴$ باشد توسط دونالدسون[2] ثابت شده است که روی $\mathbb{R}^۴$ ساختارهای دیفرانسیل پذیر C^∞ غیر دیفئومورف نیز وجود دارند که توپولوژی آنها همان توپولوژی ذاتی $\mathbb{R}^۴$ است. اخیراً اثبات گردیده است که مجموعه ساختارهای غیر دیفئومورف روی $\mathbb{R}^۴$ نامتناهی و ناشمارا نیز می‌باشند.

در اینجا مشاهده می‌شود که $\mathbb{R}^۴$ با $\mathbb{R}^n$ به ازاء $n \neq ۴$ تفاوت فاحش دارد. به همین دلیل است که بخش عظیمی از تحقیقات هندسه به مطالعه منیفلدهای چهاربعدی اختصاص یافته است. این تحقیقات نشان می‌دهد که بعد چهارم دارای خواص فوق‌العاده و غیرعادی

[1] *Classification of Differential Structure*

[2] *Donaldson*

است و فضای چهار بعدی مکان و زمان در فیزیک کاربرد فراوان دارد.

اما در مورد کره با بُعد $n \leq ۶$ فقط یک نوع ساختار دیفرانسیل‌پذیری (با تقریب یک دیفئومورفیسم) وجود دارد. در روی $S^{۷}$، ۲۸ نوع ساختار دیفرانسیل‌پذیری و در روی $S^{۳۱}$ بیش از شانزده میلیون ساختار دیفرانسیل‌پذیری وجود دارد. این نتایج توسط میلنر[۱] بدست آمده‌اند. همانطوریکه مشاهده می‌شود مسئله طبقه‌بندی ساختارهای دیفرانسیل‌پذیری یک مسئله باز بوده و فقط در موارد معدودی تعداد آن مشخص شده است.

۴.۱ § یادآوری قاعده زنجیره‌ای[۲] در $I\!R^n$ و بیان آن برای منیفلدها

در این بخش ابتدا قاعده زنجیره‌ای در روی $I\!R^n$ را یادآوری نموده سپس آنرا برای منیفلدها تعمیم می‌دهیم. فرض کنیم $f : I\!R^n \to I\!R$ یک تابع حقیقی باشد مشتقات جزئی تابع f را با $D_i f$ نشان داده به صورت زیر تعریف می‌نماییم

$$(D_i f)(a) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(a^{۱}, \cdots, a^i + h, \cdots, a^n) - f(a)}{h}$$

اگر $f : I\!R^n \to I\!R$ و $g : I\!R^m \to I\!R^n$ باشد آنگاه مشتقات جزئی تابع مرکب $f \circ g$ از قاعده زنجیره‌ای به دست می آید .این مشتقات را می‌توان در رابطه زیر خلاصه نمود :

قاعده زنجیره‌ای $D_i(f \circ g)(a) = \sum_{j=۱}^{n} D_j f(g(a)) \cdot (D_i g^j)(a)$

که در آن g^jها مولفه‌های تابع gبوده که از رابطه زیر بدست می‌آیند.

$$g : I\!R^m \longrightarrow I\!R^n$$

$$g : x = (x_{۱}, \cdots, x_m) \mapsto (g^{۱}(x), \cdots, g^n(x))$$

$$j = ۱, \cdots, n, \; i = ۱, \cdots, m$$

---

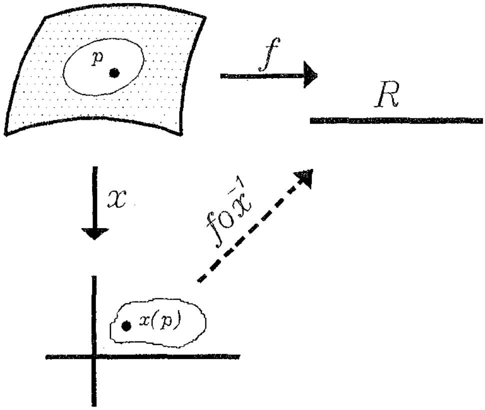
[۱] مراجعه شود به [۲۱]، [۲۲] و [۲۳] *Milnor*

[۲] *Chain rule*

حال می‌خواهیم قاعده زنجیره‌ای را برای توابع تعریف شده روی منیفلدها تعمیم دهیم. برای اینکار باید از وجود کارت‌های موضعی استفاده کنیم. امّا قبل از این کار به بیان چند تعریف و قرارداد نمادگذاری می‌پردازیم.

نگاشت f از منیفلد M در مجموعهٔ اعداد حقیقی را یک **تابع حقیقی روی** M می‌نامیم.

جبر توابع $\mathbf{C}^\infty$ در نقطه p از منیفلد M یا مجموعه توابع حقیقی C^∞ از یک همسایگی $p \in M$ در $I\!R$ را با $C^\infty(p)$ نشان می‌دهیم. فرض کنیم $f \in C^\infty(p)$



شکل ۱.۱۶ : تابع حقیقی روی یک منیفلد

در اینجا اگر احتمال اشتباه نرود از نماد $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ جهت نشان دادن مشتقات جزئی $f \circ x^{-1}$ استفاده می‌کنیم.

نمادگذاری: $\boxed{\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{(p)} = D_i(f \circ x^{-1})(x(p))}$

حال با استفاده از کارت‌ها، قاعده زنجیره‌ای را برای منیفلدها بیان می‌کنیم.

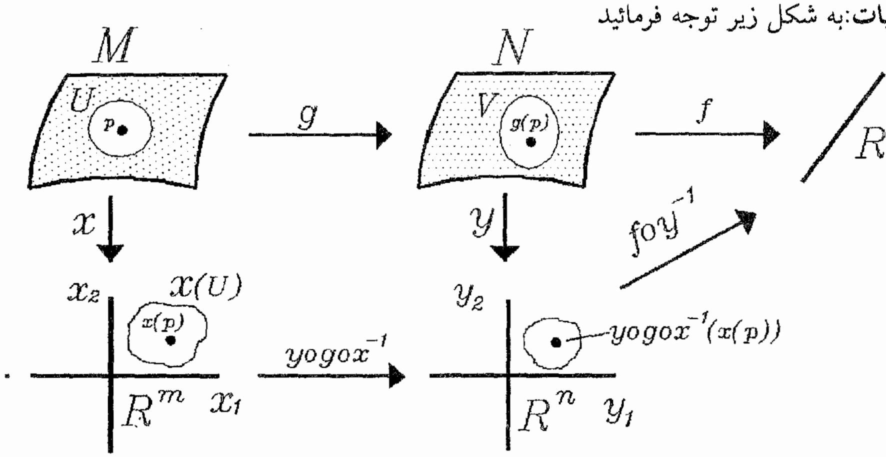
لم: فرض کنیم $g : M \to N$ و $f : N \to I\!R$ و $f \circ g \in C^\infty(p)$ **در این صورت**

اگر x و y کارت‌هایی روی M و N حول p و $g(p)$ باشند، داریم

$$\boxed{\frac{\partial(f\circ g)}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial y^j}\right)_{g(p)} \left(\frac{\partial g^j}{\partial x_i}\right)_p}$$

که در آن $g^j = y^j \circ g$.

اثبات: به شکل زیر توجه فرمائید



شکل ۱.۱۷ : ترکیب دو تابع روی منیفلدها

داریم :

$$\frac{\partial(f\circ g)}{\partial x_i}(p) = D_i((f\circ y^{-1})\circ(y\circ g\circ x^{-1}))_{(x(p))}$$

با استفاده از قاعده زنجیره‌ای در $\mathbb{R}^n$ داریم

$$\frac{\partial(f\circ g)}{\partial x_i}(p) = \sum_{j=1}^{n} D_j(f\circ y^{-1})_{(yogox^{-1})(x(p))} D_i(y^j\circ g\circ x^{-1})_{x(p)}$$
$$i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n$$

با استفاده از نمادگذاری فوق داریم

$$\frac{\partial(f\circ g)}{\partial x_i}(p) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial y^j}\right)_{g(x^{-1}(x(p)))} \left(\frac{\partial(y^j\circ g)}{\partial x_i}\right)(p)$$

اگر قرار دهیم $g^j = y^j \circ g$ حکم ثابت می‌شود. □

تمرین:

۱ـ نشان دهید اگر (x, U) و (y, V) دو کارت روی منیفلد M بوده و f تابع حقیقی $f : M \to \mathbb{R}$ باشد، آنگاه در $U \cap V$ رابطه بین مشتقات جزئی f در کارت‌های x و y عبارت است از

$$(\frac{\partial f}{\partial x_i})_p = \sum_{j=1}^{n} (\frac{\partial y_j}{\partial x_i}) \frac{\partial f}{\partial y_j}$$

در اینجا ماتریس $(\frac{\partial y_j}{\partial x_i})$ را **ماتریس ژاکوبین‌تغییر** مختصات و دترمینان آنرا **ژاکوبین**[1] تغییر مختصات می‌نامند.

۲ـ نشان دهید تابع $f : M \to N$ دیفرانسیل‌پذیر است اگر وتنها اگر برای هر تابع دیفرانسیل‌پذیر $g : N \to \mathbb{R}$ تابع $g \circ f$ دیفرانسیل‌پذیر باشد.

۵.۱ § توپولوژی منیفلدها

I توپولوژی ذاتی[2]

توپولوژی ذاتی (یا توپولوژی وابسته به اطلس) روی منیفلد M در حقیقت توپولوژی است که توسط حوزه تعریف کارت‌ها روی M تعریف می‌شود. به عبارت دیگر در اینجا نشان می‌دهیم که خانواده حوزه تعریف تمام کارت‌های M دراطلس ماکزیمال تشکیل یک توپولوژی روی M می‌دهند.

براین اساس می‌توان منیفلدها را به عنوان فضاهای توپولوژیکی تعریف نموده آنها را مورد مطالعه قرارداد.

گزاره ۱: فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر، زوج (x, U) یک کارت روی M و

---

[1] *Jacobian*

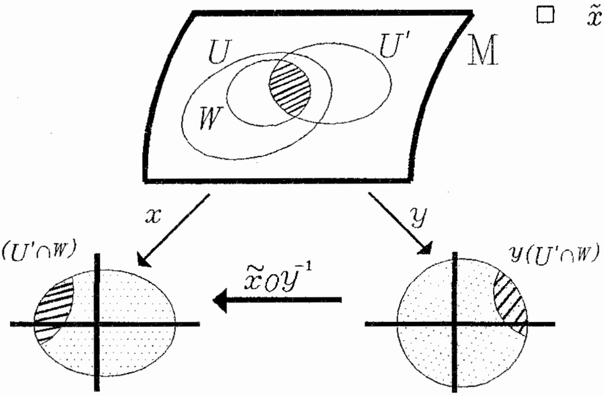
[2] *Intrinsic Topology (Topologie intrinseque)*

$W \subset U$ اگر $x(W)$ بازی از $I\!R^n$ باشد، آنگاه زوج $(x|_W, W)$ نیز یک کارت روی M از همان اطلس ماکزیمال است.

اثبات: فرض کنیم A یک اطلس از M باشد باید نشان دهیم که اگر $\tilde{x} = x|_W$ آنگاه $\tilde{x}$ متعلق به اطلس ماکزیمال $\overline{A}$ است. به عبارت دیگر نشان می‌دهیم که $\tilde{x}$ با تمام کارت‌های A C^k-مرتبط می‌باشد بدین منظور لازم است ثابت کنیم برای هر کارت (y, U') از $\mathcal{A}$ نگاشت تغییر کارت $\tilde{x} \circ y^{-1}$ و $y \circ \tilde{x}^{-1}$ از کلاس C^k بین دو باز از $I\!R^n$ می‌باشند. اگر $y \in A$ داریم

$$\tilde{x} \circ y^{-1} = x \circ y^{-1}|_{y(U' \cap W)} \quad \text{و} \quad y \circ \tilde{x}^{-1} = y \circ x^{-1}|_{x(U' \cap W)}$$

چون $x \circ y^{-1}$ یک دیفئومورفیسم C^k است، $\tilde{x} \circ y^{-1}$ و $y \circ \tilde{x}^{-1}$ نیز دیفئومورفیسم‌های C^k می‌باشند. حال کافی است ثابت کنیم که $x(U' \cap W)$ و $y(U' \cap W)$ باز هستند. چون کارت های (x, U) و (y, U') مرتبط C^k می‌باشند $x(U \cap U')$ باز می‌باشد و از طرف دیگر بنابر فرض $x(W)$ باز است لذا $x(U \cap U') \cap x(W) = x(U \cap U' \cap W) = x(U' \cap W)$ باز بوده، به همین صورت $y(U' \cap W)$ باز می‌باشد زیرا تصویر $x(U' \cap W)$ است و در نتیجه $\tilde{x} \in \overline{\mathcal{A}}$ $\square$



شکل ۱.۱۸ : تحدید یک کارت نیز می‌تواند تحت شرایطی یک کارت باشد

گزاره ۲ : اگر M منیفلدی به بعد n ازکلاس C^k باشد آنگاه M دارای یک توپولوژی است که اعضای پایه آنرا گردایه حوزه تعریف کارت‌های اطلس ماکزیمال M تشکیل می‌دهند.

این توپولوژی را توپولوژی ذاتی یا توپولوژی وابسته به اطلس نامیده آنرا توسط $\mathcal{T}_M$ نمایش می‌دهیم. گاهی اوقات توپولوژی وابسته به اطلس را توپولوژی کانونی نیز می‌نامند.

اثبات: در اینجا باید شرایط پایه توپولوژی را بشرح زیر تحقیق کنیم. فرض کنیم $\mathcal{A}$ مجموعهٔ حوزه‌های تعریف کارت‌ها باشد درستی روابط زیر را بررسی می‌نمائیم.

I اجتماع همه اعضای $\mathcal{A}$ برابر M است.

II اشتراک هر دو عضو $\mathcal{A}$ در $\mathcal{A}$ باشد

طبق خاصیت اطلس I بخودی خودبرقرار خواهد شد. برای شرط II ابتدا نشان می‌دهیم که اگر U, V حوزه تعریف دو کارت (y, V) و (x, U) بافرض $U \cap V \neq \phi$ روی M باشند، آنگاه $U \cap V$ نیز حوزه تعریف کارت دیگری روی M است.

می‌دانیم نگاشت تغییر کارت زیر نگاشت C^k از بازی در $\mathbb{R}^n$ در باز دیگری در $\mathbb{R}^n$ می‌باشد

$$y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow y(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$$

لذا $x(U \cap V)$ بازی در $\mathbb{R}^n$ می‌باشد و بنا بر گزاره قبل $(x|_{U \cap V}, U \cap V)$ یک کارت با حوزه تعریف $U \cap V$ روی M می‌باشد. به این ترتیب $\mathcal{A}$ یک پایه توپولوژی است که توپولوژی پدید آمده آن، $\mathcal{T}_M$ یک توپولوژی روی M تعریف می‌نماید. $\square$

یادآوری می‌کنیم که پایه توپولوژی خانواده‌ای است مانند $\mathcal{B}$ از زیر مجموعه‌های M که M را می‌پوشاند و در شرط زیر صدق می‌کند

$$\forall U, V \in \mathcal{B} \; \forall p \in U \cap V \quad \exists W \in \mathcal{B} \quad p \in W \subset U \cap V$$

لذا همان طور که در بالا دیدیم برای اثبات پایه بودن کافی است نشان دهیم اشتراک غیرتهی $U \cap V \neq \phi$ حوزه تعریف هر دو کارت M، حوزه تعریف کارت دیگری روی M می‌باشد.

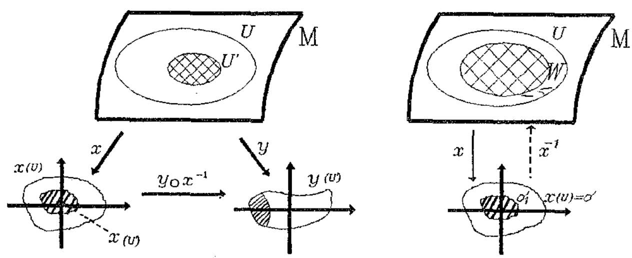
موضوع دیگری که باید در نظر داشت آن است که بنابر آنچه گذشت **اشتراک حوزه تعریف دو کارت حوزه تعریف یک کارت می‌باشد، اما اجتماع حوزه تعریف دو کارت الزاماً حوزه تعریف یک کارت نخواهد بود.** به عنوان مثال نقض در این مورد کره را با تصویر

استریوگرافیک در نظر می‌گیریم. اجتماع دو حوزه تعریف کارتهای مربوط به قطب شمال و جنوب نمی‌تواند دامنه یک کارت باشد.

گزاره ۳: فرض کنیم (x, U) یک کارت روی M باشد نگاشت x یک همئومورفیسم نسبت به توپولوژی ذاتی است.

اثبات: چون x دوسویی است برای آنکه همئومورفیسم باشد کافی است نشان دهیم $x : U \to \sigma \subset I\!R^n$ (برای توپولوژی ذاتی) پیوسته وباز می‌باشد. فرض کنیم $\sigma_۱$ بازی از $I\!R^n$، $\sigma_۱ \subset \sigma$ و $W = x^{-۱}(\sigma_۱)$ باشد. چون $x(W) = \sigma_۱$ بازی است از $I\!R^n$ بنابر گزاره ۱ $(x|_W, W)$ یک کارت روی M بوده و W بازی از M می‌باشد (برای توپولوژی ذاتی). بنابراین x پیوسته است. شکل الف. حال نشان می‌دهیم x باز می‌باشد.

ابتدا U' بازی از اعضای پایه توپولوژی وابسته به اطلس‌ها $(U' \subset U)$را در نظرگرفته نشان می‌دهیم $x(U')$ باز است. U' حوزه تعریف کارتی مانند y می‌باشد و نگاشت تغییر کارت عبارت است از



شکل ۱.۱۹ : هر کارت یک همئومورفیسم است

$$y \circ x^{-۱} : x(U \cap U') \to y(U \cap U')$$

که دیفئومورفیسمی بین دو باز $I\!R^n$ است.شکل (ب). به همین صورت

$$y \circ x^{-۱} : x(U') \to y(U')$$

دیفئومورفیسمی بین دو باز$I\!R^n$ است. بنابراین $x(U')$ بازی از $I\!R^n$ می‌باشد. حال فرض کنیم $V = \cup U'_i$ بازی از M برای توپولوژی وابسته به اطلسها باشد به طوری که U'_iها از

اعضای پایه این توپولوژی بوده و $V \subset U$ باشد نشان می‌دهیم $x(V)$ باز است.

$$x(V) = x(\cup U'_i) = \cup x(U'_i)$$

بنابر اثبات قسمت قبل $x(U'_i)$ ها باز هستند، لذا $x(V)$ باز می‌باشد و در نتیجه x یک نگاشت باز است. $\square$

تذکر ۱: *با استفاده از نتایج بدست آمده در این بخش می‌توان منیفلدها را به صورت معادل زیر نیز تعریف نمود.*

تعریف منیفلد توپولوژیک: *فرض کنیم M یک فضای توپولوژیک باشد، می‌گوییم M یک* **منیفلد از کلاس C°** *(یا* **منیفلد توپولوژیک***) با بعد n است، اگر هر نقطه از آن دارای یک همسایگی در M بوده که با بازی از $I\!R^n$ همئومورف باشد.*

در اینجا اگر $p \in U$ و $U \subset M$ باشد، زوج (x, U) را یک کارت موضعی در همسایگی p گویند بشرط آنکه x همئورفیسمی از U در σ، بازی از $I\!R^n$ باشد.

تذکر ۲: *تعریف اخیر دارای این برتری است که خاصیت اساسی منیفلدها یعنی موضعاً همئومورف بودن با $I\!R^n$ را در مرحله اول معرفی می‌نماید. اما تعریفی که در ابتدای این فصل آوردیم از جهت کاربرد عملی‌تر است و برای آنکه ثابت کنیم مجموعه‌ای یک منیفلد است احتیاج به آن نداریم که توپولوژی داشتن آن را بررسی نمائیم بلکه این خاصیت بخودی خود با ارائه نمودن حوزه تعریف کارت‌ها تحقق می‌یابد.*

به عنوان نتیجه‌ای از گزاره ۳ می‌توان قضیه زیر را بیان نمود.

قضیه ۱: فرض کنیم $f : M \longrightarrow N$ یک نگاشت دیفرانسیل‌پذیر از کلاس C^r باشد،آنگاه f پیوسته است. (برای توپولوژی ذاتی M و N)

اثبات: فرض کنیم (x, U) و (y, V) کارت‌های M و N باشند بنابرتعریف نگاشت $F = y \circ f \circ x^{-1}$ دیفرانسیل‌پذیر از کلاس C^r می‌باشد (بعنوان نگاشتی از $I\!R^n$ در $I\!R^m$) بنابراین F برای توپولوژی طبیعی $I\!R^m$ و $I\!R^n$ پیوسته است. چون x و y بنابر گزاره ۳ همئومورفیسم‌هائی (نسبت به توپولوژی ذاتی M و N و توپولوژی طبیعی $I\!R^n$ و $I\!R^m$) می‌باشند نگاشت f، $f = y^{-1} \circ F \circ x$ پیوسته می‌باشد (برای توپولوژی وابسته

به اطلس‌های M و N). $\square$

تذکر ۳: *سؤالی که به طور طبیعی با آن مواجه می‌شویم از اینقرار است:*

«فرض کنیم M یک فضای توپولوژیک با توپولوژی $\mathcal{T}$ باشد، می‌خواهیم روی M ساختار یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر (اطلس ماکزیمال) تعریف نمائیم، تحت چه شرایطی توپولوژی وابسته به اطلسها $\mathcal{T}_M$ برابر توپولوژی $\mathcal{T}$ می‌گردد.»

بنابر گزاره ۳ اگر $\mathcal{T} = \mathcal{T}_M$ کارت‌ها، همئومورفیسم‌هایی نسبت به $\mathcal{T}$ می‌باشند. عکس این موضوع را درگزاره بعد ثابت می‌نمائیم، به این صورت که اگر کارت‌های **فقط یک اطلس** همئومورفیسم‌هایی نسبت به $\mathcal{T}$ باشند آنگاه $\mathcal{T} = \mathcal{T}_M$ (در اینجا لازم نیست که این فرض برای تمام اطلس‌ها مشمول اطلس ماکزیمال برقرار باشد)

گزاره ۴:*فرض کنیم $(M, \mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد، همچنین فرض کنیم که M دارای ساختار یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر بوده و $\mathcal{T}_M$ توپولوژی وابسته به اطلسهای آن باشد آنگاه شرط لازم و کافی برای آنکه $\mathcal{T} = \mathcal{T}_M$ باشد آن است که یک اطلس روی M موجود بوده که نگاشت کارت‌های آن نسبت به $\mathcal{T}$ همئومورفیسم باشد.*

اثبات: شرط لازم قبلاً اثبات گردیده است در اینجا به اثبات شرط کافی می‌پردازیم. فرض کنیم که کارت‌های یک اطلس $\mathcal{A}$ روی M نسبت به $\mathcal{T}$ همئومورفیسم باشند. ابتدا ثابت می‌کنیم که $\mathcal{T}_M \subset \mathcal{T}$ فرض کنیم $U \in \mathcal{T}_M$ (یعنی بازی از توپولوژی وابسته به اطلس‌ها) و (x, W) یک کارت از $\mathcal{A}$باشد به طوری که $W \cap U \neq \phi$.

چون W بازی از $\mathcal{T}_M$ است $W \cap U \in \mathcal{T}_M$، بنابراین چون x یک همئومورفیسم نسبت به $\mathcal{T}_M$است $x(W \cap U)$ بازی از $\mathbb{R}^n$ می‌باشد. اما چون بنابرفرض x یک همئومورفیسم نسبت به $\mathcal{T}$ می‌باشد، $W \cap U \in \mathcal{T}$. حال $U = \cup_{p \in U}(W_p \cap U)$ که در آن W_p کارت‌هایی در همسایگی p می‌باشند. بنابراین U اجتماع بازها بوده و $U \in \mathcal{T}$ می‌باشد، در نتیجه $\mathcal{T}_M \subset \mathcal{T}$.

حال ثابت می‌کنیم که $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_M$.فرض کنیم $U' \in \mathcal{T}$ و (x, W) کارتی از$\mathcal{A}$ باشد به طوری که $U' \cap W \neq \phi$. چون $W \in \mathcal{T}_M$ بنابر مطالب بالا $W \in \mathcal{T}$ در نتیجه $U' \cap W \in \mathcal{T}$. از طرف دیگر بنابر فرض همئومورفیسم بودن x نسبت به

$\mathcal{T}$، $x(U' \cap W)$ بازی از $\mathbb{R}^n$ است، چون x یک همئومورفیسم نسبت به $\mathcal{T}_M$ می‌باشد $U' \cap W \in \mathcal{T}_M$. حال چون U' اجتماع مجموعه‌هایی مانند $U' \cap W$ می‌باشد، $U' \in \mathcal{T}_M$، در نتیجه داریم $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_M$. $\square$

تذکر ۴: منظور از یک منیفلد صفربعدی مجموعه‌ای است که همه نقاط آن نقاط تنها هستند یعنی توپولوژی آن توپولوژی گسسته است.

IIـ فضای توپولوژیک هاسدرف[1]

در اینجا در ادامه این بخش به مطالعه برخی از خواص توپولوژیکی منیفلدها می‌پردازیم. تاکنون ما هیچگونه شرطی روی توپولوژی یک منیفلد قرار ندادیم، اما غالباً لازم است شرایط زیر را بدان اضافه نمائیم.

الف) شرط هاسدرف: یک فضای توپولوژیک را **هاسدرف** گوئیم اگربرای هر دو نقطه متمایز آن همسایگی‌هایی از این دو نقطه موجود باشند که یکدیگر را قطع نکنند. شرط هاسدرف بودن توپولوژی یک منیفلد برای اثبات یکتایی حد دنباله‌های همگرا روی منیفلدها ضروری است، از اینرو اغلب اوقات منیفلدها را هاسدرف فرض می‌نمائیم. اما این موضوع تأیید کننده آن نیست که الزاماً توپولوژی منیفلدها باید هاسدرف باشد و براحتی می‌توان منیفلدهایی مثال زد که این توپولوژی هاسدرف نباشند. ([۲] بخش ۲.۲.۱۰.۴ یا [۵] صفحه ۵ [۲])

ب) شرط پایه شمارا:[2] اگر M را بتوان توسط تعدادی شمارا از کارت‌ها پوشانید می‌گوئیم M دارای پایه شمارا است.

شرط پایه شمارا داشتن یک منیفلد جهت وجود یک افراز واحد دیفرانسیل‌پذیر بر روی آن الزامی است، در پیوست فصل ۲ به مطالعه دقیقتر این موضوع می‌پردازیم.

> **توجه**: نظر به اهمیت شرط هاسدرف بودن از این به بعد کلیه **منیفلدها را هاسدرف** و **دارای پایه شمارا** فرض می‌نمائیم، مگر آنکه عکس آن تصریح گردد.

---

[1] *Hausdorff*

[2] *Countable basis (base dénombrable)*

فضای توپولوژیک M را **موضعاً فشرده**[۱] گوییم اگر برای هرنقطه p از M و هرهمسایگی U ازp یک همسایگی فشرده از p مانند K موجود باشد به طوری که $K \subset U$ باشد.
فضای توپولوژیک M را **موضعاً همبند**[۲] گوئیم اگر برای هر نقطه p از M و هرهمسایگی U از p یک همسایگی همبند مانند V از p موجود باشد به طوری که $V \subset U$ باشد.

قضیه ۲: هر منیفلد M یک فضای توپولوژیک موضعاً فشرده است.
اثبات: فرض کنیم $p \in M$ و(x, U)یک کارت در همسایگی p باشد. بنابر گزاره ۳، x یک همئومورفیسم از U روی $x(U)$، همسایگی $x(p)$ است. چون $I\!R^n$ موضعاً فشرده است یک همسایگی فشرده K از $x(p)$ در $I\!R^n$ موجود است به طوری که $x(p) \in K \subset x(U)$. حال می‌گوئیم چون x^{-1} پیوسته است و نگاشت پیوسته فشردگی را حفظ می‌نماید بنابراین $x^{-1}(K)$ یک همسایگی فشرده از p در U می‌باشد، لذا بنابر تعریف M موضعاً فشرده است. □

قضیه ۳: هر منیفلد M، موضعاً همبند است. (در این قضیه M الزاماً هاسدرف نیست)
اثبات: فرض کنیم $p \in M$ بوده و (x, U) یک کارت در همسایگی p باشد. چون $I\!R^n$ موضعاً همبند است هر همسایگی $x(U)$ از $x(p)$ شامل یک همسایگی همبند V از$x(p)$ می‌باشد به طوری که $x(p) \in V \subset U$. حال چون x^{-1} پیوسته است و نگاشت پیوسته همبندی را حفظ می‌نماید، $x^{-1}(V)$ یک همسایگی همبند از p در U می‌باشد.لذا بنابر تعریف M موضعاً همبند است. □

---
[۱] *Locally Compact (Locallement Compact)*
[۲] *Locally Connected (Locallement Connexe)*

به همین صورت می‌توان خواص دیگری از جمله معادل بودن **همبندی**[۱] و **همبندی مسیری**[۲] را برای منیفلدها ثابت کرد.

گزاره ۵: فرض کنیم $f : M \to N$ دیفرانسیل‌پذیر بوده و U زیرمجموعه بازی از M باشد. در این صورت $f|_U$ نیز دیفرانسیل‌پذیر است.

اثبات این گزاره براحتی با استفاده از تعریف دیفرانسیل پذیری درنقطه p صورت گرفته به عنوان تمرین واگذار می‌گردد. (می‌دانیم هر زیرمجموعهٔ باز از M یک منیفلد است.)

گزاره ۶: اگر $f : M \to N$ دیفئومورفیسم بوده و U زیرمجموعه بازی از M باشد. آنگاه $f|_U$ نیز یک دیفئومورفیسم بین U و $f(U)$ می‌باشد.

اثبات این گزاره با استفاده از گزاره قبل صورت گرفته به عنوان تمرین واگذار می‌گردد.

گزاره ۷: فرض کنیم $g : M \to N$ و $f : N \to P$ دیفرانسیل‌پذیر باشند آنگاه $f \circ g$ دیفرانسیل‌پذیر می‌باشد. اگر f و g دیفئومورفیسم باشند $f \circ g$ نیز دیفئومورفیسم می‌باشد.

اثبات این گزاره با استفاده از تعریف دیفرانسیل‌پذیری در یک نقطه و خاصیت دیفرانسیل‌پذیر بودن ترکیب دو تابع دیفرانسیل‌پذیر در $\mathbb{R}^n$ صورت گرفته به عنوان تمرین واگذار می‌گردد.

تمرین:

۱ـ گزاره ۵ و ۶ را ثابت کنید.

۲ـ گزاره ۷ را ثابت کنید.

۳ـ فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر به بعد n باشد.

الف ـ نشان دهید هر کارت M یک دیفئومورفیسم از حوزه تعریف آن به تصویرش می‌باشد.

ب ـ نشان دهید هر دیفئومورفیسم از یک زیر مجموعه باز M در زیر مجموعه باز $\mathbb{R}^n$ یک کارت M است.

۴ـ ثابت کنید اگرمنیفلد توپولوژیک M همبند باشد آنگاه بعد M به کارت‌های M

---

[۱] *Connected (Connexe)*

[۲] *Connected by arc (Connexe par arc)*

بستگی ندارد و مقداری ثابت است.

راهنمایی: از قضیه پایایی دامنه[1] بشرح زیر استفاده کنید (اثبات این قضیه در کتب توپولوژی موجود است)

قضیه: اگر U بازی از $\mathbb{R}^n$ بوده و $f : U \to \mathbb{R}^n$ پیوسته و یک به یک باشد آنگاه $f(U)$ باز است.

به عبارت دیگر از این قضیه نتیجه می‌شود به ازاء هر باز $V \subset U$، $f(V)$ باز بوده و در نتیجه f^{-1} پیوسته می‌شود، لذا f همئومورفیسم است، و همئومورفیسم‌ها بُعد حوزه تعریف را حفظ می‌کنند. این تمرین را می‌توان با استفاده از گزاره ۳ نیز اثبات نمود.

۵ـ سهمی $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = x^2\}$ را در نظر می‌گیریم

الف) با ارائه یک کارت کلی و اطلس تک کارتی مربوط به آن، نشان دهید سهمی یک منیفلد توپولوژیک یک بُعدی است. سپس اینکار را توسط یک اطلس ۲ــ کارتی انجام دهید.

ب) نشان دهید که سهمی یک منیفلد دیفرانسیل پذیر از کلاس C^∞ است.

راهنمایی: توجه نمایید که از تعریف جدید منیفلد مذکور در تمرین (۳) نمی‌توان این موضوع را تحقیق نمود، زیرا نگاشت حقیقی دیفرانسیل‌پذیر روی سهمی تنها پس از اثبات منیفلد دیفرانسیل‌پذیر بودن سهمی، قابل تعریف است.

ج) بجای سهمی فوق دو پاره خط متقاطع $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = |x|\}$ را در نظر گرفته به سؤالات زیر با ذکر دلیل پاسخ دهید.

Iـ آیا N منیفلد توپولوژیک است؟

IIـ آیا N با یک اطلس مناسب یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر است؟

۶ـ فرض کنیم M یک منیفلد ۲ــبعدی (یک رویه) در $\mathbb{R}^3$ باشد.

الف) نشان دهید اشتراک گوی‌های باز $\mathbb{R}^3$ با M یک توپولوژی روی M تعریف می‌نماید. این توپولوژی را **توپولوژی القایی**[1] $\mathbb{R}^3$ روی M می‌نامیم و با $T_M^{\mathbb{R}^3}$ نشان

[1] *Invariance of domain*

[1] *Induced Topology (Topologie induit)*

می‌دهیم.

$$\mathcal{T}_M^{I\!R^3} = \{U | U = \mathcal{B} \cap M \text{ و } \mathcal{B} \in \mathcal{T}_{I\!R^3}\}$$

در اینجا $\mathcal{T}_{I\!R^3}$ توپولوژی طبیعی $I\!R^3$ است که از گوی‌های باز به‌دست آمده است.

ب) مثالی از یک رویه بزنید که توپولوژی ذاتی و القایی آن برهم منطبق شوند.

ج) مثالی از یک رویه بزنید که توپولوژی ذاتی و القایی آن برهم منطبق نباشند.

پیوست I: یادآوری چند تعریف و قضیه از آنالیز ریاضی

مقدمه

در این فصل به یادآوری چند تعریف و قضیه در آنالیز ریاضی می‌پردازیم. در این کتاب این قضایا را برای منیفلدها تعمیم داده یا مستقیماً از آنها در اثبات قضایای دیگر و یا در حل مسائل مختلف استفاده خواهیم کرد. البته نگارش این فصل بدان معنی نیست که مقدماتی که برای هندسه لازم است منحصر به چند قضیه و یا چند تعریف است که در اینجا بتوان به آن اشاره کرد. بلکه اطلاعات مورد لزوم آن ناشی از ذوقی است که در اثر تفکر هنگام مشاهده اشیاء هندسی و روابط بین آنها در طی دوران تحصیل برای بیننده ایجاد می شود و او را وادار می‌سازد که با دقت در آنها، و مطالعه کتب مختلف، بینش خود را در این زمینه افزایش دهد. اما از آنجا که دانسته‌های دانشجویان در مقطع کارشناسی در مورد دروس مختلف متفاوت است لازم دیدیم در این فصل چند قضیه از آنالیز را که دانشجویان قبلاً در درس آنالیز III با آن آشنا شده‌اند تکرار نماییم تا ضمن یادآوری مطالب مورد نیاز فصول آینده، خواننده تا اندازه‌ای با روش توسعه و تعمیم در ریاضیات آشنا شود.

یادآوری مطالبی از آنالیز ریاضی

قضیه تابع معکوس، قضیه رتبه و قضیه تابع ضمنی

به اختصار در این بخش به یادآوری چند قضیه اساسی از آنالیز که کاربرد فراوان در هندسه دارند به نامهای قضیه تابع معکوس، قضیه رتبه و قضیه تابع ضمنی می‌پردازیم. اثبات این قضایا در کتب کلاسیک آنالیز موجود است که از آوردن آن در اینجا خودداری می‌شود.

فرض کنیم U بازی از $\mathbb{R}^n$ و V بازی از $\mathbb{R}^p$ باشد می‌گوییم نگاشت f، $f : U \to V$ در نقطه $x_\circ \in U$ **مشتق‌پذیر** است اگر یک نگاشت خطی مانند

$$(Df)_{x_\circ} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$$

موجود باشد بطوریکه

$$\lim_{\|\vec{h}\| \to \circ} \frac{f(x_\circ + \vec{h}) - f(x_\circ) - (Df)_{x_\circ}(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \circ$$

براحتی می‌توان نشان داد که اگر $(Df)_{x_\circ}$ موجود باشد مقدار آن بطور یکتا توسط ماتریس زیر معرفی می‌شود.

$$(Df)_{x_\circ} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ . & \cdots & . \\ . & \cdots & . \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=x_\circ}$$

نگاشت $(Df)_{x_\circ}$ را **دیفرانسیل** f در $x_\circ$ می‌نامند، ماتریس آنرا **ماتریس ژاکوبین**[1] f در $x_\circ$ و در حالت $x = p$ دترمینان ماتریس را **ژاکوبین**[2] f در $x_\circ$ می‌گوییم.

---

[1] *Jacobian*

[2] *Jacobian matrice*

در مورد دیفرانسیل توابع مرکب رابطه زیر را داریم که آنرا قاعده زنجیره‌ای می‌نامند.

$$D(fog)_{x_\circ} = (Df)_{g(x_\circ)}(Dg)_{x_\circ}$$

می‌گوییم نگاشت $f : U \longrightarrow I\!R^p$ از کلاس C^k می‌باشد اگر در تمام نقاط U تمام مشتقات جزئی تا مرتبه kام آن موجود و پیوسته باشند.
بنابر قضیه شوارتز بدون توجه به ترتیب مشتق‌گیری مشتقات جزئی تا مرتبه kام تابع f از کلاس C^k با یکدیگر برابرند. یعنی

$$\frac{\partial^h f}{\partial x^{i_1}\partial x^{i_2}\cdots\partial x^{i_h}} \qquad h \leq k$$

توابعی متقارن نسبت به اندیسهای $i_1, \cdots, i_h$ هستند.
ثابت می‌شود که اگر f از کلاس C^1 باشد آنگاه f دیفرانسیل‌پذیر نیز هست.
تعریف: *اگر U و V بازه‌هایی از $I\!R^n$ باشند نگاشت $f : U \longrightarrow V$ را یک* **دیفئومورفیسم**[1] *از کلاس C^k گوییم اگر f دو سویی بوده و f و f^{-1} از کلاس C^k باشند.*

اگر f دیفئومورفیسم باشد آنگاه $(Df)_{x_\circ}$ دوسویی است زیرا $(Df \circ Df^{-1})\Big|_{f(x_\circ)}$ و $(Df^{-1} \circ Df)\Big|_{x_\circ}$ نگاشت همانی هستند. قضیه تابع معکوس عکس این مطلب را بطور موضعی بیان می‌دارد به عبارت دیگر اگر f از کلاس C^k $(1 \leq k)$ و $(Df)_{x_\circ}$ دوسویی باشد آنگاه f در یک همسایگی $x_\circ$ دیفئومورفیسم کلاس C^k است.

قضیه تابع معکوس[2]

فرض کنیم U و V بازهایی از $I\!R^n$ بوده و نگاشت $f : U \longrightarrow V$ از کلاس C^k $(1 \leq k)$ باشد. فرض کنیم نقطه‌ای مانند $x_\circ \in U$ موجود باشد بطوریکه

$$\det(Df)_{x_\circ} \neq 0 \qquad \text{(یعنی } (Df)_{x_\circ} \text{ در } x_\circ \text{ دوسویی باشد)}$$

---

[1] *diffeomorphism*

[2] *Inverse function theorem (théorème de fonction inverse)*

آنگاه بازی مانند U' در U شامل $x_\circ$ وجود دارد بطوریکه تحدید $f\big|_{U'}$ یک دیفئومورفیسم از کلاس C^k روی تصویرش باشد.

به عبارت دیگر این قضیه بیان می‌کند که اگر Df در $x_\circ$ دوسویی باشد آنگاه f روی یک همسایگی از $x_\circ$ دوسویی است. این موضوع در قضیه رتبه به نحو دیگری بیان می‌گردد.

در قضیه رتبه ثابت می‌شود که اگر Df در $x_\circ$ پوششی (یا بطور مشابه یک به یک) باشد آنگاه f روی یک همسایگی $x_\circ$ پوششی (یا بطور مشابه یک به یک) است.

تعریف: *یک دستگاه مختصات موضعی*[۱] *از کلاس C^k در همسایگی یک نقطه $x_\circ \in I\!R^n$، عبارت است از زوج (ψ, U) که در آن U بازی از $I\!R^n$ شامل $x_\circ$ و ψ یک دیفئومورفیسم C^k از U روی بازی از $I\!R^n$ است.*

بنابراین برای آنکه یک نگاشت دوسویی از کلاس C^k، $\psi : U \longrightarrow V$ یک دستگاه مختصات موضعی در همسایگی نقطه $x_\circ$ تعریف نماید لازم و کافی است که $\det\,(D\psi)_{x_\circ} \neq \circ$.

گاهی اوقات دستگاه **مختصات موضعی** را دستگاه **مختصات منحنی‌الخط**[۲] نیز می‌گویند. (این نامگذاری بدین دلیل است که ψ خطوط $I\!R^n$ را به منحنی‌ها مرتبط می‌سازد).

تعریف: *نگاشت $C^k(k \geq 1)$ $f : U \subset I\!R^n \longrightarrow V \subset I\!R^{n+p}$ در $x_\circ \in U$ (در اینجا U و V باز هستند) را یک* **جادهنده یا ایمرسیون**[۳] *از کلاس C^k گوییم اگر $(Df)_{x_\circ}$ یک به یک باشد. (یا بطور معادل اگر رتبه f برابر بعد حوزه تعریف باشد) نگاشت $f : U \subset I\!R^{n+p} \longrightarrow V \subset I\!R^p$ در $x_\circ \in U$ را یک* **پوشاننده یا سوبمرسیون**[۴] *گوییم اگر $(Df)_{x_\circ}$ پوششی باشد. (یا بطور معادل اگر رتبه f برابر بعد حوزه مقادیر باشد)*

تذکر: *می‌توان نشان داد اگر $f : U \subset I\!R^n \longrightarrow V \subset I\!R^p$ یک جادهنده (یا بطور مشابه*

---

[۱] *local coordinate system (System de Coordonne' local)*

[۲] *Curveline coordinate system*

[۳] *Immersion*

[۴] *submersion*

پوشاننده) در نقطه $x_\circ$ باشد آنگاه در یک همسایگی به‌اندازه کافی کوچک $x_\circ$ نیز جادهنده (یا بطور مشابه پوشاننده) است.

قضیه رتبه در $I\!R^n$[1]

الف ـ فرض کنیم $f : U \subset I\!R^n \longrightarrow V \subset I\!R^{n+p}$ یک جادهنده یا ایمرسیون از کلاس C^k در نقطه $x_\circ \in U$ باشد. آنگاه یک دستگاه مختصات موضعی در همسایگی $f(x_\circ)$ [یعنی یک زوج (V', y) که V' یک همسایگی $f(x_\circ)$ در V و y یک C^k- دیفئومورفیسم از V' روی بازی از $I\!R^{n+p}$] و یک همسایگی U' از $x_\circ$ وجود دارد بطوریکه $f(U') \subset V'$ و داشته باشیم

$$yof : U' \longrightarrow I\!R^{n+p}$$

$$(x_1, \cdots, x_n) \longrightarrow (x_1, \cdots, x_n, \cdots, \circ, \cdots, \circ)$$

نتیجه: اگر f در نقطه p جادهنده یا ایمرسیون باشد آنگاه f بطور موضعی یک به یک است (یعنی برای نقطه p یک همسایگی موجود است که f روی آن یک به یک است) (مراجعه شود به شکل ۱.۲۰)

ب ـ فرض کنیم $f : U \subset I\!R^{n+p} \longrightarrow V \subset I\!R^p$ یک پوشاننده یا سوبمرسیون از کلاس C^k در $x_\circ$ باشد. آنگاه یک دستگاه مختصات موضعی در همسایگی $x_\circ$ [یعنی یک زوج (U', x) که U' یک همسایگی $x_\circ$ در U و x یک دیفئومورفیسم C^k از U' در بازی از $I\!R^{n+p}$ باشد] وجود دارد بطوریکه

$$fox^{-1} : x(U') \subset I\!R^{n+p} \longrightarrow I\!R^p$$

$$(x_1, \cdots, x_{n+p}) \longrightarrow (x_1, \cdots, x_p)$$

نتیجه: اگر f در نقطه p پوشاننده یا سوبمرسیون باشد آنگاه f بطور موضعی پوششی است (یعنی برای نقطه p یک همسایگی U موجود است که $f(U)$ یک همسایگی $f(p)$ را می‌پوشاند) (مراجعه شود به شکل ۱.۲۱)

---

[1] *Rank theorem (Théorème de Rang)*

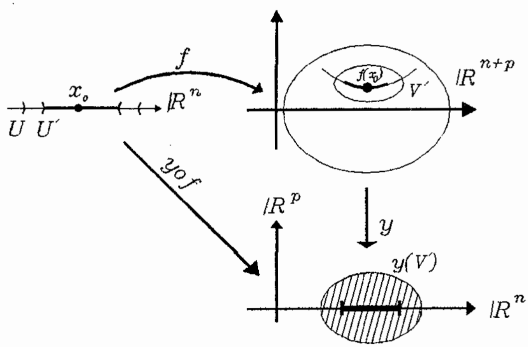
بنابراین قضیه رتبه بیان می‌دارد که پس از یک تغییر مختصات (برای جادهنده در حوزه مقادیر و برای پوشاننده در حوزه تعریف):

الف ـ یک جادهنده یا ایمرسیون بطور موضعی یک به یک است. $U' \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+p}$

$(x_1, \cdots, x_n) \longrightarrow (x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots, 0)$

ب ـ یک پوشاننده یا سوبمرسیون بطور موضعی پوششی است. $x(U') \subset \mathbb{R}^{n+p} \longrightarrow \mathbb{R}^p$

$(x_1, \cdots, x_{n+p}) \longrightarrow (x_1, \cdots, x_p)$

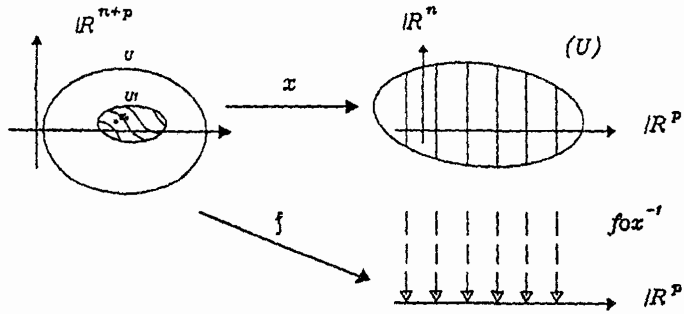


شکل الف ـ f در x_0 جادهنده یا ایمرسیون است

yof یک نگاشت یک به یک کانونی است که بیان کننده جادهنده یا ایمرسیون f در دستگاه مختصات جدید است.

شکل ۱.۲۰:

اثبات قضیه رتبه با استفاده از قضیه تابع معکوس انجام می‌شود که در درس آنالیز III آورده شده است. قضیه تابع معکوس در اثبات قضیه مهم دیگری بنام قضیه توابع ضمنی بکار می‌رود.



شکل ب ـ f در $x_\circ$ سوبمرسیون است

fox^{-1} یک نگاشت پوششی کانونی است که بیان کننده سوبمرسیون f در دستگاه مختصات جدید است.

قضیه تابع ضمنی[۱]

فرض کنیم $F : W \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ نگاشتی از کلاس C^k $(k \geq ۱)$ بوده بطوریکه به ازاء $W \ni (x_\circ, y_\circ)$ داشته باشیم

$$\begin{cases} F(x_\circ, y_\circ) = \circ \\ det(D_yF)(x_\circ, y_\circ) \neq \circ \end{cases}$$

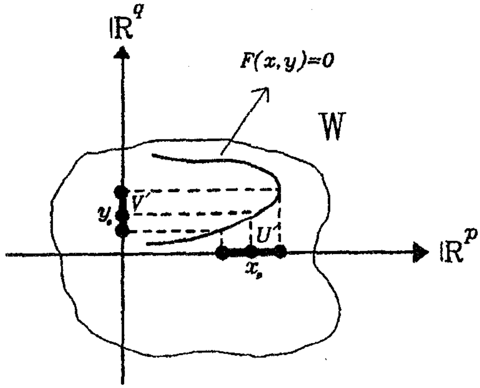
(در اینجا D_yF ماتریس ژاکوبین مشتقات جزیی F نسبت به متغیرهای y از $\mathbb{R}^q$ است) آنگاه یک همسایگی $x_\circ$ در $\mathbb{R}^p$ مانند U' و یک همسایگی $y_\circ$ در $\mathbb{R}^q$ مانند V' و یک نگاشت رده C^k، f

$$f : U' \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow V' \subset \mathbb{R}^q$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

وجود دارد بطوریکه

$$\forall (x,y) \in U' \times V' \quad ، \quad F(x,y) = \circ \Leftrightarrow y = f(x)$$

[۱] *Implicit function theorem (Théorème des fonctions implicites)*



شکل ۱.۲۱ :

همانطوریکه در شکل مشاهده می‌شود نمودار $F(x,y) = 0$ در حالت کلی تابع نیست اما در همسایگی $U' \times V'$ تابع است.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

فصل ۲: فضای مماس[1]

مقدمه

در فصل دوم به بیان چند مفهوم اساسی در هندسه به نام‌های: بردار مماس، فضای مماس، میدان برداری و نگاشت مماس می‌پردازیم. سپس در ادامه تعاریف دوگان تعاریف قبل را به ترتیب: ۱ـ فرمی، فضای دوگان مماس، میدان ۱ـ فرمی و نگاشت دوگان مماس را بیان نموده مثال‌ها و تمرینات متنوعی ارائه می‌کنیم. در بخش § ۱ با توجه به دو خصوصیت مهم بردارهای مماس در $I\!R^n$ به شرح زیر دو تعریف متفاوت برای بردار مماس در M ارائه می‌کنیم. تعریف اول ناشی از این خاصیت است که یک بردار می‌تواند در یک نقطه بر تعداد بیشماری منحنی مماس باشد. خانواده این منحنی‌ها تشکیل یک کلاس هم‌ارزی می‌دهد. لذا **کلاس هم‌ارزی تعریف شده در یک نقطه p را یک بردار مماس در p می‌نامیم.** تعریف دوم نتیجه خاصیتی است که بردارها به عنوان نگاشت مشتقگیری دارند. در این باب در ریاضیات عمومی با مفهومی به نام مشتق جهت‌دار یا مشتق سویی از یک تابع در جهت یک بردار آشنا گردیده‌ایم. لذا در **تعریف دوم یک بردار به عنوان یک مشتق‌گیری تعریف می‌شود.**

قضیه‌ای نیز در این بخش به اثبات می‌رسانیم که یکسانی تعاریف بالا از آن نتیجه می‌شود

---

[1] *Tangent space*

در بخش §۲ پس از تعریف TM، خانواده فضاهای برداری مماس نشان می‌دهیم که این خانواده یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر است.

در بخش §۳ مشابه دو تعریف ارائه شده برای بردارهای مماس دو تعریف برای میدان‌های برداری ارائه نموده یکسان بودن آن را در یک قضیه به اثبات می‌رسانیم. سپس به تعریف کروشه دو میدان برداری پرداخته آن را در مختصات موضعی محاسبه می‌کنیم.

در بخش §۴ به تعریف نگاشت مماس پرداخته پس از محاسبه آن در مختصات موضعی تعبیر هندسی آنرا ذکر می‌کنیم.

در بخش‌های §۵ و §۶ به ارائه تعاریف دوگان مفاهیم فوق مانند ۱ـ فرمی‌ها، فضای دوگان مماس و نگاشت دوگان پرداخته آنها را به صورت موضعی محاسبه می‌کنیم. به خواننده علاقه‌مند توصیه می‌شود برای درک بهتر این مفاهیم مثالها و تمرینات این بخش را به دقت مورد مطالعه قرار دهد.

در پایان فصل دوّم مطالبی از آنالیز و توپولوژی جهت یادآوری تحت عنوان پیوست I و II آورده شده است که خواننده می‌تواند در صورت لزوم به آنها مراجعه نماید.

پیوست I در مورد اثبات وجود تابعی است که وجود آن روی منیفلدها به ما اجازه می‌دهد که خواص موضعی (یعنی در همسایگی هر نقطه) را به خواص سرتاسری (یعنی در کل منیفلد) تعمیم دهیم.

در پیوست II، در مورد تعریف افراز واحد و اثبات وجود آن بحث می‌شود. در این راستا چند قضیه و تعریف از توپولوژی را یادآوری نموده مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۱.۲ § بردار مماس و فضای مماس[1] بر یک منیفلد

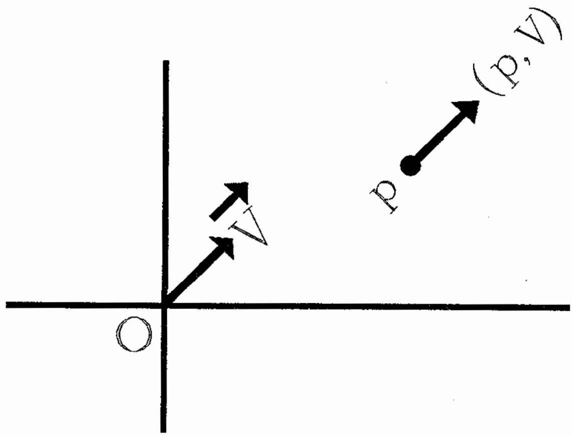
هدف ما در این بخش ارائه یک تعریف برای مفهوم بردار مماس بر منیفلد M در نقطه p است. ابتدا فرض کنیم که $M = \mathbb{R}^n$. یادآوری می‌کنیم که یک بردار مماس در نقطه p از

[1] *Tangent vector (Vecteur tangent)*

$I\!R^n$ عبارت است از زوج (p, V) که p نقطه ابتدای بردار و V جهت و اندازه آن را تعیین می‌نماید.

به این صورت بردارهای "مماس بر $I\!R^n$ " را می‌توان با اعضای $I\!R^n \times I\!R^n$ مشخص نمود.

برای تعمیم این مفهوم روی منیفلد M توجه شما را بدین موضوع جلب می‌کنیم که هر عضو $I\!R^n \times I\!R^n$ را می‌توان به عنوان بردار مماس بر یک منحنی در نظر گرفت.



شکل ۲.۱ : بردار و بردار مماس در $I\!R^n$

جهت روشن شدن این موضوع یادآوری می‌کنیم که معادله یک منحنی در $I\!R^n$ توسط نگاشت $C(t)$ به‌صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$C:\ I \longrightarrow C(I) \subset I\!R^n$$
$$t \ \mapsto\ (C_1(t), \cdots, C_n(t))$$

بردار مماس در هر نقطه $C(t_0) = p$ از این منحنی توسط $2n-$ تایی (p, V) مشخص می‌گردد که در آن $n-$تایی V به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$V = \frac{dC}{dt} = (\frac{dC_1}{dt}, \cdots, \frac{dC_n}{dt})$$

حال مفهوم بردار مماس بر یک منحنی را با استفاده از کارت‌ها برای منیفلد M به‌صورت زیر بیان می‌کنیم. اگر معادله یک منحنی روی M توسط نگاشت زیر تعریف گردد

$$\begin{aligned} C : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow C(I) \subset M \\ t &\mapsto C(t) \end{aligned}$$

بردار مماس بر منحنی C در نقطه $p = C(t_\circ)$ از M را می‌توان توسط یک $2n-$ تایی $(x(p), V)$ مشخص نمود که در آن $n-$تایی V به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$V = \frac{d(x \circ C)}{dt} = \left(\frac{d(x^1 \circ C)}{dt}, \dots, \frac{d(x^n \circ C)}{dt}\right) = \left(\frac{dC_i}{dt}\right)$$

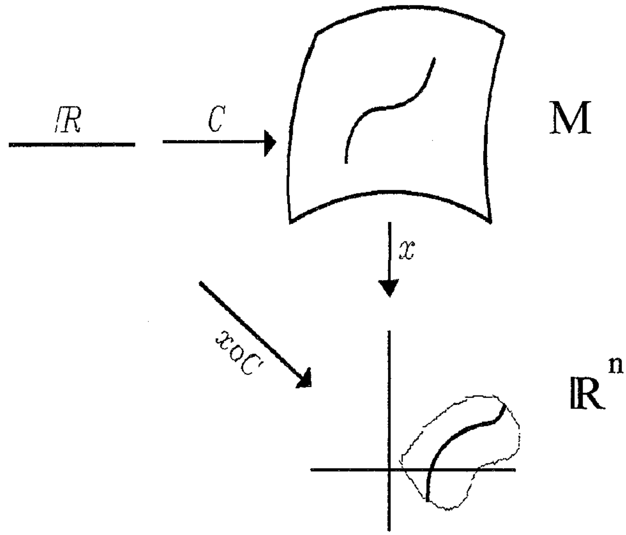
به‌منظور سادگی هرجا احتمال اشتباه نرود (بنابر قرارداد فصل قبل) رابطه اخیر را به‌صورت $V = \dfrac{dC}{dt}$ نیز می‌نویسیم، اگر نگاشت C از کلاس C^k باشد منحنی آنرا از کلاس C^k می‌گوئیم. به شکل ۲.۲ مراجعه شود.

خصوصیت اول بردار مماس

اگر $(p, V) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ آنگاه خانواده‌ای از منحنی‌ها وجود دارد که از نقطه p گذشته و بردار V بردار مماس بر آنها در نقطه p باشد، یعنی خانواده‌ای از توابع از کلاس C^1 که به صورت زیر تعریف می‌شوند.

بطوریکه

$$\begin{aligned} C : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto C(t) \end{aligned} \quad \text{و} \quad \begin{cases} C(t_\circ) &= p \\ \dfrac{dC}{dt}(t_\circ) &= V \end{cases}$$



شکل ۲.۲ : منحنی روی یک منیفلد و تصویر آن روی $I\!R^n$

بنابراین از این خاصیت به صورت زیر استفاده می‌کنیم .روی مجموعه منحنی‌های از کلاس C^1 در $I\!R^n$ یک رابطه هم‌ارزی تعریف می‌نمائیم. به شکل ۲.۳ مراجعه شود.

$$C_1 \sim C_2 \Leftrightarrow \begin{cases} C_1(t_0) & = C_2(t_0) \\ \frac{dC_1}{dt}(t_0) & = \frac{dC_2}{dt}(t_0) \end{cases}$$

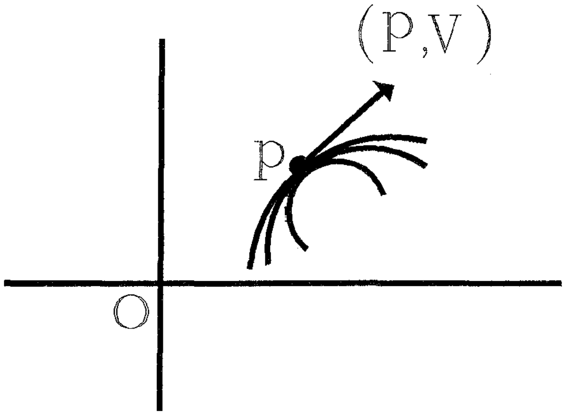
یعنی دو منحنی C_1 و C_2 هم‌ارزند اگر بردار مماس مشترکی در t_0 داشته باشند. حال این تعریف در $I\!R^n$ را توسط کارت‌ها برای منیفلد M تعمیم می‌دهیم.

تعریف اول بردار مماس

تعریف: فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر و $C:]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ یک منحنی از کلاس C^1 روی M باشد. فرض کنیم (x, U) یک کارت موضعی در همسایگی نقطه

$p = C(\circ)$ باشد رابطه هم ارزی زیر را در نظر می‌گیریم

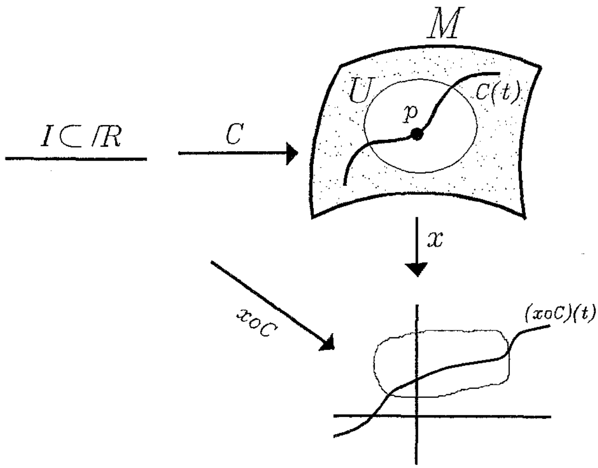
$$C_1 \sim C_2 \iff \begin{cases} C_1(\circ) = C_2(\circ) = p \\ \text{بطوریکه } x \circ C_1, x \circ C_2 \text{ دارای مشتقات برابر در صفر باشند} \\ \text{یعنی } \dfrac{d\, x \circ C_1}{dt}(\circ) = \dfrac{d\, x \circ C_2}{dt}(\circ) \end{cases}$$



شکل ۲.۳ : کلاس هم‌ارزی منحنی‌های مماس بر بردار مماس در نقطه p

$[C]_p$ کلاس هم ارزی تعریف شده توسط منحنی C را **بردار مماس بر** M در p نامیده و با V_p یا X_p نشان می‌دهیم به عنوان تمرین ثابت کنید که رابطه هم‌ارزی فوق مستقل از انتخاب کارت x است، خانواده تمام بردارهای مماس در p را با T_pM نمایش داده آن را **فضای مماس بر** M **در** p می‌نامیم. ((T_pM) همان فضای خارج قسمت می‌باشد) خواهیم دید که T_pM یک فضای برداری به بعد n روی مجموعه اعداد حقیقی تعریف می‌نماید. $(n = dimM)$ این تعریف از بردار مماس دارای محاسن زیراست. اولا" به طور طبیعی و بر اساس بردار سرعت یک منحنی تعریف شده است ثانیا" اجازه می‌دهد که مفهوم آن رابرای تعریف "جت‌های مرتبه kام"[1] براحتی تعمیم داد. (اگر فرض نمائیم که در رابطه هم ارزی بالا $x \circ C_1, x \circ C_2$ در صفر دارای مشتقات مرتبه kام برابر باشند).

[1] $k - order\ jet\ (germe\ d'ordre\ k)$



شکل ۲.۴ : منحنی روی یک منیفلد در مختصات موضعی

با این حال استفاده از تعریف فوق در عمل چندان کار ساده‌ای نیست و از طرفی به راحتی نمی‌توان ثابت نمود که T_pM یک فضای برداری است. لذا به این دلیل تعریف دیگری از بردار مماس که بیشتر جبری است، ارائه می‌دهیم.

خصوصیت دوم بردار مماس

برمی‌گردیم به $I\!R^n$ و فرض می‌کنیم f تابعی حقیقی از کلاس C^1 روی $I\!R^n$ باشد.

$$f : I\!R^n \longrightarrow I\!R$$
$$(x_1, \cdots, x_n) \longmapsto f(x_1, \cdots, x_n)$$

اگر $(p, V) \in I\!R^n \times I\!R^n$ یک بردار مماس بر منحنی $C(t)$ در نقطه p باشد که $C(0) = p$ آن را با V_p نمایش داده و مشتق جهت دار تابع f در جهت بردار V_p را توسط رابطه زیر تعریف می‌نمائیم :

$$V_p \cdot f = \frac{d(f \circ C)}{dt}\Big|_{t=0}$$

به راحتی بنابر قاعده زنجیره‌ای دیده می‌شود که

$$\frac{d(f\circ C(t))}{dt}\Big|_{t=0}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\frac{dC^i}{dt}\Big|_{t=0}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_p v^i$$

در اینجا v^i ها مولفه‌های بردار V هستند. بنابراین داریم

$$V_p\cdot f=v^1\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_p+\cdots+v^n\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_p$$

در اینجا بردار V و نقطه p عبارتند از

$$\begin{cases} C(0)=p\\ \dfrac{dC}{dt}(0)=V\end{cases}$$

منحنی C را یک **"منحنی انتگرال "** بردار V_p نیز می‌گویند.

بنابراین $V_p\cdot f$ درحقیقت عبارت است از تغییرات تابع f در طول منحنی انتگرال بردار V_p. این خود به ما نشان می‌دهد که مشتق f در طول یک منحنی تنها به کلاس هم‌ارزی $[C]_p$ بستگی دارد و در نتیجه می‌توان یک رابطه دو سویی بین بردارهای مماس و مشتق جهت‌دار برقرار کرد. به راحتی می‌توان درستی روابط زیر را تحقیق نمود.

الف) $V_p\cdot(f+g)=V_p\cdot f+V_p\cdot g$

ب) $V_p\cdot kf=kV_p\cdot f \qquad k\in\mathbb{R}$

ج) $V_p\cdot(fg)=(V_p\cdot f)g(p)+f(p)V_p\cdot g$

در ادامه خواهیم دید که این سه خاصیت معرف آن است که مشتق جهت دار در خانواده عملگرهایی که آنها را مشتق گیری می‌نامیم، قرار دارد. به عبارت دیگر نشان می‌دهیم اگر نگاشت D در سه شرط فوق صدق کند آنگاه یک و تنها یک بردار مماس V_p وجود دارد بطوری که $Df=V_p\cdot f$.

فرض کنیم $C^\infty(p)$ جبر توابع C^∞ تعریف شده در یک همسایگی نقطه p از M در مجموعه اعداد حقیقی باشد. ابتدا به تعریف نگاشت مشتق‌گیری می‌پردازیم.

تعریف: یک نگاشت مشتق گیری یا اشتقاق[1] در نقطه p عبارت است از نگاشتی که در شرایط زیر صدق کند:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_p : C^\infty(p) &\longrightarrow I\!R\\ f &\mapsto \mathcal{D}_p f\end{aligned}$$

بطوریکه

الف) $\mathcal{D}_p(f+g) = \mathcal{D}_p f + \mathcal{D}_p g$

ب) $\mathcal{D}_p(\lambda g) = \lambda \mathcal{D}_p g \qquad \lambda \in I\!R$

ج) $\mathcal{D}_p(fg) = (\mathcal{D}_p f)g(p) + f(p)(\mathcal{D}_p g)$

مجموعه مشتق گیری‌ها در نقطه p از M را با $\mathcal{D}_p(M)$ نمایش می‌دهیم.

نشان خواهیم داد که یک رابطه دوسویی بین T_pM و $\mathcal{D}_p(M)$ وجود دارد به طوری که به هر کلاس هم ارزی $[C]_p$ (به هر بردار مماس در p) یک مشتق‌گیری X_p وابسته می‌نماید.

قضیه: $\mathcal{D}_p(M)$ **مجموعه مشتق‌گیری‌ها در نقطه p از منیفلد M را درنظر گرفته و نشان می‌دهیم که یک فضای برداری به بعد $n(n = \dim M)$ است و اگر (x, U) یک کارت موضعی در همسایگی p باشد آنگاه n تایی $\{(\frac{\partial}{\partial x_1})_p, \cdots, (\frac{\partial}{\partial x_n})_p\}$ که توسط**

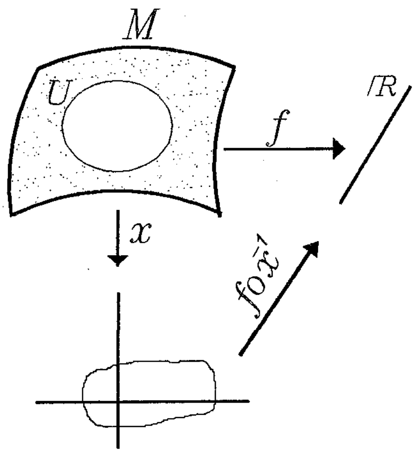
$$(\frac{\partial}{\partial x_i})_p f = D_i(f \circ x^{-1})_{x(p)}$$

تعریف می‌شود تشکیل یک پایه برای $\mathcal{D}_p(M)$ می‌دهد که آن را پایه طبیعی وابسته به کارت x می‌گوئیم.

اثبات: به راحتی بررسی می‌شود که $\mathcal{D}_p(M)$ یک فضای برداری است. (نگاشت مشتق، خطی است) برای ارائه یک پایه ابتدا لم‌های زیر را ثابت می‌کنیم.

لم ۱: **فرض کنیم f تابعی C^∞ باشد که در همسایگی باز و محدب U از صفر روی $I\!R^n$ تعریف شده است و $f(0) = 0$. آنگاه توابعی C^∞ مانند $g_i : U \to I\!R$ $i = 1, \cdots, n$ وجود دارد به طوری که بتوان f را به صورت زیر نوشت.**

[1] *Derivation map (Application de dérivation)*



شکل ۲.۵ : تابع حقیقی f روی M

الف) $f(x^{1},\cdots,x^{n})=\sum_{i=1}^{n}x^{i}g_{i}(x^{1},\cdots,x^{n}) \qquad \forall x\in U$

ب) $g_{i}(0)=D_{i}f(0)$

اثبات لم ۱: به ازاء $x\in U$ تابع h_x را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. $h_{x}(t)=f(tx)$

چون U محدب[1] است این تابع در بازه $0\leq t\leq 1$ تعریف می‌شود. داریم

$$f(x)=f(x)-f(0)=h_{x}(1)-h_{x}(0)=\int_{0}^{1}\frac{\partial h_{x}}{\partial t}dt$$

از طرف دیگر بنابر قاعده زنجیره‌ای داریم

$$\frac{\partial h_{x}(t)}{\partial t}=\frac{\partial f(tx)}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x^{1}}(tx)\underbrace{\frac{\partial(tx^{1})}{\partial t}}_{x^{1}}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x^{n}}(tx)\underbrace{\frac{\partial tx^{n}}{\partial t}}_{x^{n}}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}D_{i}f(tx)\cdot x^{i}$$

---

[1] مجموعهٔ $U\subset\mathbb{R}^{n}$ را محدب $(Convex)$ گوئیم اگر $\forall x\ ,\ y\in U\subset\mathbb{R}^{n}$ و به ازاء $0\leq t\leq 1$ داشته باشیم $(1-t)y+tx\in U$ در اینجا از محدب بودن U نتیجه می‌گیریم که اگر تابع $f(x)$ برای هر $x\in U$ تعریف شود آنگاه تابع $f(tx)$ نیز برای هر $0\leq t\leq 1$ و هر $x\in U$ تعریف می‌شود (چون از محدب بودن نتیجه می‌شود $tx\in U$)

از آنجا با جایگذاری در رابطه بالا داریم:

$$f(x) = \int_0^1 \sum_i D_i f(tx) \cdot x^i dt = \sum_i x^i \int_0^1 D_i f(tx) dt$$

بنابراین کافی است تابع مورد نظر را به صورت $g_i(x) = \int_0^1 D_i f(tx) dt$ تعریف نمائیم.
شرط ب) از شرط الف) حاصل می‌شود.

لم ۲: **اگر (x, U) یک کارت در همسایگی نقطه p باشد آنگاه خانواده n تایی $\{(\frac{\partial}{\partial x^1})_p, \cdots, (\frac{\partial}{\partial x^n})_p\}$ یک پایه برای $\mathcal{D}_p(M)$ تعریف می‌کند.**

اثبات لم ۲: ابتدا یادآوری می‌کنیم که اگر $X_p \in \mathcal{D}_p(M)$ برای هر تابع ثابت k داریم $X_p \cdot k = 0$ زیرا

$$X_p \cdot 1 = X_p \cdot (1 \times 1) = (X_p \cdot 1) \times 1 + 1 \times (X_p \cdot 1) \Rightarrow X_p \cdot 1 = 0$$
$$X_p \cdot (k) = k \times (X_p \cdot 1) = 0$$

حال فرض کنیم $M = \mathbb{R}^n$ و $p = 0$ باشد داریم

$$\begin{aligned} X_p \cdot f &= X_p \cdot (f - f(0) = X_p \cdot (\sum_i x^i g_i) \\ &= \sum_i ((X_P \cdot x^i) g_i(p) + x^i(p) X_p \cdot g_i) \end{aligned}$$

چون x^i مولفه iام $p = 0$ است $x^i(p) = 0$. بنابر ب در لم ۱ داریم:

$$X_p \cdot f = \sum_i (X_p \cdot x^i)(\frac{\partial f}{\partial x^i})_p$$

با فرض $X^i = X_p \cdot x^i$ و چون f دلخواه است داریم

$$X_p = \sum_i X^i (\frac{\partial}{\partial x^i})_p$$

این عبارت نشان می‌دهد که خانواده $\{(\frac{\partial}{\partial x^i})_p\}$ اعضای $\mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$ را تولید می‌کند. حال کافی است نشان دهیم که این خانواده مستقل خطی نیز هست. اگر

$$a^1 (\frac{\partial}{\partial x^1})_p + \cdots + a^n (\frac{\partial}{\partial x^n})_p = 0$$

با تاثیر روی $x^{1}, x^{2}, \cdots, x^{n}$ داریم

$$a^{1} = 0, \cdots, a^{n} = 0$$

بنابراین مستقل خطی‌اند.

حال می‌توان به راحتی نتیجه بدست آمده روی $\mathbb{R}^n$ رابه کمک یک کارت بر روی منیفلد M انتقال داد. به اینصورت اثبات لم ۲ و اثبات قضیه فوق کامل می‌شود. $\square$

قضیه: نگاشت $\Psi : T_pM \longrightarrow \mathcal{D}_p(M)$ که به هر کلاس هم‌ارزی $[C]_p$ مشتق‌گیری X_p را وابسته می‌کند دو سویی است.

در اینجا

$$X_p : C^{\infty}(p) \longrightarrow \mathbb{R}$$

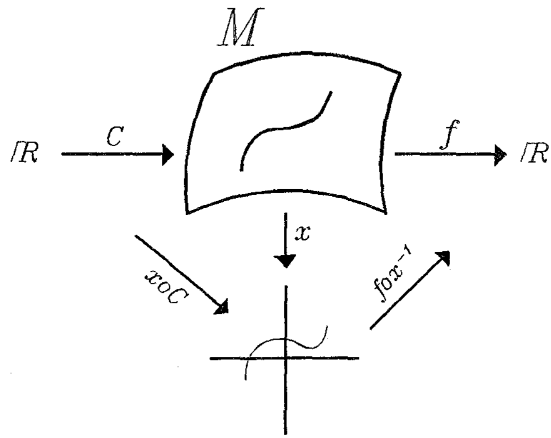
$$f \mapsto \left.\frac{d(f \circ C)}{dt}\right|_{t=0}$$

اثبات : می‌گوئیم Ψ پوششی است زیرا اگر $X_p = \sum_{i=1}^{n} X^i (\frac{\partial}{\partial x^i})_p$ عضو دلخواهی از $D_p(M)$ باشد آنگاه منحنی C را طوری در نظر می‌گیریم که مولفه‌های بردار مماس برآن در نقطه p برابر مولفه‌های بردار X_p باشد.

$$\left.\frac{d(x \circ C)}{dt}\right|_{t=0} = (X^{1}, \cdots, X^{n}) = \sum_i X^i e_i$$

(e_i پایه کانونی) و داریم $\Psi[C] = X_p$

$$\Psi[C] \cdot f = \frac{d}{dt}(f \circ C)\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x^i})_p (\frac{dC^i}{dt})_0 = \sum_{i=1}^{n} X^i (\frac{\partial f}{\partial x^i})_p = X_p \cdot f$$



شکل ۲.۶ : اثر تابع f روی منحنی c

حال می‌گوئیم Ψ یک به یک است زیرا اگر فرض کنیم $\Psi[C] = \Psi[C']$ داریم

$$\left.\frac{d(f \circ C)}{dt}\right|_{\circ} = \left.\frac{d(f \circ C')}{dt}\right|_{\circ} \qquad \forall f \in C^{\infty}(p) \ \ , \ \ p = C(\circ) = C'(\circ)$$

تابع مولفه iام یعنی x^i را به جای f در رابطه فوق قرار می‌دهیم

$$x^i \ : \ U \to \mathbb{R}$$

$$x^i(p) = p \text{ام} i \text{ مولفه} \Rightarrow x^i \circ C = C^i$$

U همسایگی q می‌باشد لذا داریم $(\frac{dC'^i}{dt})_{\circ} = (\frac{dC^i}{dt})_{\circ}$ یعنی $[C] = [C']$. □

حال می‌توانیم یک بردار مماس را به‌صورت زیر نیز تعریف نمائیم.

تعریف دوم بردار مماس

تعریف: *فرض کنیم p نقطه‌ای از منیفلد M باشد.* **یک بردار مماس بر M در p عبارت** *است از یک مشتق گیری از توابع $C^{\infty}(p)$ در نقطه p.*

اگر (x, U) یک کارت در همسایگی p باشد بردار مماس را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} X^i (\frac{\partial}{\partial x_i})_p \qquad (X^i \in \mathbb{R})$$

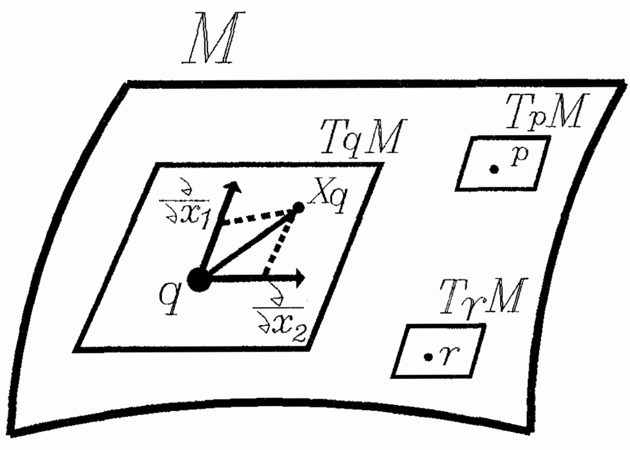
که $(\frac{\partial}{\partial x_i})_p f = D_i(f \circ x^{-1})_{x(p)}$

تعریف دوم فضای مماس

تعریف: فضای مماس در نقطه p از منیفلد M عبارت است‌از فضای برداری مشتق‌گیری‌ها در نقطه p از $C^\infty(p)$ که‌آن را با $\mathcal{D}_p(M)$ یا T_pM نمایش می‌دهیم.

۲.۲ § منیفلد مماس یا کلاف مماس[1]

فرض می‌کنیم $TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$ نشان می‌دهیم TM دارای ساختار یک منیفلد است که آن را منیفلد مماس یا **کلاف** مماس می‌نامیم.



شکل ۲.۷ : صفحات مماس و پایه‌های آن در نقاط مختلف

تابع $\pi : TM \longrightarrow M$ را به صورت $\pi : X_p \longrightarrow p$ تعریف می‌کنیم. اگر (x, U) یک کارت موضعی روی M باشد کارت $(\varphi, \overline{U})$ را روی TM به‌صورت زیر در نظر

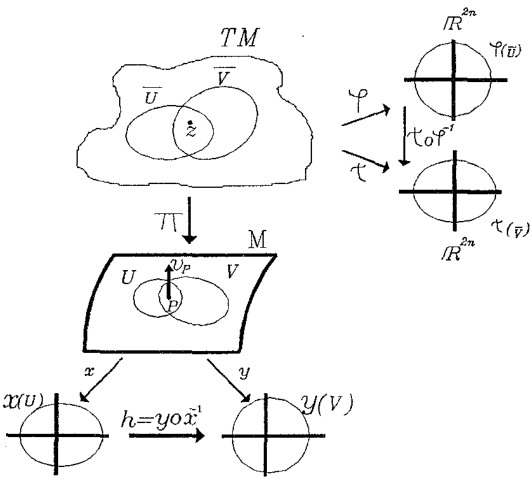
[1] *Tangent bundle (Fibre′ Tangent) or Tangent manifold*

می‌گیریم :

$$\varphi : \overline{U} \longrightarrow I\!R^{2n} \quad , \quad \overline{U} = \pi^{-1}(U)$$
$$: X_q = \sum a^i (\frac{\partial}{\partial x_i})_q \mapsto (x^1(q), \cdots, x^n(q), a^1, \cdots, a^n)$$

(یعنی مختصات یک بردار X_q عبارت است از مختصات نقطه شروع آن و مولفه‌های X_q نسبت به پایه $\{(\frac{\partial}{\partial x^i})_q\}$)

حال نشان می‌دهیم که TM دارای یک ساختار دیفرانسیل پذیری است که توسط کارت‌های به‌صورت فوق تعریف می‌شود. اگر M از کلاس C^k باشد خواهیم دید TM از کلاس C^{k-1} است. به شکل زیر توجه کنید.



شکل ۲.۸ : کارت‌های منیفلد مماس یا کلاف مماس

فرض کنیم (x, U) و (y, V) دو کارت روی M و $(\varphi, \overline{U})$ و $(\psi, \overline{V})$ کارت‌هایی روی TM باشد که به روش بالا تعریف شده‌اند.

باید نشان دهیم که اگر $\overline{U} \cap \overline{V} \neq \phi$ دو کارت فوق C^{k-1} مرتبط هستند.نگاشت تغییر

کارت را نوشته رابطه بین مولفه‌های آنرا به دست می‌آوریم.

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(\overline{U} \cap \overline{V}) \longrightarrow \psi(\overline{U} \cap \overline{V})$$

$$(\underbrace{x^1(p) \cdots x^n(p)}_{p}, \underbrace{a^1, \cdots, a^n}_{v}) \longrightarrow (y^1(p) \cdots y^n(p), b^1, \cdots, b^n)$$

بنابراین با توجه به شکل زیر و با فرض $h = y \circ x^{-1}$ رابطه بین مختصات p در دو کارت x و y به‌صورت زیر می‌باشد .

$$y^i(p) = (y \circ x^{-1})^i(x(p)) = h^i(x(p))$$

که بنابر فرض چون M از کلاس C^k است h^i دیفئومورفیسم C^k می‌باشد.

حال ببینیم که رابطه بین مولفه‌های یک بردار در نگاشت تغییر کارت فوق به چه صورت است.

فرض کنیم $\vartheta \in T_pM$ در دو دستگاه مختصات (x, U) و (y, V) بردار فوق به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$(*) \quad \vartheta = a^1(\frac{\partial}{\partial x^1})_p + \cdots + a^n(\frac{\partial}{\partial x^n})_p = b^1(\frac{\partial}{\partial y^1})_p + \cdots + b^n(\frac{\partial}{\partial y^n})_p$$

برای به دست آوردن رابطه بین a^i و b^i باید رابطه بین $(\frac{\partial}{\partial x^i})$ و $(\frac{\partial}{\partial y^i})$ را بدست آوریم. این کار را قبلاً نیز در تمرینات فصل اول انجام داده‌ایم.

اگر $f \in C^\infty(p)$ داریم

$$\begin{aligned}
(\frac{\partial f}{\partial x^i})_p &= D_i(f \circ x^{-1})_{x(p)} \\
&= D_i[(f \circ y^{-1}) \circ (y \circ x^{-1})]_{x(p)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} D_j(f \circ y^{-1})_{(y \circ x^{-1})(x(p))} D_i(y \circ x^{-1})^j_{x(p)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial y^j})_p (\frac{\partial y^j}{\partial x^i})_p
\end{aligned}$$

در نتیجه $(\frac{\partial y^j}{\partial x^i})$ ماتریس تغییر مختصات یا ژاکوبین نگاشت تغییر کارت است و داریم:

$$\boxed{(\frac{\partial}{\partial x^i})_p = \sum_{j=1}^{n} (\frac{\partial y^j}{\partial x^i})_p (\frac{\partial}{\partial y^j})_p}$$

اگر این مقدار را در رابطه $(*)$ قرار دهیم :

$$\sum_i a^i (\frac{\partial}{\partial x^i})_p = \sum_j b^j (\frac{\partial}{\partial y^j})_p \iff \sum_{i,j} a^i (\frac{\partial y^j}{\partial x^i})_p (\frac{\partial}{\partial y^j})_p = \sum_j b^j (\frac{\partial}{\partial y^j})_p$$

$$\iff b^j = \sum_i a^i (\frac{\partial y^j}{\partial x^i})_p$$

$$\overset{D_i \text{ بنابر تعریف}}{\iff} b^j = \sum_i a^i D_i (y \circ x^{-1})^j_{x(p)}$$

در نتیجه نگاشت تغییر کارت $\psi \circ \varphi^{-1}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(\overline{U} \cap \overline{V}) &\longrightarrow \psi(\overline{U} \cap \overline{V}) \\ (x^i(p), a^i) &\longrightarrow \left((y \circ x^{-1})^i_{x(p)}, \sum_j a^j D_j (y \circ x^{-1})^i_{x(p)} \right) \end{aligned}$$

حال باید نشان دهیم که نگاشت تغییر کارت $\psi \circ \varphi^{-1}$ از کلاس C^{k-1} است. به این صورت یک اطلس $\overline{\mathcal{A}}$ روی TM تعریف می‌شود که آنرا اطلس طبیعی وابسته به $\mathcal{A}$ اطلس تعریف شده روی M می‌نامیم.

حال اگر ماتریس ژاکوبین $\psi \circ \varphi^{-1}$ را بنویسیم

$$\mathcal{D}(\psi \circ \varphi^{-1}) = \left(\begin{array}{c|c} D_j (y \circ x^{-1})^i & 0 \\ \hline \times & D_j (y \circ x^{-1})^i \end{array} \right)$$

چون $y \circ x^{-1}$ دیفئومورفیسم- C^k است، دترمینان ژاکوبین آن بنابر قضیه تابع معکوس مخالف صفر است لذا $\det D(\psi \circ \varphi^{-1}) = (\det ||D_j (y \circ x^{-1})^i||)^2 > 0$

و مجدداً بنابر قضیه تابع معکوس نگاشتهای تغییر کارت $\psi\circ\varphi^{-۱}$ دیفئومورفیسم می‌باشند و کلاس آنها $C^{k-۱}$ است.

تمرین: نشان دهید TM با توپولوژی ذاتی اطلس بالا هاسدورف و دارای پایه شماراست.

راهنمایی: برای هر حوزه دامنه کارت V,U، $\overline{U}\cap\overline{V}=\overline{U\cap V}$ و $\overline{U}$ پایه شمارا دارد.

در نتیجه قضیه زیر را ثابت کرده‌ایم.

قضیه: فرض کنیم M یک منیفلد از کلاس C^k همراه با اطلس A بوده و $\overline{A}$ اطلس طبیعی وابسته به A روی TM باشد. آنگاه TM یک منیفلد $۲n$ بعدی $(n=\dim M)$ از کلاس $C^{k-۱}$ است که توسط اطلس $\overline{A}$ تعریف می‌شود.

بعلاوه اگر (x,U) و (y,V) دو کارت روی M باشند بطوریکه $U\cap V\neq\emptyset$ آنگاه نگاشت تغییر کارت‌ها روی TM از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$(x^i(p),a^i)\longrightarrow((y\circ x^{-۱})^i_{x(p)},\sum_j a^jD_j(y\circ x^{-۱})^i_{x(p)})$$

۳.۲ § میدان برداری[۱]

فرض کنیم M یک منیفلد $C^k(k\geq ۱)$ باشد.

تعریف اول: *یک میدان برداری از کلاس $C^r(r<k)$ عبارت است از نگاشت X از کلاس C^r که به هر نقطه p از M بردار مماس X_p را وابسته می‌کند.*

یادآوری: اگر $\pi:A\to B$ یک نگاشت پوششی باشد یک **بخش** π عبارت است از نگاشت $f:B\to A$ بطوریکه $\pi\circ f=Id_B$ بنابراین X نگاشتی C^r است به صورت

$$\begin{aligned}X:M&\longrightarrow TM\\ p&\mapsto X_p\end{aligned}$$

است بطوریکه $\pi\circ X=Id_M$

(π عبارت است از نگاشت پوششی طبیعی $TM\to M$ که به هر بردار ابتدای آنرا وابسته می‌کند) X را در این حالت یک **بخش**[۲] π نیز می‌گویند.

---

[۱] *vector field (champ de vecteur)*

[۲] *section*

نماد گذاری: میدان‌های برداری را با X ، Y ، Z ، ... و مقدار آنها در p را با X_p، Y_p، Z_p، ... نشان می‌دهیم که مشابه نمادگذاری استفاده شده برای بردارهای مماس است. M کلاس C^∞ باشد، مجموعه میدان‌های برداری C^∞ روی M را با $\mathcal{X}(M)$ نمایش می‌دهند.

یادآوری: اگر A یک حلقه باشد یک Aـمدول عبارت است از یک مجموعه همراه با یک عمل داخلی که با + نشان داده می‌شود و یک عمل خارجی از اعضای A که در شرایط فضای برداری صدق کند.

$\mathcal{X}(M)$ بطور طبیعی دارای خواص یک $C^\infty(M)$ـ مدول با اعمال زیر است:

$$\begin{array}{llll} X+Y & : M & \longrightarrow TM & \\ & \quad p & \mapsto X_p+Y_p & \qquad X,Y\in\mathcal{X}(M) \\ fX & : M & \longrightarrow TM & \qquad f\in C^\infty(M) \\ & \quad p & \mapsto f(p)X_p & \end{array}$$

در بخش § ۱ از همین فصل **نگاشت مشتق‌گیری در یک نقطه** p از M را تعریف نمودیم. حال **نگاشت مشتق‌گیری را برای یک همسایگی** U مطرح خواهیم نمود. تفاوت بین مشتق‌گیری در نقطه p یعنی نگاشت:

$$\begin{array}{ll} X_p : C^\infty(p) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad\quad f & \mapsto X_p\cdot f \end{array}$$

و یک مشتق گیری از M یعنی نگاشت

$$\begin{array}{ll} X : C^\infty(M) & \longrightarrow C^\infty(M) \\ \qquad\quad f & \mapsto X\cdot f \end{array}$$

در آن است که در حالت اول مقدار مشتق $X_p\cdot f$ در نقطه p محاسبه می‌گردد که در نتیجه عددی است حقیقی اما در مورد دوم مشتق یک تابع در حالت کلی (بدون در نظر گرفتن نقطه) مطرح است که یک تابع روی M است. برای روشن شدن این موضوع مثال مقدماتی زیر را می‌آوریم:

مثال: تابع $\begin{array}{ll} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto f(x,y) \end{array}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f(x,y)=x^2+y^2$$

فرض کنیم میدان برداری $X = (\text{۴}x, \text{۳}xy)$ روی $I\!R^{\text{۲}}$ تعریف شود و p نقطه‌ای به مختصات $(\text{۱}, \text{۲})$ باشد. حال مقادیر $X_p \cdot f$ و $X \cdot f$ را محاسبه می‌نمائیم.

$$X_p \;:\; C^\infty(p) \longrightarrow I\!R$$

$$f \mapsto X_p \cdot f$$

$$X_p \cdot f = \sum_{i=\text{۱}}^{\text{۲}} (X^i)_p (\frac{\partial f}{\partial x^i})_p = (X^{\text{۱}})_p (\frac{\partial f}{\partial x})_p + (X^{\text{۲}})_p (\frac{\partial f}{\partial y})_p$$
$$= (\text{۴}x)_p (\text{۲}x)_p + (\text{۳}xy)_p (\text{۲}y)_p$$

$$X_p \cdot f = \text{۴} \times \text{۲} + \text{۶} \times \text{۴} = \text{۳۲} \in I\!R$$

اما برای محاسبه Xf خواهیم دید که هر میدان برداری را می‌توان به صورت $X \underset{U}{=} \sum_{i=\text{۱}}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ نوشت.

$$X \;:\; C^\infty(I\!R^{\text{۲}}) \longrightarrow C^\infty(I\!R^{\text{۲}})$$

$$f \mapsto X \cdot f$$

$$X \cdot f \underset{U}{=} \sum_{i=\text{۱}}^{\text{۲}} X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = (\text{۴}x)(\text{۲}x) + (\text{۳}xy)(\text{۲}y) = \text{۸}x^{\text{۲}} + \text{۶}xy^{\text{۲}} \in C^\infty(I\!R^{\text{۲}})$$

یادآوری: فرض کنیم K یک میدان باشد. یک Kـ جبر یا یک جبر[۱] روی K عبارت است از یک فضای برداری A روی K همراه با یک نگاشت دو خطی از $A \times A$ در A. به عنوان مثال $C^\infty(M)$ مجموعهٔ توابع حقیقی کلاس C^∞ روی M، یک $I\!R$ـ جبر می‌باشد. حال در اینجا تعریف نگاشت مشتق‌گیری را می‌آوریم.

تعریف: فرض کنیم A یک Kـ جبر باشد. **یک مشتق‌گیری از A عبارت است از نگاشت** $D : A \longrightarrow A$ که در شرایط زیر صدق کند

$$D(a+b) = Da + Db \qquad \forall a, b \in A$$

---

[۱] $K - Algebra$

$$D(ka) = kDa \qquad \forall k \in K$$

$$D(a \cdot b) = Da \cdot b + a \cdot Db$$

نظربه اینکه $C^\infty(M)$ یک $I\!R$ـ جبر می‌باشد می‌توان مشتق‌گیری‌های $C^\infty(M)$ رانیز مطالعه نمود. خاصیت اساسی آنها این است که " اپراتورهای موضعی " هستند، این موضوع را بطور دقیق‌تر بشکل زیر بررسی می‌نمائیم.

گزاره: فرض کنیم D یک مشتق‌گیری از $C^\infty(M)$ ، $f \in C^\infty(M)$ و U بازی از M باشد. اگر $f|_U = ۰$ آنگاه $Df|_U = ۰$

اثبات: فرض کنیم $U \ni p$ و $K = \{p\}$ و Ψ یک تابع از $C^\infty(M)$ بطوریکه $\Psi(p) = ۱$ و $supp\Psi \subset U$[۱]. قرار می‌دهیم $\varphi = ۱ - \Psi$ داریم $\varphi(p) = ۰$ و $\varphi|_{U^c} = ۱$ و $f = \varphi f$.

بنابراین

$$Df = D(\varphi \cdot f) = D\varphi \cdot f + \varphi \cdot Df$$

که با در نظر گرفتن مقدار آن در نقطه p

$$Df(p) = D\varphi(p) \cdot f(p) + \varphi(p) \cdot Df(p) = ۰$$

زیرا $f(p) = \varphi(p) = ۰$ □

نتیجه ۱ : فرض کنیم $g \in C^\infty(M)$ و f بطوریکه $f|_U = g|_U$ آنگاه

$$Df|_U = Dg|_U$$

اثبات : برای اثبات کافی است گزاره بالا را برای تابع $f - g$ بکار ببریم. □

نتیجه ۲ : فرض کنیم D یک مشتق‌گیری از $C^\infty(M)$ و U بازی از M باشد. آنگاه بازی

---

[۱] $supp\ \Psi = \overline{\{x \in M \mid \Psi(x) \neq ۰\}}$ ثابت می‌شود که چنین تابعی همواره روی M موجود است. مراجعه شود به پیوست I در پایان این فصل

مانند U'، $U' \subset U$ و یک مشتق‌گیری یکتای $D_{U'}$ از $C^\infty(U')$ وجود دارد بطوریکه

$$\forall f \in C^\infty(M) \qquad (Df)|_{U'} = D_{U'}(f|_{U'})$$

توجه: این خاصیت بیانگر آن است که D یک اپراتور موضعی است یعنی عملگری است که عمل آن توسط عملگر $(D_{U'})$ بیان می‌گردد که منحصرا" در روی توابع تعریف شده روی همسایگی U' عمل می‌کند.

اثبات: فرض کنیم $U' \subset U$ بطوریکه $f_{U'} \in C^\infty(U')$. این نگاشت را توسعه داده به‌صورت $\tilde{f} \in C^\infty(M)$ می‌نویسیم. حال کافی است قرار دهیم

$$(D\tilde{f})|_{U'} = D_{U'}(f|_{U'}) \qquad \square$$

با استفاده از نتیجه ۲ می‌توان گفت این موضوع بستگی به انتخاب $\tilde{f}$ توسیع تابع f ندارد. به این صورت یک مشتق‌گیری D از $C^\infty(M)$ را می‌توان اصطلاحا" " موضعی " نمود یعنی می‌توان یک اپراتوری ساخت که روی توابعی عمل نماید که بطور موضعی (در همسایگی یک نقطه) تعریف شده باشند و بطور کامل D را تعریف نمایند.

قضیه: میدان‌های برداری را می‌توان با مشتق‌گیری‌ها از $C^\infty(M)$ همانند نمود. به عبارت دیگر اگر $X \in \mathcal{X}(M)$ باشد، یک مشتق‌گیری از $C^\infty(M)$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$
$$f \mapsto X \cdot f$$

بطوریکه

$$(X \cdot f)(p) = X_p \cdot f$$

اثبات: اگر X به‌صورت فوق تعریف شود به راحتی مشاهده می‌شود که X در شرایط مشتق گیری از $C^\infty(M)$ صدق می‌کند. برعکس اگر D یک مشتق‌گیری از $C^\infty(M)$ باشد، میدان‌های برداری $X \in \mathcal{X}(M)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X : M \longrightarrow TM$$
$$p \mapsto X_p$$

بطوریکه

$$\begin{array}{rcl} X_p : C^\infty(p) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & (D\tilde{f})(p) \end{array}$$

در اینجا $\tilde{f}$ توسیع تابع f است که روی یک همسایگی p تعریف شده است. $\square$

بنابر آنچه گفته شد میدان برداری روی M را می‌توان یک مشتق‌گیری از $C^\infty(M)$ در نظر گرفته ، به‌صورت زیر تعریف نمود.

تعریف دوم: *فرض کنیم M از کلاس C^k باشد.* **یک میدان برداری** *از کلاس C^r $(r \leq k)$ عبارت است از نگاشت X از کلاس C^r*

$$X : C^r(M) \longrightarrow C^{r-1}(M)$$

بطوریکه در سه شرط زیر صدق کند

$$X \cdot (f+g) = X \cdot f + X \cdot g \qquad f, g \in C^\infty(M)$$

$$X \cdot (cf) = cX \cdot f \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$X \cdot (fg) = (X \cdot f)g + f(X \cdot g)$$

میدان‌های برداری C^∞ بطور مشابه روی منیفلدهای C^∞ تعریف می‌شوند. نتیجه ۲ را می‌توان به‌صورت زیر برای میدان‌های برداری بیان نمود.

نتیجه ۳: *فرض کنیم $X \in \mathcal{X}(M)$ و U بازی از M باشد. آنگاه بازی مانند U' از M ، $U' \subset U$ و میدان یکتای $X_{U'} \in \mathcal{X}(U')$ موجود است بطوریکه*

$$X_{U'} \cdot f|_{U'} = (Xf)|_{U'} \qquad \forall f \in C^\infty(M)$$

این نتیجه به ما اجازه می‌دهد که محاسبات میدان‌های برداری را در دستگاه مختصات موضعی انجام دهیم. به عبارت دیگر می‌توانیم به‌صورت زیر میدان‌های برداری را بررسی نمائیم.

اگر (x, U) یک کارت در همسایگی p باشد ، یک میدان برداری X_U روی U را

به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(X_U \cdot f_U)(p) = (Xf)(p) = X_p f = \sum_{i=1}^{n} a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p f$$

در اینجا a^iها مولفه‌های X_p روی پایه $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$ هستند. یعنی

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$$

با تغییر دادن p ، در یک نقطه دلخواه از U داریم

$$X_U \cdot f_U = \sum_{i=1}^{n} a^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} f$$

که $\frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathcal{X}(U)$ عبارت است از میدان

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \; : \; U \to TU$$

$$p \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$$

به عبارت دیگر می‌توان یک میدان برداری را به‌صورت زیر نوشت.

$$\boxed{X \underset{U}{=} \sum_i a^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}}$$

اغلب اوقات چنانچه احتمال اشتباه نرود از نوشتن U در زیر تساوی خودداری می‌کنیم.

قضیه: **اگر $V \in T_pM$ یک بردار مماس در p باشد آنگاه یک میدان برداری $X \in \mathcal{X}(M)$ وجود دارد بطوریکه**

$$X_p = V$$

اثبات: فرض کنیم (x, U) یک کارت موضعی در همسایگی p باشد و

$$V = \sum_i a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$$

به ازاء هر نقطه $q \in U$ تعریف می‌کنیم

$$V_q = \sum_i a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q$$

فرض کنیم $f \in C^\infty(M)$ بطوریکه $f(p) = ۱$ و $supp\ f \subset U$ (چنین تابعی همواره وجود دارد به پیوست I در پایان این فصل مراجعه شود). برای هر نقطه $m \in M$ تعریف می‌کنیم

$$X_m = \begin{cases} f(m)V_m & m \in U \text{ اگر} \\ ۰ & m \notin U \text{ اگر} \end{cases}$$

□

کروشه لی دو میدان برداری

تعریف: *فرض کنیم $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.نگاشت مشتق‌گیری*

$$[X,Y] : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

که توسط

$$[X,Y]f = X \cdot (Y \cdot f) - Y \cdot (X \cdot f)$$

*تعریف می‌شود یک میدان برداری است که **کروشه لی** X, Y نامیده می‌شود براحتی می‌توان شرایط میدان برداری (مشتق‌گیری) را برای کروشه تحقیق نموده نشان داد که کروشه دارای خواص زیر نیز هست.*

$\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$

الف) $[X,Y] = -[Y,X]$

ب) اتحاد ژاکوبی $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = ۰$

ج)
$$\left.\begin{aligned} [X,fY] &= (X \cdot f)Y + f[X,Y] \\ [fX,Y] &= f[X,Y] - (Y \cdot f)X \end{aligned}\right\}$$

(رابطه اخیر از رابطه قبل وخاصیت الف نتیجه می‌شود)

تذکر: $\mathcal{X}(M)$ **یک جبرلی**[1] است. یادآوری می‌کنیم که یک $I\!R$ـجبر را جبر لی گوئیم اگر دارای یک قانون داخلی مانند $[a,b]$ باشد بطوریکه

$$[a,b]=-[b,a]$$

$$[a,[b,c]]+[b,[c,a]]+[c,[a,b]]=0$$

کروشه لی در مختصات موضعی

اگر (x,U) یک کارت موضعی، $Y \underset{U}{=} \sum_{i=1}^{n} Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ و $X \underset{U}{=} \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ بطوریکه $(X^i, Y^i \in C^\infty(U))$ آنگاه براحتی می‌توان نشان داد در مختصات موضعی داریم

$$I \qquad [X,Y] \underset{U}{=} \sum_{i,j}\left(X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}-Y^i\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}$$

رابطه فوق را می‌توان با استفاده مستقیم از تعریف یا با استفاده از خاصیت $[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}]=0$ و خاصیت ج بدست آورد.

تمرین:

۱ـ نشان دهید کروشه لی دو میدان برداری یک میدان برداری است به عبارت دیگر شرایط میدان برداری یا مشتق‌گیری از M را برای کروشه لی تحقیق نموده ودرستی روابط (الف) و (ب) و (ج) را که پس از تعریف کروشه آورده شده است تحقیق کنید. سپس نشان دهید $X\circ Y$ و $Y\circ X$ میدان برداری نیستند اگرچه تفاضل آنها میدان برداری است.

۲ـ نشان دهید $[X,Y]$ در مختصات موضعی روی منیفلد M از کلاس C^∞ و به بعد n، روی کارت (x,U) توسط رابطه (I) در بالا بیان می‌گردد.

۳ـ یک تابع $f: I\!R^3 \to I\!R$ مثال بزنید و مقدار کروشه لی دو میدان برداری X و Y یعنی

[1] *Lie algebra (Algebre de Lie)*

$f\ [X,Y]$ را در مختصات موضعی بدست آورید.

۴.۲ § نگاشت مماس[1]

فرض کنیم $f : M \to N$ یک نگاشت دیفرانسیل‌پذیر از کلاس C^1 باشد. به ازاء هر نقطه p از M نگاشت خطی f_* را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(f_*)_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$$

که $(f_*)_pX_p$ توسط اثر آن روی تابع g به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$\boxed{(f_*)_pX_p \cdot g = X_p \cdot (g \circ f)} \qquad g \in C^\infty(f(p))$$

براحتی می‌توان نشان داد که $(f_*)_pX_p$ یک مشتق‌گیری از توابع $C^\infty(f(p))$ می‌باشد. به این‌صورت نگاشت زیر را به صورت نقطه به نقطه تعریف می‌نمائیم.

$$f_* : TM \to TN$$
$$(p, X_p) \to (f(p), (f_*)_pX_p)$$

f_* را **نگاشت مماس** می‌نامند و گاهی اوقات آنرا با Tf، Df یا df نیز نمایش می‌دهند.

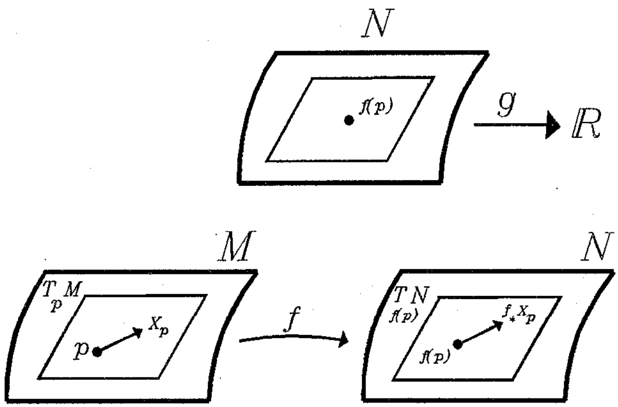
چون $(f_*)X_p$ یک بردار در $T_{f(p)}N$ می‌باشد نمودار زیر "جابجایی" است. (یعنی دو ترکیب زیر باهم برابرند) $\pi_N \circ f_* = f \circ \pi_M$

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{f_*} & TN \\ \pi_M \downarrow & & \downarrow \pi_N \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

f_* در مختصات موضعی

قضیه: اگر $f : M \to N$ یک نگاشت C^1 باشد فرض کنیم (x,U) و (y,V) دو

[1] *Tangent application*



شکل ۲.۹ : اثر f و f_* روی M و T_pM و در بالا یک تابع حقیقی روی N

کارت موضعی در همسایگی نقاط p و $f(p)$ باشند. آنگاه ماتریس f_* در پایه‌های $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ، $\frac{\partial}{\partial y_j}$ همان ماتریس ژاکوبین $y \circ f \circ x^{-1}$ نسبت به پایه‌های متعارف است و داریم:

$$(Matrice(f_*)_p)_{(\frac{\partial}{\partial x^i})_p,(\frac{\partial}{\partial y^j})_{f(p)}} = |(\frac{\partial f^i}{\partial x^j})|_{(p)}$$

با توجه به نمادگذاری بخش قبل $\frac{\partial f^i}{\partial x^j} = D_j(y^i \circ f \circ x^{-1})_{x(p)}$

اثبات : فرض کنیم $g \in C^\infty(f(p))$ ماتریس نگاشت خطی f_* را بدست می‌آوریم.

$$[(f_*)_p(\frac{\partial}{\partial x^j})_p] \cdot g = (\frac{\partial}{\partial x^j})_p(g \circ f) = \sum_i (\frac{\partial g}{\partial y^i})(\frac{\partial f^i}{\partial x^j})_p$$
$$= \sum_i (\frac{\partial f^i}{\partial x^j})_p(\frac{\partial}{\partial y^i})_{f(p)} g$$

از آنجا

$$(f_*)_p(\frac{\partial}{\partial x^j})_p = \sum_i (\frac{\partial f^i}{\partial x^j})_p(\frac{\partial}{\partial y^i})_{f(p)}$$

که حکم از آن نتیجه می‌شود. □

لم: اگر N, M و P سه منیفلد بوده و $g : M \to N$ و $f : N \to P$ دو تابع

دیفرانسیل‌پذیر باشند آنگاه

$$(f\circ g)_{*x} : T_xM \longrightarrow T_{(f\circ g)(x)}P$$

و داریم

$$(f_*)_{g(x)} \circ (g_*)_x = (f\circ g)_{*x}$$

یعنی

$$\boxed{f_* \circ g_* = (f\circ g)_*}$$

این خاصیت نتیجه می دهد که ماتریس ژاکوبین ترکیب دو تابع برابر است با حاصلضرب ماتریس ژاکوبین‌های آنها. اثبات به عنوان تمرین در خاتمه این بخش به‌عهده خواننده واگذار شده است.[۱]

تعبیر هندسی f_*

فرض کنیم C یک منحنی روی منیفلد M باشد. در اینجا ابتدا به تعبیر هندسی C_* پرداخته خواهیم دید که تصویر این تابع در حقیقت همان بردار مماس بر منحنی C می‌باشد که آن را توسط تصویر C' نیز نمایش می‌دادیم. سپس به تعبیر f_* پرداخته مشاهده خواهیم کرد که این تابع چگونه بر بردارهای مماس M اثر می‌کند.

همانطوریکه قبلا" دیدیم یک بردار مماس در نقطه p از M ممکن است به عنوان یک مشتق‌گیری از توابع $C^\infty(p)$ یا به عنوان یک کلاس هم‌ارزی از منحنی‌ها روی M، که از نقطه p می‌گذرند تعریف شود.

X_p مشتق‌گیری از توابع $C^\infty(p)$است. $\Longleftrightarrow$ $[C]_p$ کلاس هم‌ارزی منحنی‌ها است.

که در آن

$$X_p \cdot f = \frac{d}{dt}(f\circ C)|_{t=0}$$

---

[۱] با استفاده از تعریف اگر $\varphi \in C^\infty((f\circ g)(x))$ داریم $((f\circ g)_* X_x)\varphi = X_x(\varphi\circ f\circ g)$

هر منحنی C از کلاس $[C]_p$ را یک منحنی انتگرال X_p نامیدیم. بنابراین اگر C یک منحنی باشد

$$C : I =]-\epsilon, \epsilon[\longrightarrow M$$

می‌توان نمودار زیر را که روشنگر تفاوت بین C' و C_* است در نظر گرفت.

$$\begin{tikzcd} TI \arrow[r, "C_*"] & TM \arrow[d] \\ I \arrow[u, "\frac{d}{dt}"] \arrow[r, "C"] \arrow[ur, "C'"] & M \end{tikzcd}$$

در اینجا فرض کرده‌ایم $\frac{d}{dt} \in \mathcal{X}(I)$، $C(\circ) = p, f \in C^\infty(M)$
بنابر تعریف C_* داریم

$$(C_*)_\circ \circ (\frac{d}{dt})_\circ \cdot f = (\frac{d}{dt})_{t=\circ} f \circ C = \frac{d(f \circ C)}{dt}|_{t=\circ} = X_p \cdot f$$

همچنین C منحنی انتگرال بردار $C_* \dfrac{d}{dt}$ می‌باشد

$$(C_*)_\circ \circ (\frac{d}{dt})_\circ = X_p$$

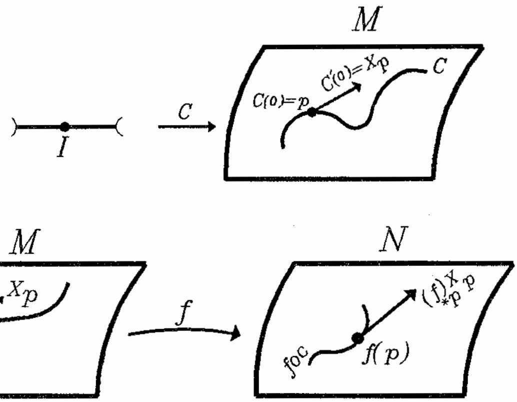
که در ادامه این بخش بردار مماس بر منحنی C در نقطه p را توسط رابطه زیر نشان می‌دهیم.
$C'(\circ) \in T_{C(\circ)}M$

$$\boxed{C'(\circ) = (C_*)_\circ \circ (\tfrac{d}{dt})_\circ}$$

بنابراین اگر $X_p \in T_pM$، آنگاه منحنی انتگرال آن، منحنی $C : I \to M$ است که در رابطه زیر صدق می‌کند.

$$\begin{cases} C(\circ) & = p \\ C'(\circ) & = X_p \end{cases}$$

حال فرض کنیم $f : M \to N$، $X_p \in T_pM$ و C یک منحنی انتگرال X_p باشد در اینجا براحتی خواهیم دید که $(f_*)_p$ عبارتست ازنگاشتی که X_p را به بردار مماس بر منحنی $f \circ C$ در نقطه $f(p)$ تبدیل می‌کند.



شکل ۲.۱۰ : اثر f_* روی یک بردار مماس بر M

در حقیقت داریم :

$$(f_*)_pX_p = (f_*)_{C(\circ)} \circ (C_*)_\circ \circ \frac{d}{dt} = (f \circ C)_{*\circ}(\frac{d}{dt})_\circ = (f \circ C)'(\circ)$$

تذکر: می‌دانیم $f_* : TM \to TN$ به‌صورت بالا تعریف می‌شود، اما f_* وجود نگاشتی از $\mathcal{X}(M)$ در $\mathcal{X}(N)$ را ثابت نمی‌کند. برای آنکه بتوان نگاشتی از $\mathcal{X}(M)$ در $\mathcal{X}(N)$ تعریف نمود باید نگاشت f دوسویی باشد (به عبارت دیگر f یک دیفئومورفیسم باشد.)

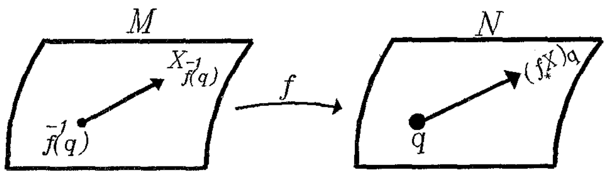
حال فرض کنیم f یک دیفئومورفیسم باشد. $f : M \to N$ و $X \in \mathcal{X}(M)$ آنگاه بطور نقطه به نقطه $(f_*X) \in \mathcal{X}(N)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. اگر q نقطه‌ای از N باشد قرار می‌دهیم.

$$\boxed{(f_*X)_q = (f_*)_{f^{-1}(q)}X_{f^{-1}(q)}}$$

تعریف: می‌گوئیم دو میدان برداری $X \in \mathcal{X}(M)$ و $Y \in \mathcal{X}(N)$ **هم ارز یا مرتبط-** C^k می‌باشند اگر یک دیفئومورفیسم C^k، $f : M \to N$ موجود باشد بطوریکه :

$$Y = f_* X$$

(تعبیر هندسی رابطه اخیر متعاقباً در بخش ۴ از فصل ۶ آورده خواهد شد.)



شکل ۲.۱۱ : اثر f_* روی یک میدان برداری روی M

تمرین

۱ـ نشان دهید که اگر $f : M \to N$ از کلاس C^1 باشد آنگاه $(f_*)_p X_p$ یک مشتقگیری از توابع $C^\infty(f(p))$ است، به عبارت دیگر $(f_*)_p X_p$ یک بردار مماس روی N می‌باشد.

۲ـ اگر $f : N \to P$ و $g : M \to N$ تعریف شده باشد نشان دهید[1]

$$(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$$

۳ـ نشان دهید مشتق پذیری یک تابع $f : M \to N$ (وجود یا عدم وجود f_*) به انتخاب کارت‌ها بستگی ندارد (اگر چه مقدار مشتق در کارت‌های مختلف متفاوت باشد مانند مشتق یک تابع در مختصات دکارتی و مشتق همان تابع در مختصات قطبی در صفحه) این موضوع در فصل اول نیز بررسی گردیده بود.

۴ـ نشان دهید اگر $f : M \longrightarrow N$ از کلاس C^k باشد آنگاه f_* از کلاس C^{k-1} است.

۵.۲ § فضای دوگان مماس (فضای کتانژانت)[2]

مقدمه: در این فصل مفاهیم زیر را تعریف کردیم:

---

[1] با استفاده از تعریف اگر $\varphi \in C^\infty((f \circ g)(x))$ داریم $((f \circ g)_{*x} X_x)\varphi = X_x(\varphi \circ f \circ g)$

[2] *Cotangent space (Espace contangent)*

I ـ بردار مماس X_p، II ـ فضای مماس T_pM، III ـ میدان برداری X، IV ـ خانواده میدان‌های برداری $\mathcal{X}(M)$، Vـ نگاشت مماس f_*

حال میخواهیم در ادامه، تعاریف دوگان تعاریف فوق را به ترتیب زیر بیان کنیم:

Iـ ۱ـ فرمی ω_p، IIـ فضای دوگان مماس T_p^*M، IIIـ میدان ۱ـ فرمی ω، IVـ خانواده میدان‌های ۱ـ فرمی $\Omega^1(M)$، Vـ نگاشت دوگان مماس f^*

به ازاء هر نقطه p از M، T_pM یک فضای برداری است که فضای دوگان آنرا با T_p^*M نشان داده آنرا فضای دوگان مماس می‌نامیم. قرار می‌دهیم

$$T^*M = \cup_{p\in M} T_p^*M$$

$T^*(M)$ بطور طبیعی دارای ساختار منیفلد است. فرض کنیم

$$\tilde{\pi} : T^*M \longrightarrow M$$

$$\omega_p \in T_p^*M \ \mapsto \ p$$

فرض کنیم (x, U) یک کارت در همسایگی نقطه p بوده و $\{(\frac{\partial}{\partial x^i})_p\}_{i=1,\dots,n}$ یک پایه برای T_pM باشد آنگاه پایه‌ای برای T_p^*M تعریف می‌کنیم. قرار می‌دهیم

$$(\theta^i)_p \text{ پایه دوگان } (\frac{\partial}{\partial x^i})_p$$

به عبارت دیگر داریم $(\frac{\partial}{\partial x^i})_p(\theta^j)_p = \delta_i^j$ که در آن δ_i^j دلتای کرونکر است. اگر U^* تصویر معکوس U توسط $\tilde{\pi}$ باشد با توجه به شکل داریم

$$U^* = \tilde{\pi}^{-1}(U) \qquad , \qquad U^* \subset T^*M$$

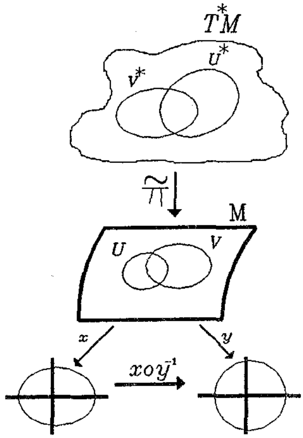
نگاشت $\tilde{\varphi}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\tilde{\varphi} : U^* \longrightarrow R^{2n}$$

$$\omega_p = \sum_{i=1}^{n} a^i(\theta^i)_p \ \mapsto \ (x^1(p), \cdots, x^n(p), a_1, \cdots, a_n)$$

همانطور که قبلا" نیز مشابه نگاشت فوق رادیده بودیم اگر M از کلاس C^k باشد می‌توان نشان داد که $(U^*, \tilde{\varphi})$ یک اطلس C^{k-1} روی T^*M تعریف می‌کند، که این موضوع به عنوان تمرین واگذار می‌شود. T^*M را **منیفلد کتانژانت** نیز می‌گویند.

نمادگذاری: معمولا" اعضای T_p^*M را با حروف یونانی $\omega, \pi, \alpha, \beta, \cdots$ نشان می‌دهند وآنها را ۱ ـ فرمی می‌نامند.



شکل ۲.۱۲ : کارت‌های منیفلد دوگان مماس

مثال: خانواده ۱ ـ فرمی‌های روی $\mathbb{R}^2$ در مختصات (x, y) در نقطه p را با $T_p^*\mathbb{R}^2$ نشان داده به‌صورت زیر می‌نویسیم.

$$\omega_p = a_1 dx + a_2 dy \qquad \omega_p \in T_p^*\mathbb{R}^2$$

توضیح بیشتر در این زمینه، و دلیل اینکه چرا ۱ ـفرمی‌ها به‌صورت فوق نوشته می‌شوند را در ادامه این بخش و در بخش Pـ فرمی‌ها خواهیم آورد.

میدان ۱ ـ فرمی‌ها[1]

مشابه تعریف میدان‌های برداری روی یک منیفلد ، میدان ۱ ـفرمی ها را تعریف می‌نمائیم.

[1] $one\ forms\ fields\ (Champs\ de\ 1 - forme)$

تعریف اول: میدان ۱ـفرمی‌ها از کلاس C^k عبارت است از نگاشت C^k زیر

$$\omega : M \longrightarrow T^*M$$

که به هر نقطه p از M یک عضو ω_p از T_p^*M را وابسته می‌کند.

(به عبارت دیگر منظور یک بخش از نگاشت $\tilde{\pi} : T^*M \to M$ می‌باشد.)

نمادگذاری: مجموعه میدان ۱ـفرمی ها از کلاس C^∞ روی منیفلد M را با $\Omega^1(M)$ نمایش می دهیم. $\Omega^1(M)$ با قوانین زیر تشکیل یک $C^\infty(M)-$ مدول می‌دهد.

$$(\omega_1 + \omega_2)_p = (\omega_1)_p + (\omega_2)_p$$
$$(f\omega)_p = f(p)\omega_p$$

تذکر: *مشابه میدان‌های برداری ثابت می‌شود که اگر $f \in C^\infty(M)$، آنگاه هر میدان ۱ـفرمی را می‌توان با یک $C^\infty(M)$ خطی مانند $\underline{\omega}$ که به صورت زیر تعریف می‌شود همانند نمود* $\underline{\omega} : \mathcal{X}(M) \to C^\infty(M)$

$$\begin{cases} \underline{\omega}(X+Y) &= \underline{\omega}(X) + \underline{\omega}(Y) \\ \underline{\omega}(fX) &= f\underline{\omega}(X) \qquad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M), \forall f \in C^\infty(M) \end{cases}$$

لذا تعریف زیر را که معادل تعریف اول می‌باشد آورده و از این به بعد از این تعریف استفاده می‌نمائیم.

تعریف دوم: *نگاشت ω را یک میدان ۱ـفرمی دیفرانسیل‌پذیر روی M گوئیم اگر $C^\infty(M)$ـخطی باشد، به عبارت دیگر اگر ω در شرایط زیر صدق کند.*

$$\begin{aligned} \omega : \mathcal{X}(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ \omega(X+Y) &= \omega(X) + \omega(Y) \qquad \forall f \in C^\infty(M) \\ \omega(fX) &= f\omega(X) \qquad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M) \end{aligned}$$

تذکر: *فرض کنیم $\omega \in \Omega^1(M)$ و U یک همسایگی از M باشد آنگاه مشابه میدان‌های برداری می‌توان نشان داد که یک وتنها یک $\omega_U \in \Omega^1(U)$ وجود دارد، بطوریکه*

$$\omega(X)|_U = \omega_U(X_U)$$

بنابراین کافی است به ازاء هر نقطه p از U تعریف کنیم

$$\begin{aligned}(\omega_U)_p : T_pU &\to \mathbb{R}\\ X_p &\to \omega(X)_{(p)}\end{aligned}$$

مثال : مشتق خارجی یک تابع[1] فرض کنیم $f \in C^\infty(M)$ باشد. نگاشت df را به اینصورت تعریف می‌کنیم

$$\boxed{(df)(X) = X \cdot f}$$

براحتی می‌توان بررسی نمود که df یک میدان ۱ـفرمی است.

$$(df)(X+Y) = (X+Y)\cdot f = X\cdot f + Y\cdot f = (df)(X) + (df)(Y)$$

$$(df)(gX) = gX\cdot f = g(X\cdot f) = g(df)(X) \qquad g \in C^\infty(M)$$

مثال: فرض کنیم (x,U) یک کارت موضعی و $\begin{aligned}x^i :\ & U \to \mathbb{R}\\ & p \to x^i(p)\end{aligned}$ نگاشت مولفه iام باشد که به هر نقطه p از U مولفه iام $x(p)$ را وابسته می‌کند می‌خواهیم dx^i را محاسبه کنیم.

$dx^i(X) \underset{U}{=} X\cdot x^i = \sum_j X^j \dfrac{\partial x^i}{\partial x^j} = X^i$ و در حالت خاص داریم:

$$\boxed{dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \underset{U}{=} \delta^i_j}$$

بنابراین نقطه به نقطه روی U داریم

$$\forall p \in U \qquad (dx^i)_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p = \delta^i_j$$

تذکر: از این عبارت نتیجه می‌شود که $(dx^i)_p$ پایه دوگان $(\dfrac{\partial}{\partial x^i})_p$ است.

[1] *exterior derivation*

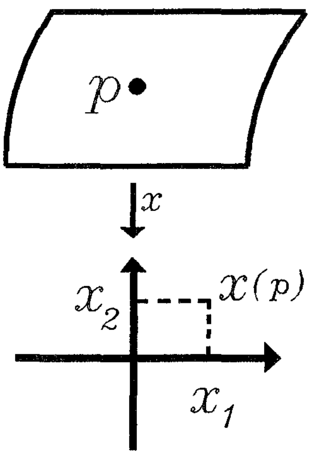
میدان ۱ـفرمی‌ها در مختصات موضعی:

فرض کنیم (x,U) یک کارت موضعی و $\omega\in\Omega^1(M)$ باشد. اگر $X \underset{U}{=} \sum_i X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ آنگاه

$$\omega(X) \underset{U}{=} \omega\left(\sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \sum_i X^i \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$

زیرا ω خطی است. $\omega\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right) \in C^\infty(U)$ حال قرار می‌دهیم $a_i(x) \underset{U}{=} \omega\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)$ داریم

$$\omega(X) \underset{U}{=} \sum_i a_i(x) X^i(x)$$



شکل ۲.۱۳ : مختصات موضعی نقطه p روی M

چون دیدیم $dx^i(X) = X^i$ بنابراین به ازاء هر X داریم $\omega(X) = \sum_i a^i(x) dx^i(X)$

یا

$$\boxed{\omega \underset{U}{=} \sum_i a_i(x) dx^i}$$

$a_i(x)$ را مولفه‌های میدان ۱ـفرمی ω می‌نامیم. در حالت خاص برای df داریم

$$(df)(X) \underset{U}{=} X \cdot f \underset{U}{=} \sum X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i(X)$$

(با توجه به نمادگذاری $\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial (f \circ x^{-1})}{\partial x^i}$)

$$\boxed{df \underset{U}{=} \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i}$$

بنابراین df تعمیم دیفرانسیل کل یک تابع روی منیفلدها است که قبلاً در $I\!R^n$ با مفهوم آن آشنا شده بودیم.

تمرین:

۱ـ نشان دهید T^*M یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر از کلاس C^{k-1}، به بعد $2n$ است. نگاشت تغییر مختصات را بنویسید و ماتریس ژاکوبین آنرا بدست آورید.

راهنمایی: باید ابتدا رابطه بین ۱ـفرمی ω در دو دستگاه مختصات (x, U) و (y, V) را بدست آورده نشان داد در رابطه زیر صدق می‌کنند.

$$\sum_i a_i dx^i = \sum_j b_j dy^j \Rightarrow b_k = \sum_j a_i \frac{\partial x^j}{\partial y^i}$$

سپس مشابه قضیه TM کارتها و ماتریس ژاکوبین نگاشت تغییر کارت را بدست آورد.

۲ـ فرض کنید M و N منیفلدهای دیفرانسیل‌پذیر به ابعاد n و m بوده، f نگاشت دیفرانسیل‌پذیر از M در N باشد. دو کارت (x, U) و (y, V) را در همسایگی p و $f(p)$ در نظر گرفته تعریف می‌کنیم:

اگر $f_i = (y \circ f \circ x^{-1})_i$ آنگاه $df = (df_1, \cdots, df_m)$

در اینجا f_iها توابع حقیقی $f_i : x(U) \to I\!R$ می‌باشند که دیفرانسیل خارجی آنها df_i را در بالا تعریف نمودیم.

الف) نشان دهید ماتریس نگاشت خطی df در پایه کانونی همان ماتریس f_* در پایه ایجاد شده توسط کارت‌های $(y, V), (x, U)$ است.

ب) اگر g, f نگاشت‌های دیفرانسیل‌پذیر $g : M \to I\!R$ ،f باشند نشان دهید

$$d(fg) = fdg + gdf$$

ج) نشان دهید با مفروضات (ب) داریم

$$(fg)_* = fg_* + gf_*$$

۶.۲ § نگاشت دوگان یا کتانژانت[1]

تعریف: فرض کنیم $f : M \to N$ یک نگاشت از کلاس C^1 باشد به ازاء هر p از M یک نگاشت خطی به‌صورت زیر تعریف کنیم

$$(f^*)_p : T^*_{f(p)}N \longrightarrow T^*_pM$$

بطوریکه اگر $\omega \in T^*_{f(p)}N$ داشته باشیم

$$\boxed{((f^*)_p\omega)(X_p) = \omega((f_*)_pX_p)}$$

آنگاه f^* را **نگاشت دوگان** یا **نگاشت کتانژانت** نگاشت f نامیده آنرا **نگاشت عقب‌کش**[2] نیز می‌گویند. بطور نقطه به نقطه نگاشت f^* را تعریف نمودیم.

[1] *Cotangent application*

[2] *Pull back*

تذکر: نگاشت f^* که بطور نقطه‌ای تعریف شده است در حالت کلی نگاشتی از T^*N به T^*M نیست مگر آنکه f معکوس‌پذیر باشد.

در حالت کلی f^* عبارت است از نگاشت

$$f^* : \Omega^1(N) \to \Omega^1(M)$$

براحتی می‌توان نشان داد ماتریس f^*p در هر نقطه‌ای در پایه‌ای که از کارت‌ها ایجاد می‌شود عبارت است از ترانهاده ماتریس ژاکوبین f_*p در همان نقطه (نگاشت مماس). گاهی اوقات $f^*\omega$ را تصویر معکوس ω توسط f نیز می‌گویند.

لم ۱: الف) اگر f تابعی از M در N و g تابعی از N در P از کلاس C^1 باشند آنگاه

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$$

ب) به ازاء هر $g \in C^\infty(N)$

$$f^*dg = d(f^*g)$$

در اینجا فرض شده است

$$f^*g = g \circ f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$$

اثبات بسادگی از تعریف و لم مشابه در ۴§ نتیجه شده و بعنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. (به تمرین ۱ در همین بخش مراجعه کنید.)

لم ۲: ماتریس نگاشت خطی f^*p برابر ترانهاده ماتریس f_*p است.

اثبات این لم مشابه اثبات قضیه مربوط به ماتریس f_* است که در بخش قبل دیدیم. (به تمرین ۳ این بخش مراجعه کنید.)

تمرین:

۱ـ لم ۱ در بالا را ثابت کنید.

راهنمایی: (ب) فرض کنید $\omega = dg$ و به ترتیب از تعریف f^*، df، f_* و نمادگذاری $f^*g = g \circ f$ استفاده کنید.

۲ـ فرض کنیم $f : I\!R^{۳} \longrightarrow I\!R^{۲}$ به‌صورت زیر تعریف شود

$$f(x_۱, x_۲, x_۳) = (x_۱ + ۲x_۲, x_۲ + x_۳)$$

میدان برداری $X = \sum_{i=۱}^{۳} X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ را در $I\!R^{۳}$ و میدان ۱ـ فرمی $\omega = a^۱ dx_۱ + a^۲ dx_۲$ را در $I\!R^{۲}$ در نظر می‌گیریم. می‌دانیم $f^*\omega$ یک میدان ۱ـفرمی روی $I\!R^{۳}$ می‌باشد. مطلوب است محاسبه $(f^*\omega)(X)$.

۳ـ نشان دهید ماتریس $(f^*)_p$ و ماتریس $(f_*)_p$ در پایه‌هایی که توسط کارت‌ها ایجاد می‌شوند ترانهاده یکدیگرند.

۴ـ با استفاده از ماتریس f^* مستقیماً $f^*\omega$ را در تمرین ۲ محاسبه نموده جواب‌ها را مقایسه کنید.

پیوست I: چند تابع دیفرانسیل‌پذیر خاص روی منیفلدها

در این بخش به بررسی توابعی می‌پردازیم که وجود آن روی منیفلدها به ما اجازه می‌دهد خواص موضعی[1] (یعنی در همسایگی هر نقطه) را به خواص سرتاسری[2] (یعنی در کل منیفلد) تعمیم دهیم.

یادآوری می‌کنیم که **محمل**[3] تابع $f : M \to I\!R$ عبارت است از بستار[4] مجموعه نقاطی که در آن نقاط f مخالف صفر است.

گزاره: اگر M یک منیفلد C^∞، U بازی از M و K زیر مجموعه فشرده‌ای از U باشد. آنگاه تابعی مانند $\varphi \in C^\infty(M)$ موجود است بطوریکه

$$\varphi \geq \circ \ , \ \varphi|_K = \text{۱} \ , \ Supp\, \varphi \subset U$$

(لذا $\varphi = \circ$ روی مرز U)

اثبات: در اینجا $Supp\ \varphi = \overline{\{p \in M | \varphi(p) \neq \circ\}}$. فرض کنیم $p \in K$ و (x, V) یک کارت در همسایگی p باشد بطوریکه $x(p) = \circ$ و $\overline{V} \subset U$. تابع $g \in C^\infty(I\!R^n)$

---

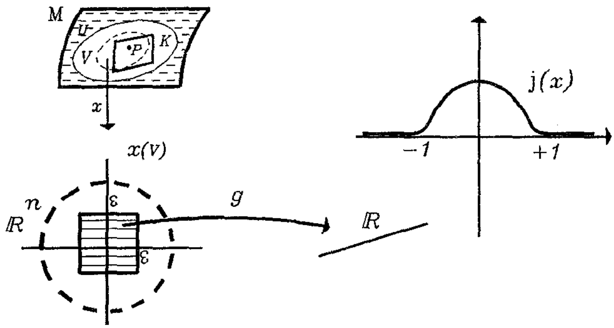
[1] $Local$

[2] $global$

[3] $Support$

[4] $Closure$

را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:



شکل ۲.۱۴ : نمودار سمت راست مربوط به $J(x)$ و سمت چپ مربوط به تابع حقیقی g است

در نقاط مربوط به مکعب n بعدی باز $(]-\varepsilon,\varepsilon[)^n$ داریم $g|_{(]-\varepsilon,\varepsilon[)^n} > ۰$ و در نقاط دیگر $g = ۰$ یک چنین تابعی همواره موجود است و می‌توان آنرا به‌صورت زیر ارائه نمود.

$$J(x) = \begin{cases} e^{-((۱/(۱-x)^۲+۱/(۱+x)^۲)} & x \in]-۱,۱[\\ ۰ & x \notin]-۱,۱[\end{cases}$$

در اینجا $J \in C^\infty(\mathbb{R})$. حال برای هر $x = (x_۱, \cdots, x_n)$ قرار می‌دهیم

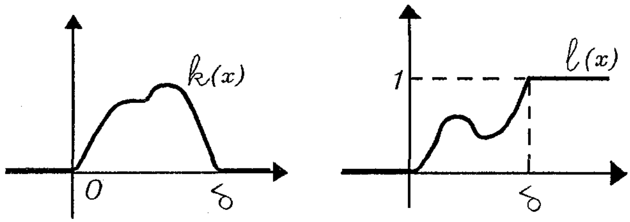
$$g(x) = J(\frac{x_۱}{\varepsilon})J(\frac{x_۲}{\varepsilon})\cdots J(\frac{x_n}{\varepsilon})$$

ε را به‌اندازه کافی کوچک طوری اختیار می‌کنیم که $]-\varepsilon,\varepsilon[\subset x(V)$. حال تابع زیر را در نظر می‌گیریم

$$\varphi_p = g \circ x \in C^\infty(V)$$

φ_p را می‌توان به صورت صفر به خارج V توسعه داده و لذا می‌توان آنرا به توابع $C^\infty(M)$ توسیع داد. این تابع توسعه یافته را با $\tilde{\varphi}_p \in C^\infty(M)$ نمایش می‌دهیم. به ازاء هر نقطه $p \in K$ به این صورت $\tilde{\varphi}_p$ را می‌سازیم. چون K فشرده است می‌توان آنرا توسط

تعدادی متناهی از کارتها مانند (x_i, V_i)، $i = ۱, \cdots, m$ پوشانید. فرض کنیم



شکل ۲.۱۵ : تابعی که به جز یک فاصله همه‌جا ثابت است

$$Supp\, \tilde{\varphi} \subset U \quad , \quad \tilde{\varphi} \in C^\infty(M) \quad , \tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_{p_۱} + \cdots + \tilde{\varphi}_{p_m}$$

بعلاوه $\tilde{\varphi}|_K > ۰$، بنابراین عددی مانند $\delta > ۰$ موجود است بطوریکه

$$\tilde{\varphi}|_K \geq \delta$$

حال برای ارائه φ نگاشت ℓ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم $\ell \in C^\infty(I\!R)$

$$\ell(x) = \frac{\int_۰^x k(t)dt}{\int_۰^\delta k(t)dt}$$

در اینجا $k \in C^\infty(I\!R)$ که همواره $k \geq ۰$ بوده و خارج فاصله $]۰, \delta[$ داریم $k = ۰$

براحتی می‌توان نشان داد که تابع $\varphi = \ell \circ \tilde{\varphi}$ شرایط حکم گزاره را دارد. □

خانواده توابع C^∞ از M در N را توسط $C^\infty(M, N)$ نمایش می‌دهیم. در این صورت نتیجه زیر را از گزاره بالا خاطرنشان می‌سازیم.

نتیجه: **فرض کنیم U بازی از M بوده و $f \in C^\infty(U, M')$ آنگاه با تحدید U می‌توان f را به یک تابع C^∞ روی M توسیع داد. به عبارت دیگر وجود دارد بازی مانند U'، زیر مجموعه U، $U' \subset U$ و تابعی مانند $\tilde{f} \in C^\infty(M, M')$ بطوریکه**

$$f|_{U'} = \tilde{f}|_{U'}$$

اثبات: در حقیقت چون M موضعاً فشرده می‌باشد، (بنابر قضیه‌ای در بخش توپولوژی منیفلدها هر منیفلد هاسدرف موضعاً فشرده است.)، یک همسایگی فشرده مانند K وجود دارد بطوریکه $K \subset U$. فرض کنیم U' بازی در K باشد. حال تابع φ در گزاره بالا را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\varphi|_{f(k)} = ۱ \ , \quad Supp\, \varphi \subset \overset{\circ}{\widehat{f(U)}}$$

تابع $f \circ \varphi$ برابر f روی K و بنابراین روی U' می‌باشد و می‌توان آنرا به صورت صفر به خارج U نیز توسعه داد. تابعی که به این صورت توسیع پیدا کرده است تابع مورد نظر می‌باشد. $\square$

تذکر: *در حالت کلی نمی‌توان یک تابع C^∞ را که در یک باز تعریف شده است بطور C^∞ توسعه داد. بعنوان مثال تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ که در فاصله $]۰, ۱[$ از کلاس C^∞ می‌باشد را در نظر بگیرید.*

پیوست II: افراز واحد

مقدمه: در اینجا در مورد تعریف افراز واحد و اثبات وجود آن بحث می‌نمائیم. ابتدا به یادآوری چند تعریف و قضیه از توپولوژی پرداخته سپس با استفاده از آن ثابت می‌کنیم که هر منیفلد M دارای یک افراز واحد است اگر و تنها اگر پیرافشرده باشد. در خاتمه یک مثال مقدماتی نیز آورده شده است.

الف: یادآوری چند تعریف از توپولوژی

تعریف: *یک فضای هاسدرف را* **نرمال**[1] *گوئیم اگر هر زوج از بسته‌های مجزای آنرا بتوان توسط دو باز از یکدیگر جدا نمود.*

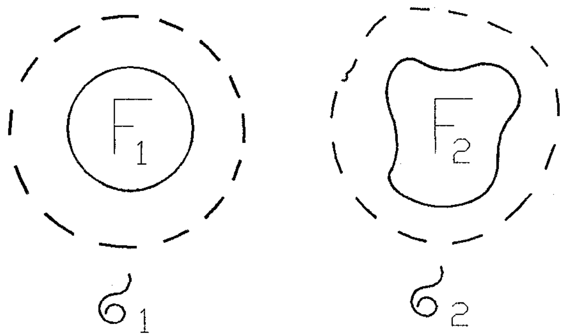
قضیه اوریسون:[2] **فضای توپولوژیک M نرمال است اگر و تنها اگر به ازاء بسته‌های مجزای دلخواه F_1 و F_2 تابع پیوسته‌ای مانند $f : M \to [0, 1]$ موجود باشد به‌طوری‌که**

$$f|_{F_1} = 0 \quad , \quad f|_{F_2} = 1$$

---

[1] *Normal Space*

[2] *Urysohn theorem*



شکل ۲.۱۶ : فضای نرمال

تعریف: یک پوشش فضای توپولوژیک M را **موضعاً متناهی**[1] گویند، اگر به ازاء هر نقطه آن یک همسایگی آن موجود باشد که فقط تعدادی متناهی از اعضای پوشش را قطع نماید.

تعریف: یک فضای توپولوژیک هاسدرف **راپیرا فشرده**[2] گوئیم اگر برای هر پوشش باز $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ یک تظریف باز $(V_\beta)|_{\beta\in B}$ موضعاً متناهی موجود باشد که فضا را بپوشاند. (تظریف یعنی: $\forall\beta \in B, \exists\alpha \in A : V_\beta \subset U_\alpha$)

با استفاده از تعاریف فوق می‌توان لم زیر را ثابت نمود. کاربرد این لم در اثبات وجود افراز واحد در بخش بعد آورده خواهد شد.

لم انقباض[3]: فرض کنیم M یک فضای توپولوژیک نرمال و $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ یک پوشش باز موضعاً متناهی آن باشد. می‌توان یک پوشش باز $(U'_\alpha)_{\alpha\in A}$ طوری روی M ساخت که همواره داشته باشیم

$$\overline{U'}_\alpha \subset U_\alpha$$

قضیه زیر بر این اساس اثبات می‌شود و کاربرد فراوان دارد.

---

[1] *Locally finite (Locallement finie)*

[2] *Paracompact*

[3] *Contraction lemma*

قضیه: ۱ـ فضای توپولوژیک M متریک‌پذیر است اگر و تنها اگر موضعاً متریک‌پذیر و پیرافشرده باشد.

۲ـ هر فضای توپولوژیک پیرافشرده، نرمال است.

۳ـ هر فضای توپولوژیک هاسدرف فشرده، پیرافشرده است.

ب: افراز واحد[1]

افراز واحد عبارت است از خانواده‌ای از توابع که وجود آنها روی یک مجموعه از اهمیت خاصی در هندسه، آنالیز و توپولوژی برخوردار است. در اینجا پس از تعریف افراز واحد برقراری شرایط وجود آنرا روی منیفلدها ثابت می‌نمائیم. سپس با استفاده از این شرایط تعریف ساده‌تری از آن را که اغلب مورد استفاده فیزیکدانان است بیان می‌کنیم.

تعریف اول: *فرض کنیم M یک منیفلد C^k و $R = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ یک پوشش باز M باشد.* **یک افراز واحد از کلاس C^k وابسته به پوشش R** *عبارت است از خانواده‌ای از زوج‌های $(V_\beta, \varphi_\beta)_{\beta \in B}$ که در آن $\{V_\beta\}$ یک تظریف موضعاً متناهی $\{U_\alpha\}$ بوده و φ_β توابعی هستند که در شرایط زیر صدق می‌کنند.*

$$\varphi_\beta : M \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad \varphi_\beta \in C^k(M)$$

$$\forall x \in M, \forall \beta \in B \qquad\qquad ۰ \leq \varphi_\beta(x) \leq ۱ \qquad\qquad (I$$

$$Supp\ \ \varphi_\beta \subset V_\beta \qquad\qquad (II$$

$$\forall x \in M \qquad\qquad \sum_{\beta \in B} \varphi_\beta(x) = ۱ \qquad\qquad (III$$

در این تعریف شرط موضعاً متناهی بودن $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$ تضمین کننده وجود تعدادی متناهی جمله در شرط III و در نتیجه متناهی بودن مجموع می‌باشد. از شرط II نتیجه می‌شود اگر $x \notin V_\beta$ آنگاه $\varphi_\beta(x) = ۰$.

---

[1] $Partition\ of\ Unity\ (Partition\ de\ l'unite')$

حال اگر فرض کنیم f یک تابع حقیقی روی M باشد، با استفاده از افراز واحد می‌توان آنرا به‌صورت زیر نوشت

$$f \,:\, M \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(p)=\sum_{\beta} f(p)\varphi_{\beta}(p)=\sum_{\beta} f_{\beta}(p)$$

در اینجا فرض شده است $f_{\beta}(p)=f(p)\varphi_{\beta}(p)$

قضیه: فرض کنیم M یک منیفلد پیرافشرده از کلاس C^kباشد. آنگاه برای هر پوشش $\{U_{\alpha}\}_{\alpha\in A}$ یک افراز واحد از کلاس C^k تحت این پوشش وجود دارد.

اثبات: فرض کنیم $x\in M$ و U_{α_x} یک باز از پوشش، شامل x باشد. فرض کنیم K_x یک همسایگی فشرده از x، در U_{α_x} باشد. پوشش زیر را در نظر می‌گیریم

$$R=\{Int\ \ K_x\ \ ,\ \ x\in M\}$$

چون M پیرافشرده است، این پوشش دارای یک تظریف موضعاً متناهی $\{V_{\beta}\}_{\beta\in B}$ می‌باشد. و چون M نرمال است بنابر لم انقباض یک پوشش $\{W_{\beta}\}_{\beta\in B}$ موجود است بطوریکه

$$\forall\beta\in B\ ,\ \overline{W}_{\beta}\subset V_{\beta}\subset K$$

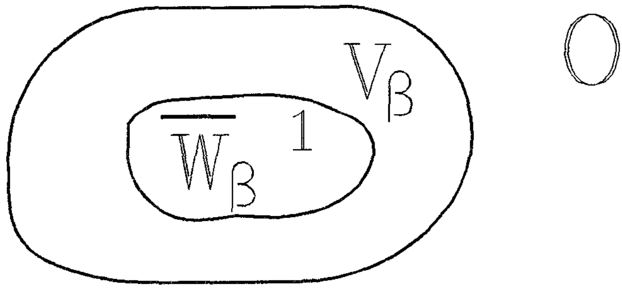
(K عبارت است از یک زیر مجموعه فشرده در خانواده R که به β بستگی دارد)
چون $\overline{W}_{\beta}\subset K$ بنابراین $\overline{W}_{\beta}$ فشرده است. لذا بنابر گزاره ثابت شده در پیوست I، تابعی مانند ψ_{β} از کلاس C^k وجود دارد بطوریکه

$$\psi_{\beta}: M\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$\forall x\in M\ ,\ \text{۰}\leq\psi_{\beta}(x)\leq\text{۱}$$

$$\psi_{\beta}|_{\overline{W}_{\beta}}=\text{۱}$$

$$Supp\Psi_{\beta}\subset V_{\beta}$$



شکل ۲.۱۷ : مقدار تابع روی $\overline{W}_\beta$ برابر ۱ و خارج V_β صفر است.

حال تابع $\psi : M \longrightarrow I\!R$ را در نظر می‌گیریم که توسط رابطه زیر تعریف می‌شود

$$\psi(x) = \sum_{\beta\in B} \psi_\beta(x)$$

چون $\{V_\beta\}$ موضعاً متناهی است مجموع بالا در یک همسایگی هر نقطه به صورت مجموعی متناهی است.

به ازاء هر $x \in M$ داریم $\psi(x) \geq ۱$. قرار می‌دهیم $\varphi_\beta = \frac{\psi\beta}{\psi}$، داریم

$$\sum_{\beta\in B} \varphi_\beta(x) = ۱$$

لذا افراز واحد مورد نظر توسط زوج $\{V_\beta, \varphi_\beta\}_{\beta\in B}$ تعریف می‌گردد. □

بنابر قضیه فوق اگر منیفلد M پیرافشرده باشد همیشه افراز واحد در روی آن تعریف می‌گردد. عکس قضیه فوق نیز همواره برقرار است به عبارت دیگر **"منیفلد M دارای یک افراز واحد است اگر و تنها اگر پیرافشرده باشد."** لذا براین اساس با فرض پیرافشرده بودن M می‌توان افراز واحد را به‌صورت زیر نیز تعریف نمود.

مثال: دایره $S^۱$ را در نظر گرفته یک افراز واحد روی آن تعریف و اشاره‌ای به کاربرد آن می‌کنیم. فرض کنیم کارت‌های $(x_۱, U_۱)$ و $(x_۲$ و $U_۲)$ تشکیل یک اطلس روی $S^۱$

بدهند.

$$\begin{aligned} x_1 : S^1 &\longrightarrow (0, 2\pi) & U_1 = S^1 - \{(1, 0)\} \\ (\cos\theta, \sin\theta) &\mapsto \theta \\ x_2 : S^1 &\longrightarrow (-\pi, +\pi) & U_2 = S^1 - \{(-1, 0)\} \\ (\cos\theta, \sin\theta) &\mapsto \theta \end{aligned}$$

حال توابع φ_i را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم $\varphi_1(\theta) = \sin^2\theta/2$ و $\varphi_2(\theta) = \cos^2\theta/2$ براحتی مشاهده می‌شود که خانواده $\{\varphi_i(\theta)\}$ در شرایط I ، II و III صدق نموده لذا یک افراز واحد وابسته به پوشش $\{U_i\}$ است.

حال فرض کنیم $f : S^1 \to I\!R$ به‌صورت $f(\theta) = \cos^2\theta$ تعریف شده باشد همانطور که قبلاً نیز اشاره نمودیم، این تابع را می‌توان به‌صورت $f = \varphi_1 f_1 + \varphi_2 f_2$ نیز نوشت

$$f(\theta) = \sin^2\theta/2\cos^2\theta + \cos^2\theta/2\cos^2\theta$$

نظر به اینکه افراز واحد در نظریه انتگرال گیری اهمیت اساسی دارد در اینجا اشاره‌ای به کاربرد افراز واحد در محاسبه انتگرال ساده زیر می‌نمائیم

$$\int_{S^1} f(\theta)d\theta = \int_{S^1} \cos^2\theta d\theta = \int_{S^1}(\sin^2\theta/2\cos^2\theta + \cos^2\theta/2\cos^2\theta)d\theta$$

با توجه به ناحیه‌ای که φ_1 و φ_2 ناصفر هستند داریم

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \sin^2\theta/2\cos^2\theta d\theta + \int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2\theta/2\cos^2\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi = \pi \end{aligned}$$

(البته می‌توانستیم مستقیماً نیز $\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta = \pi$ را محاسبه نمائیم ولی منظور ما استفاده از افراز واحد بود) کاربردهای اساسی از افراز واحد را در فصول بعد خواهیم دید.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

فصل ۳: زیرمنیفلدها[۱]

مقدمه

در فصول قبل به تفصیل با خصوصیات توپولوژیکی و دیفرانسیل‌پذیری منیفلدها آشنا شدیم طبیعی است که این خواص را برای زیر مجموعه‌هایی از منیفلدها نیز مورد مطالعه قرار دهیم. در این راستا مطالعه توپولوژی این زیرمجموعه‌ها، که از اهمیت اساسی برخوردار بوده، مبنایی است برای تعریف این زیرمجموعه‌ها که آنها را زیرمنیفلد می‌نامیم.

در این فصل ابتدا در بخش ۱§ به تعریف نگاشت جادهنده یا ایمرسیون پرداخته قضیه رتبه روی منیفلدها را با استفاده از قضیه رتبه در $I\!R^n$ (این قضیه در پیوست فصل یک آورده شده است) اثبات می‌نماییم. در بخش‌های ۲§ و ۳§ به بررسی خواص عمومی جادهنده یا ایمرسیون پرداخته مثال‌های متنوعی از آن می‌آوریم سپس با استفاده از این نگاشت تعریف زیرمنیفلد جادهنده عنوان شده مثال‌های متنوعی ارائه می‌شود.

در بخش ۴§ با بررسی توپولوژی ذاتی و توپولوژی القایی زیرمنیفلد جادهنده، به بررسی مشکلات موجود در تعریف زیرمنیفلد جادهنده پرداخته بررسی می‌کنیم که تحت چه شرایطی دیفرانسیل‌پذیری یک تابع روی یک منیفلد برای زیرمنیفلدهای آن نیز قابل تعمیم است. نتیجه

---

[۱] $submanifolds\ (sous - varie'te')$

این مطالعات ارائه تعریف زیرمنیفلد نشاننده است که با افزودن شرط انطباق توپولوژی ذاتی و توپولوژی القایی صورت می‌گیرد. در بخش §۵ با استفاده از یک قضیه روش ساخت زیر منیفلدهای نشاننده را بیان می‌نمائیم. تمرینات بخش‌های گذشته پس از درک مثال‌های مذکور در هر بخش، براحتی قابل حل بوده تفکر در آنها به خوانندگان توصیه می‌گردد. در بخش §۶ خواص عمومی پوشاننده را مطالعه می‌کنیم.

بخش §۷ به تعریف زیرفضای مماس بر یک زیرمنیفلد اختصاص دارد. نظر به اینکه حذف این بخش لطمه‌ای به پیوستگی مطالب در فصول آینده نمی‌زند به خواننده مبتدی توصیه می‌گردد این بخش را در نگرش‌های بعدی خود مورد مطالعه قرار دهد.

پیوست I در پایان این فصل مربوط به منیفلدهای خارج قسمتی است که در اینجا بطور مبسوطی مورد مطالعه قرار گرفته است. نظر به اینکه وسعت مطالب مذکور در این بخش می‌تواند موجب پراکندگی آموخته‌های خوانندگانی گردد که برای اوّلین‌بار با مفهوم منیفلدها آشنا می‌شوند این مبحث را به‌عنوان پیوست فصل سوم آورده‌ایم.

۱.۳ § جادهنده یا ایمرسیون وقضیه رتبه روی منیفلدها

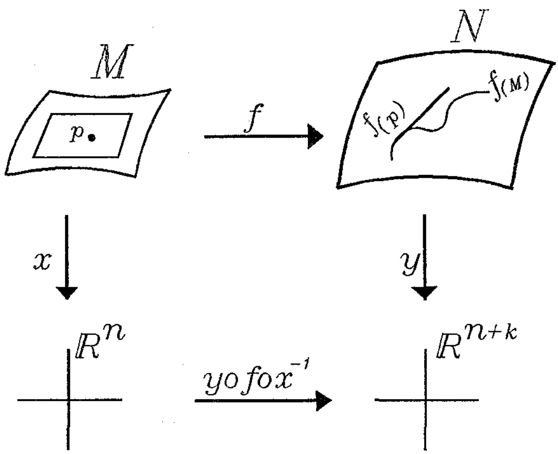
فرض کنیم f یک نگاشت از کلاس C^1 بین دو منیفلد M و N باشد، خانواده این توابع را با $C^1(M,N)$ نمایش می‌دهیم. گوئیم رتبه f در نقطه p برابر r است و می‌نویسیم $(rkf)_p = r$ اگر رتبه نگاشت خطی f_* در p برابر r باشد.

$$(f_*)_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N \qquad\qquad f \in C^1(M,N)$$

(به‌عبارت دیگر اگر بعد فضای تصویر f_* برابر r باشد). اگر رتبه f در نقطه p برابر $\dim M$ باشد $(f_*)_p$ یک به یک بوده و $\dim M \leq \dim N$. اگر رتبه f در p برابر $\dim N$ باشد $(f_*)_p$ پوششی بوده و $\dim M \geq \dim N$. فرض کنیم (x,U) و (y,V) دو کارت در همسایگی p و $f(p)$ باشند داریم

$$(rkf)_p = rk\left\|\frac{\partial y^i \circ f \circ x^{-1}}{\partial x^j}\right\|_{x(p)}$$

که برای سادگی آنرا با $\left\|\dfrac{\partial f^i}{\partial x^j}\right\|_p$ rk نیز نمایش می‌دهیم



شکل ۱ .۳: نگاشت جادهنده یا ایمرسیون

یادآوری می‌کنیم که رتبه f با استفاده از کارت‌های موضعی محاسبه می‌شود اما تعریفی که در بالا آورده شد یک تعریف ذاتی بود، (یعنی بدون کمک وانتخاب کارت‌ها بیان شد) در نتیجه رتبه f به انتخاب کارت بستگی ندارد.

تعریف: فرض کنیم f نگاشتی از M در N باشد گوئیم f **در** p **یک جادهنده یا ایمرسیون**[۱] است اگر رتبه f در p برابر بعد حوزه تعریف f باشد. در این‌صورت $f: M^n \to N^{n+k}$ و داریم $(rkf)_p = n \quad f \in C^1(M, N)$

گوئیم f **در نقطه** p **یک پوشاننده یا سوبمرسیون**[۲] است اگر رتبه f در p برابر بعد حوزه مقادیر f باشد.

در اینصورت $f: M^{n+k} \to N^n$ و داریم $(rkf)_p = n$

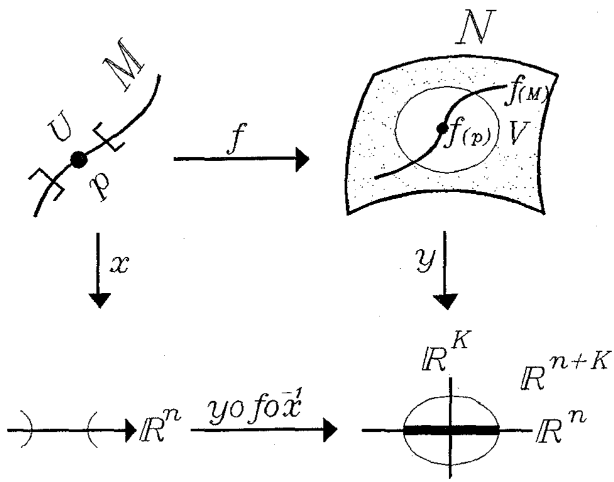
f را **جادهنده** (یا بطور مشابه **پوشاننده**) گوئیم اگر در تمام نقاط p از M جادهنده (یا بطور

---

[۱] Immersion

[۲] Submersion

مشابه پوشاننده) باشد. حال به سادگی می توانیم قضیه رتبه برای نگاشت‌های بین فضاهای $I\!R^n$ و $I\!R^m$ را به نگاشت‌های بین منیفلدها تعمیم دهیم. مسئله دیگری که در اینجا از اهمیت خاصی برخوردار است روش تعمیم قضیه‌ها از فضای اقلیدسی به روی منیفلدها با استفاده از کارت‌ها است که در اثبات قضیه رتبه با آن آشنا می‌شویم.



شکل ۳.۲: f در p جادهنده است

قضیه رتبه روی منیفلدها[1]

الف) فرض کنیم رتبه نگاشت $f : M^n \to N^{n+k}$ در نقطه p برابر n باشد. (f در نقطه p ایمرسیون یا جادهنده باشد) آنگاه برای هر کارت موضعی (x, U) در همسایگی p و یک کارت موضعی (y, V) در همسایگی $f(p)$ وجود دارد بطوریکه داشته باشیم

$$y \circ f \circ x^{-1} : (a_1 \cdots, a_n) \mapsto (a_1, \cdots, a_n, 0, \cdots, 0)$$

در نتیجه اگر f_* در هر نقطه p یک به یک باشد f بطور موضعی یک به یک است،

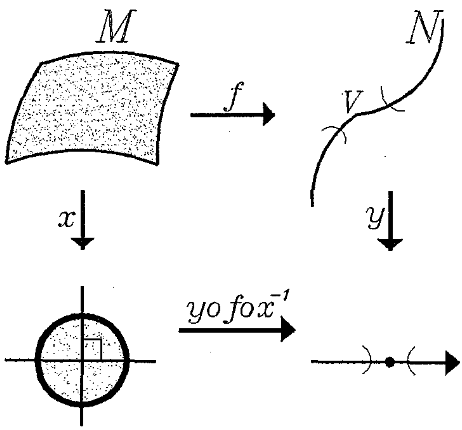
ب) فرض کنیم رتبه نگاشت $f : M^{n+k} \to N^n$ در نقطه p برابر n باشد.

---

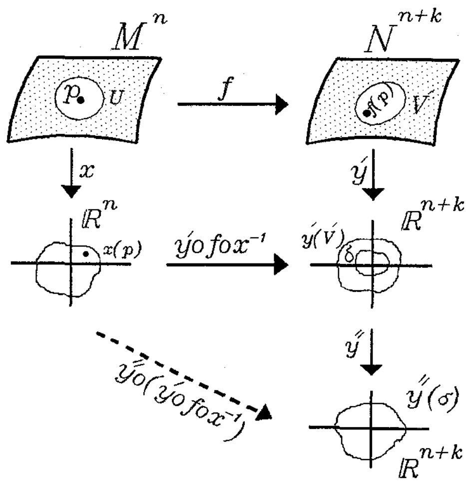
[1] *rank theorem*

f در نقطه p سوبمرسیون یا پوشاننده باشد) آنگاه برای هر کارت موضعی (y,V) در همسایگی $f(p)$ یک کارت موضعی (x,U) در همسایگی p وجود دارد بطوریکه داشته باشیم $y\circ f\circ x^{-1}:(a_1,\cdots,a_n,\cdots a_{n+k})\mapsto(a_1,\cdots,a_n)$

در نتیجه اگر f_* در هر نقطه p پوششی باشد f بطور موضعی پوششی است، (یعنی برای هر نقطه p یک همسایگی U موجود است که $f(U)$ یک همسایگی $f(p)$ را می‌پوشاند)



شکل ۳.۳: f در p پوشاننده است



شکل ۳.۴: کارت تغییر مختصات

اثبات : الف) فرض کنیم رتبه $f : M^n \to N^{n+k}$ در p برابر n باشد. اگر (x,U) و (y',V') دو کارت در همسایگی p و $f(p)$باشند با توجه به شکل ۳.۴ داریم

$$y' \circ f \circ x^{-1} : x(U) \subset I\!R^n \to y'(V') \subset I\!R^{n+k}$$

و $rk(y' \circ f \circ x^{-1})_{x(p)} = n$ بنابر بخش الف از قضیه رتبه روی $I\!R^n$ یک کارت تغییر مختصات روی $y'(V')$ یعنی بازی مانند σ، $\sigma \subset y'(V')$ و یک دیفئومورفیسم y'' وجود دارد

$$y'' : \sigma \to y''(\sigma) \subset I\!R^{n+k}$$

بطوریکه $y'' \circ y' \circ f \circ x^{-1}$ یعنی نگاشت زیر یک به یک باشد.

$$(a_1, \cdots, a_n) \to (a_1, \cdots a_n, 0, \cdots, 0)$$

بنابراین می‌توان گفت برای هر کارت (x,U) در همسایگی p یک کارت (y,V) در همسایگی $f(p)$ وجود دارد $(V = {y'}^{-1}(\sigma)), y = y'' \circ y'$ بطوریکه در این مختصات f بطور موضعی بصورت زیر نوشته شود

$$y \circ f \circ x^{-1} : (a_1, \cdots, a_n) \longrightarrow (a_1, \cdots, a_n, 0, \cdots, 0)$$

در نتیجه f بطور موضعی یک به یک است.

ب) فرض کنیم رتبه $f : M^{n+k} \longrightarrow N^n$ در p برابرn باشد. اگر (x',U') و (y,V) کارت‌های موضعی حول p و $f(p)$ باشند داریم

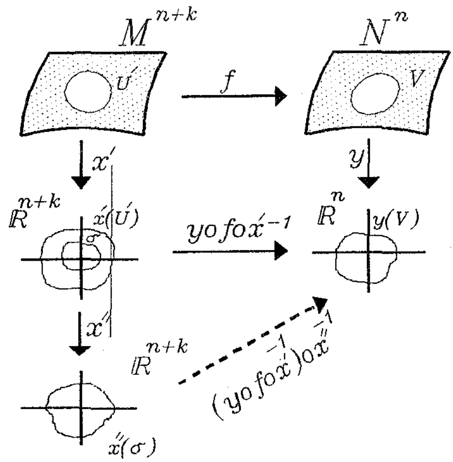
$$y \circ f \circ {x'}^{-1} : x'(U') \subset I\!R^{n+k} \longrightarrow y(V) \subset I\!R^n$$

و رتبه $rk(y \circ f \circ {x'}^{-1})_p = n$ بنابر بخش ب از قضیه رتبه روی $I\!R^n$ یک کارت تغییر مختصات روی $x'(U')$ یعنی بازی مانند σ، $\sigma \subset x'(U')$ و یک دیفئومورفیسم x'' وجود دارد

$$x'' : \sigma \longrightarrow x''(\sigma) \subset I\!R^{n+k}$$

بطوریکه نگاشت $(y \circ f \circ {x'}^{-1}) \circ {x''}^{-1}$ بصورت زیر نوشته می‌شود

$$(a_1, \cdots, a_n, \cdots, a_{n+k}) \longrightarrow (a_1, \cdots, a_n)$$



شکل ۳.۵ : کارت تغییر مختصات

بنابراین به ازاء هر کارت (y,V) در همسایگی $f(p)$ یک کارت موضعی (x,U) در همسایگی p وجود دارد $(x = x''\circ x', U = x'^{-1}(\sigma))$ بطوریکه در این مختصات موضعی f بصورت زیر نوشته شود

$$y\circ f\circ x^{-1} : (a_1,\cdots,a_n,\cdots,a_{n+k}) \longrightarrow (a_1,\cdots,a_n)$$

در نتیجه f بطور موضعی پوششی است. □

۲.۳ § خواص عمومی جادهنده یا ایمرسیون

بنابر قضیه رتبه هر جادهنده در مختصات موضعی بصورت زیر نوشته می‌شود

$$y\circ f\circ x^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$$

$$(a_1,\cdots,a_n) \to (a_1,\cdots,a_n,0,\cdots,0)$$

در این صورت f **بطور موضعی یک به یک** است، (یعنی در یک همسایگی هرنقطه یک به یک است) اما جادهنده‌ها الزاما"بطور سرتاسری[1] (درکل حوزه تعریف) یک به یک نیستند

[1] globally

بعنوان مثال نگاشت

$$f : I\!R \to I\!R^{۲}$$
$$\theta \to (\cos\theta, \sin\theta)$$

یک جادهنده است زیرا $(۰,۰) \neq f'(\theta)$، $\forall\theta$ و $rk\ f = ۱$ این نگاشت بطور موضعی یک به یک است اما بطور سرتاسری یک به یک نیست.

از طرف دیگر یک نگاشت یک به یک (حتی بطور سرتاسری یک به یک) الزاماً یک جادهنده نیست. بعنوان مثال نگاشت زیر یک به یک و بطور سرتاسری یک به یک می‌باشد اما در تمام نقاط جادهنده نیست..

$$f : I\!R \longrightarrow I\!R$$
$$x \mapsto x^{۳}$$

رتبه f در نقطه صفربرابر صفر است $rk(f_*)_۰ = ۰$ زیرا $f'(۰) = ۰$

مثال برای جادهنده:

۱ـ نگاشت f که تصویرآن دایره $S^۱$ است جادهنده می‌باشد.

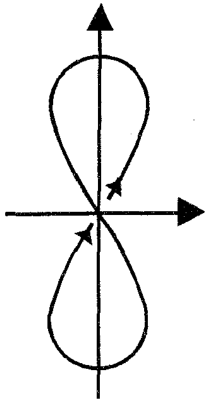
$$f : I\!R \longrightarrow I\!R^{۲} \qquad f : \theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$$

۲ـفرض کنیم $H = \{(x,y) \in I\!R^{۲} | x = \sin ۲\theta, y = \sin\theta\}$ قبلاً دیدیم توسط یک کارت، اطلس آن مشخص می‌شود. (هشت لاتین)

$$x : H \longrightarrow I\!R$$
$$(\sin ۲\theta, \sin\theta) \mapsto \theta \qquad\qquad ۰ < \theta < ۲\pi$$

x یک به یک است وتصویر آن بازه ای از $I\!R$ است. با استفاده از اطلس طبیعی $I\!R^{۲}$ نگاشت یک به یک زیر را داریم

$$J : H \longrightarrow I\!R^{۲}$$
$$p = x^{-۱}(\theta) \mapsto (\sin ۲\theta, \sin\theta)$$



شکل ۳.۶: هشت لاتین تصویر یک نگاشت جادهنده است

که جادهنده است زیرا داریم

$$rk(J_*) = rk(J \circ x^{-1}) = rk\begin{pmatrix} ۲\cos ۲\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = ۱$$

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{J} & J(H) \subset I\!R^{۲} \\ x\downarrow & \nearrow J\circ x^{-۱} & \\ I\!R & & \end{array}$$

۳ـ فرض کنیم تابع $f : I\!R \to I\!R^{۱}$ به‌صورت زیر تعریف شود $f(t) = (a\cos t, a\sin t, t)$ آنگاه f یک جادهنده بوده نمودار آن منحنی مارپیچ است. زیرا

$$rkf = rk|| - a\sin t, a\cos t, ۱|| = ۱$$

۴ـ نشان دهید نگاشت $f : (x, y) \to (x, y, x^{۲}+y^{۲})$، یک جادهنده است. (تصویر این نگاشت سهمی‌گون $z = x^{۲} + y^{۲}$ در $I\!R^{۳}$ است.) اما نگاشت $(x, y) \longrightarrow (x, y, \sqrt{x^{۲} + y^{۲}})$ جادهنده (در تمام نقاط) نیست. (تصویر آن نیم مخروط $z = \sqrt{x^{۲} + y^{۲}}$ است.)

۵ـ به راحتی می‌توان درستی قضیه رتبه را برای نگاشت $f : t \to (t, t^{۲})$ بررسی نمود.

۳.۳ زیرمنیفلد جادهنده[1]

تعریف: فرض کنیم M و N دو منیفلد دیفرانسیل‌پذیر بوده و $N \subset M$ باشد. گوئیم N یک زیرمنیفلد جادهنده از M است اگر نگاشت شمول طبیعی

$$\begin{aligned} J : N &\longrightarrow M \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

جادهنده باشد.

مثال ۱: در فصل یک دیدیم که $S^۱$ منیفلد دیفرانسیل‌پذیر است. یکی از کارتهای $S^۱$ را به‌صورت زیر تعریف نمودیم

$$\begin{aligned} x : S^۱ - \{(۱, ۰)\} &\longrightarrow I\!R \\ (\cos\theta, \sin\theta) &\mapsto \theta \qquad\qquad ۰ < \theta < ۲\pi \end{aligned}$$

حال برای آنکه نشان دهیم $S^۱$ زیرمنیفلد جادهنده $I\!R^۲$ است نگاشت شمول طبیعی زیر را در نظر گرفته نشان می‌دهیم یک جادهنده است.

$$\begin{aligned} J : S^۱ &\to I\!R^۲ \\ p = x^{-۱}(\theta) &\to (\cos\theta, \sin\theta) \end{aligned}$$

برای آنکه J جادهنده باشد باید رتبه $J \circ x^{-۱}$ در تمام نقاط $S^۱$ برابر یک باشد.

$$\begin{array}{ccc} S^۱ & \xrightarrow{J} & J(S) \subset I\!R^۲ \\ x \downarrow & \nearrow & J \circ x^{-۱} \\ I\!R & & \end{array}$$

$$rk(J) = rk(J \circ x^{-۱}) = rk\|-\sin\theta, \cos\theta\| = ۱$$

مثال ۲: هشت لاتین $H = \{(x, y) | x = \sin ۲\theta, y = \sin\theta\}$ یک زیرمنیفلد جادهنده $I\!R^۲$ است. ابتدا نشان می‌دهیم که H منیفلد دیفرانسیل‌پذیر است. قبلاً دیدیم x : $(\sin ۲\theta, \sin\theta) \to \theta$ با فرض $۰ < \theta < ۲\pi$ یک کارت کلی روی H تعریف می‌کند.

---

[1] *Immersed Submanifold , (Sous – variété immergée)*

کارت دیگری روی H به‌صورت $x' : (\sin ۲\theta, \sin\theta) \to \theta$ با فرض $\circ < \theta < \pi$ تعریف می‌کنیم. نگاشت تغییر کارت عبارت است از

$$\begin{aligned} x' \circ x^{-۱} :]\circ, ۲\pi[&\to]\circ, \pi[\\ \theta &\to \theta/۲ \end{aligned}$$

لذا $x' \circ x^{-۱}$ و $x \circ x'^{-۱}$ از کلاس C^∞ می‌باشند و خانواده آنها تشکیل یک اطلس C^∞ روی M می‌دهد. حال مشابه مثال بالا ثابت می‌شود که H یک زیرمنیفلد جادهنده $I\!R^۲$ است.

مثال ۳: در مثال ۹ از بخش ۲§ در فصل اول دیدیم که $S^۲$ با شش کارت یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر است. در اینجا نشان می‌دهیم که $S^۲$ زیرمنیفلد جادهنده $I\!R^۳$ است.

$$\begin{aligned} x :\ & S^۲_+ \to I\!R^۲ \\ & (x,y,z) \to (x,y) \end{aligned} \qquad\qquad z = \sqrt{۱ - x^۲ - y^۲}$$

حال نگاشت شمول طبیعی زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{array}{l} S^۲ \xrightarrow{J} I\!R^۳ \\ x \downarrow \nearrow J \circ x^{-۱} \\ I\!R^۲ \end{array}$$

$$J \circ x^{-۱} : (x,y) \to (x,y,z)$$

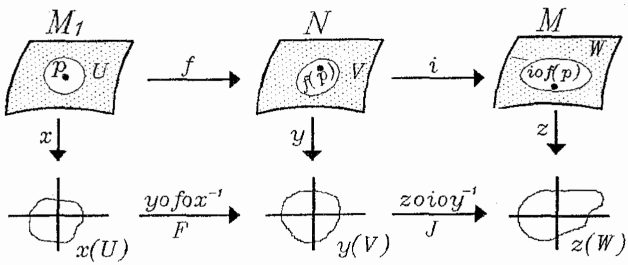
$$rk(J) = rk(J \circ x^{-۱}) = rk \left\| \begin{matrix} ۱ & \circ & \dfrac{-x}{\sqrt{۱ - x^۲ - y^۲}} \\ \circ & ۱ & \dfrac{-y}{\sqrt{۱ - x^۲ - y^۲}} \end{matrix} \right\| = ۲$$

زیرا در کارت $S^۲_+$ همواره $x^۲ + y^۲ < ۱$.

قضیه: فرض کنیم i یک نگاشت جادهنده، f یک نگاشت پیوسته و $i \circ f$ دیفرانسیل‌پذیر باشد آنگاه f دیفرانسیل پذیر است. $M^m_۱ \xrightarrow{f} N^n \xrightarrow{i} M^{n+k}$

بعبارت دیگر اگر
$$\left\{ \begin{array}{ll} i & \text{جادهنده} \\ f & \text{پیوسته} \\ i \circ f & \text{دیفرانسیل پذیر} \end{array} \right. \Rightarrow f \text{ دیفرانسیل پذیر است}$$

اثبات: فرض کنیم $p \in M_1$ باشد. کارت هایی در همسایگی p، $f(p)$ و $i \circ f(p)$ به ترتیب (x, U)، (y, V) و (z, W) با توجه به شکل زیر طوری انتخاب می‌کنیم که برای کارت‌های z, y با توجه به قضیه رتبه داشته باشیم



شکل ۳.۷ : ترکیب دو تابع و نگاشت‌های تغییر کارت

$$J : (a_1, \cdots, a_n) \to (a_1, \cdots, a_n, 0, \cdots, 0)$$

چون f پیوسته است با فرض $J = z \circ i \circ y^{-1}$ و $F = y \circ f \circ x^{-1}$، F و $J \circ F$ نیز پیوسته می باشند بنابراین $U^1 = (J \circ F)^{-1}(z(W))$ باز است. با جایگذاری U^1 بجای $x(U)$ می توان بطور موضعی نوشت

$$U^1 \subset \mathbb{R}^m \xrightarrow{F} V^1 \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{J} W^1 \subset \mathbb{R}^{n+k}$$
$$(b_1, \cdots, b_m) \xrightarrow{F} (F^1(b), \cdots, F^n(b))$$
$$(a_1, \cdots, a_n) \xrightarrow{J} (a_1, \cdots, a_n, 0, \cdots, 0)$$

به این صورت داریم

$$J \circ F(b_1, \cdots, b_m) = (F^1(b), \cdots, F^n(b), 0, \cdots, 0)$$

چون $J \circ F$ دیفرانسیل پذیر است F^iها دیفرانسیل پذیر می‌باشند ولذا F و درنتیجه f دیفرانسیل پذیر است □

در قضیه فوق شرایط جادهنده بودن i و پیوستگی f الزامی است. برای روشن شدن این

موضوع به مثال نقض زیر توجه فرمائید.

مثال نقض:

الف) *اگر* i *یک جادهنده نباشد.* فرض کنیم f به‌صورت زیر تعریف شود

$$\begin{array}{ccc} I\!R \xrightarrow{f} & I\!R & \xrightarrow{i} I\!R \\ t \rightarrow & \sqrt[۳]{t} & \\ & r & \rightarrow r^{۳} \end{array}$$

f پیوسته است $i \circ f = Id.$ دیفرانسیل پذیر است اما f دیفرانسیل پذیر نیست.

ب) *اگر* f *پیوسته نباشد.* فرض کنیم f به‌صورت زیر تعریف شود.

$$\begin{array}{ccc} S^{۱} \xrightarrow{f} & I\!R & \xrightarrow{i} S^{۱} \\ (\sin t, \cos t) \xrightarrow{f} & t & \\ \circ \leq t \leq ۲\pi, & r & \xrightarrow{i} (\sin r, \cos r) \end{array}$$

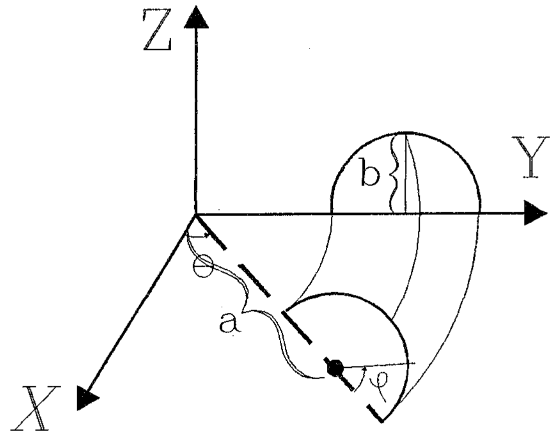
در اینجا $i \circ f$ دیفرانسیل پذیر است. i یک جادهنده است اما f پیوسته نبوده ولذا دیفرانسیل پذیر نمی باشد.

تمرین

۱ ـ چنبره‌ای را که از دوران دایره ای به شعاع b حول دایره ای به شعاع a بدست می‌آید در نظر می‌گیریم. معادله چنبره فوق به‌صورت زیر نوشته می شود. (چرا؟)

$$\begin{aligned} x &= (a + b\cos\varphi)\cos\theta \\ y &= (a + b\cos\varphi)\sin\theta \qquad\qquad a > b > \cdot \\ z &= b\sin\varphi \end{aligned}$$

در فصل اول با استفاده از اطلس حاصلضربی دیدیم چنبره T یک منیلفد ۲− بعدی است. نشان دهید چنبره یک زیرمنیفلد جادهنده $I\!R^{۳}$ است. به شکل صفحه بعد مراجعه کنید.



شکل ۳.۸ : نمودار چنبره حاصل از دوران یک دایره حول محور Zها

۲ـ نشان دهید هر رویه دیفرانسیل پذیر منتظم در $I\!R^{۳}$ که توسط تابع دیفرانسیل‌پذیر $z = f(x, y)$ تعریف شود یک زیرمنیفلد جادهنده است.

۴.۳ § نشاننده وزیرمنیفلدها [1]

فرض کنیم N یک زیرمنیفلد جادهنده M باشد. N یک زیر مجموعه از M است و می‌توان روی آن یک توپولوژی که توسط بازهای M تعریف می شود القاء نمود. (بازهای این توپولوژی القایی عبارتند از اشتراک بازهای M با N). این توپولوژی روی N را **توپولوژی القایی**[2] یا **توپولوژی زیرمجموعه‌ای**[3] می‌نامیم. در حالت کلی این توپولوژی القایی روی N با توپولوژی ذاتی که با توجه به حوزه تعریف کارت ها روی N تعریف می‌شود متفاوت است.

مثال: باز می‌گردیم به مثال هشت لاتین همراه با توپولوژی که توسط حوزه تعریف اطلس زیر تعریف می‌شود این اطلس شامل یک کارت کلی است.

$$\begin{aligned} x : H &\longrightarrow]\circ, ۲\pi[\\ (\sin ۲\theta, \sin\theta) &\mapsto \theta \end{aligned}$$

---

[1] *Imbedding & Submanifolds (Plongement & sous − varie'te')*

[2] *Induit topology (Topologie induite)*

[3] *Subset topology (Topologie de sous − espace)*

چون فقط یک کارت موجود است و x یک همئومورفیسم برای توپولوژی اطلس (توپولوژی ذاتی) است H و $]\circ, ۲\pi[$ همئومورف هستند پس H با توپولوژی ذاتی غیرفشرده است.

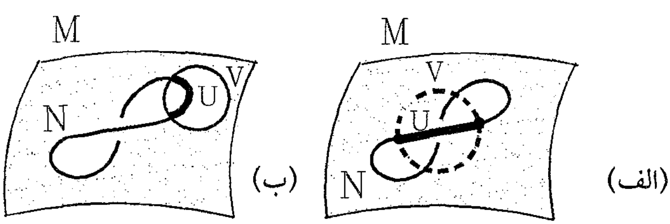
اما از طرف دیگر اگر توپولوژی القایی $I\!R^۲$ روی H تعریف شود، H بسته می‌باشد، زیرا اگر فرض کنیم $f : I\!R^۲ \to I\!R$ به‌صورت $f : (x,y) \to y^۴ - y^۲ + \frac{۱}{۴}x^۲$ تعریف شود براحتی می‌توان بررسی نمود که نمودار معادله $y^۴ - y^۲ + \frac{۱}{۴}x^۲ = \circ$ هشت لاتین است لذا داریم $H = f^{-۱}(\circ)$. چون f پیوسته است H بسته می‌باشد و چون H کراندار نیز هست فشرده می‌باشد.

بنابراین توپولوژی تعریف شده توسط اطلس (توپولوژی ذاتی) بر توپولوژی القاء شده توسط $I\!R^۲$ منطبق نمی‌شود.

مثال دیگری می‌آوریم تا تفاوت این دو توپولوژی روشن‌تر گردد. به نمودار زیر توجه کنید اگر N عبارت باشد از یک هشت که بر روی رویه M قرار دارد می‌توان تفاوت دو توپولوژی روی N را با تفاوت تعریف باز روی هر یک از این دو توپولوژی سنجید.

در شکل (الف) U یک باز برای توپولوژی اطلس N است اما یک باز برای توپولوژی القایی N نیست. زیرا $U \neq V \cap N$.

در شکل (ب) U بازی است برای هر دو توپولوژی روی N زیرا $U = V \cap N$



شکل ۳.۹ : تفاوت دو توپولوژی با تعریف دو باز متفاوت روی آنها

گزاره: فرض کنیم $N \subset M$ یک زیرمنیفلد جا دهنده از M باشد. آنگاه توپولوژی اطلس‌ها روی N یعنی T_N ظریف‌تر است از توپولوژی القایی توسط M که آنرا با T_N^M نشان می‌دهیم.

به عبارت دیگر

$$\mathcal{T}_N^M \subset \mathcal{T}_N$$

اثبات: فرض کنیم V بازی از $\mathcal{T}_M$ و $U = V \cap N$ بازی از $\mathcal{T}_N^M$ باشد کافی است نشان دهیم $U \in \tau_N$. اگر J نگاشت شمول طبیعی باشد $J : N \to M$، J برای توپولوژی اطلس (ذاتی) $\mathcal{T}_N$ و $\mathcal{T}_M$ پیوسته است (زیرا J یک جادهنده است و جادهنده دیفرانسیل‌پذیر است برای توپولوژی اطلسهای M و N) بنابراین

$$U = V \cap N = J^{-1}(V)$$

یک باز $\mathcal{T}_N$ نیز می باشد وحکم ثابت می شود. $\square$

در حالتی که این دو توپولوژی بر یکدیگر منطبق گردند مفهوم زیرمنیفلد به دست می آید که به شکل زیر آن را تعریف می‌نمائیم.

تعریف: *فرض کنیم M یک منیفلد باشد. یک زیرمنیفلد جادهنده N را* **زیرمنیفلد**[1] *M گوئیم اگر توپولوژی اطلس (ذاتی) N بر توپولوژی القایی توسط M روی N منطبق باشد.*

اگر یک زیرمنیفلد جادهنده فشرده باشد آنگاه بنابر قضیه زیر یک زیرمنیفلد است.

قضیه: هر زیرمنیفلد جادهنده فشرده (برای توپولوژی اطلس) یک زیرمنیفلد است.

اثبات: برای آنکه توپولوژی اطلس N بر توپولوژی القایی توسط M روی N منطبق باشد لازم و کافی است که نگاشت زیر همئومورفیسم باشد.

$$\overline{J} : (N, \tau_N) \longrightarrow (J(N)\ ,\ \tau_N^M)$$

در اینجا J نگاشت شمول طبیعی زیر است. (J یک به یک است و هکذا $\overline{J}$)

$$J : (N, \tau_N) \longrightarrow (M, \tau_M)$$

براساس قضیه زیر در توپولوژی عمومی پیوستگی J پیوستگی $\overline{J}$ را ایجاب می‌کند.

---

[1] $Submanifold(Sous - Varie'te')$

(**قضیه**: اگر T, S دو فضای توپولوژیک بوده و $f : S \longrightarrow T$ پیوسته باشد آنگاه تابع $\overline{f} : S \longrightarrow f(S)$ نسبت به توپولوژی القایی روی $f(S)$، پیوسته است)

چون N فشرده است $\overline{J}$ براساس قضیه زیر در توپولوژی عمومی[1] همئومورفیسم بوده، اثبات قضیه کامل می‌شود. (**قضیه**: اگر f یک تابع پیوسته و دوسویی از فضای توپولوژیک فشرده S در فضای هوسدورف T باشد آنگاه f یک همئومورفیسم است) $\square$

تفاوت بین تعریف زیرمنیفلد جادهنده و زیرمنیفلد، ما را به تعریف نگاشت نشاننده راهنمایی می‌کند.

تعریف: *فرض کنیم M و N دو منیفلد باشند نگاشت $f : N \to M$ را یک* **نشاننده**[2] *یا* **ایمبدینگ** *گوئیم اگر*

ـ f جادهنده (ایمرسیون) باشد

ـ f یک به یک باشد

ـ $f(N)$ یک زیرمنیفلد M باشد.

(به عبارت دیگر نگاشت f روی تصویرش یک همئومورفیسم باشد)

بنابه‌این تعریف، تصویر هر نگاشت نشاننده یک زیرمنیفلد بوده و اصطلاحاً می‌گوئیم $f(N)$ در M **نشانده**[3] شده است و گاهی اوقات آنرا **زیرمنیفلد نشانده**[4] نیز می‌گویند.

لازم به یاد آوری است که شرط سوم در تعریف فوق ضروری است. به عبارت دیگر یک به یک بودن یک جادهنده یا ایمرسیون برای آنکه نشاننده باشد کافی نیست و ممکن است تصویر یک جادهنده یا ایمرسیون یک به یک، زیرمنیفلد نباشد. به عنوان مثال به تمرین ۳ در همین بخش مراجعه فرمائید.

توجه: اهمیت زیرمنیفلدها و ترجیح آن نسبت به زیرمنیفلدهای جادهنده ناشی از خاصیتی

---

[1] به عنوان مثال به کتاب توپولوژی مقدماتی نوشته *Gemignani* صفحه ۱۵۹ مراجعه نمائید.

[2] *Imbedding (Plongement)*

[3] *Imbedded (Plonge')*

[4] *Imbedded Submanifold (sous − varie'te' plonge'e)*

است که در اینجا به شرح آن می‌پردازیم.

قضیه‌ای در توپولوژی داریم که بنابرآن اگر S و T دو فضای توپولوژیک بوده و $f : S \to T$ پیوسته باشد آنگاه $\overline{f} : S \to f(S)$ برای توپولوژی القایی روی $f(S)$ نیز پیوسته است. در بازسازی این قضیه برای منیفلدها نمی‌توان "پیوستگی " را به "دیفرانسیل‌پذیری" تعمیم داد. به عبارت دیگر اگر $f : N \to M$ دیفرانسیل‌پذیر باشد و $f(N)$ یک زیرمنیفلد جادهنده باشد آنگاه ممکن است نگاشت $\overline{f} : N \to f(N)$ دیفرانسیل‌پذیر نباشد.

یادآوری: وقتی می‌گوئیم نگاشت $f : M \longrightarrow N$ پیوسته و یا دیفرانسیل‌پذیر است و اشاره‌ای به توپولوژی M و N نمی‌کنیم منظور ما پیوستگی و یا دیفرانسیل‌پذیری f نسبت به توپولوژی اطلسهای M و N است.

به عنوان مثال فرض کنید $f : I\!R^۲ \to I\!R^۲$ با ضابطه $f(x,y) = (۲xy, y)$ تعریف شود در اینصورت f دیفرانسیل پذیر است. زیرا f_* ژاکوبین آن همه جاتعریف می‌شود. اما ممکن است f با همین ضابطه روی زیر مجموعه‌هایی از $I\!R^۲$ دیفرانسیل پذیرنباشد. اگر فرض کنیم $f : S^۱ \subset I\!R^۲ \to f(S^۱) \subset I\!R^۲$ با ضابطه $f(x,y) = (۲xy, y)$ داریم $f : (\cos\theta, \sin\theta) \to (۲\sin\theta\cos\theta, \sin\theta)$ همانطور که قبلاً دیدیم $(\sin ۲\theta, \sin\theta)$ مشخص کننده هشت لاتین یا H می‌باشد بنابراین

$$f(S^۱) = H$$

لذا نگاشت $\overline{f} : S^۱ \to H$ برای توپولوژی القایی روی H پیوسته می‌باشد، (بنابر قضیه فوق‌الذکر در توپولوژی) اما $\overline{f}$ برای توپولوژی اطلس H پیوسته نمی‌باشد (چون دیدیم H با این توپولوژی فشرده نیست ولی $S^۱$ فشرده است). بنابراین نگاشت $\overline{f}$ به عنوان نگاشت بین دو منیفلد، دیفرانسیل پذیر نیست.

اما اگر $f(N)$ یک زیرمنیفلد باشد، $\overline{f}$ نه تنها پیوسته است (بنابر قضیه فوق‌الذکر در توپولوژی) بلکه دیفرانسیل‌پذیر نیز هست. اثبات این موضوع در قضیه زیر که قضیه اصلی این بخش می‌باشد آورده شده است.

قضیه: **اگر $f : N \to M$ یک نگاشت دیفرانسیل‌پذیر بوده و $f(N)$ یک زیرمنیفلد باشد**

آنگاه
$$\begin{aligned}\overline{f}: N &\longrightarrow f(N)\\ x &\mapsto f(x)\end{aligned}$$
دیفرانسیل‌پذیر است.

اثبات: نگاشت f را به‌صورت $J \circ \overline{f} = f$ در نظر می‌گیریم. $\underbrace{N \xrightarrow{\overline{f}} f(N) \xrightarrow{J} M}_{J\circ\overline{f}=f}$ چون f پیوسته است $\overline{f}$ نیز به شرط آنکه روی $f(N)$ توپولوژی القایی در نظر گرفته شود بنابر قضیه فوق‌الذکر در توپولوژی پیوسته است اما از طرف دیگر چون $f(N)$ زیرمنیفلد است توپولوژی القایی و توپولوژی اطلس بر یکدیگر منطبق می‌باشند. لذا $\overline{f}$ بعنوان نگاشت بین دو منیفلد، پیوسته می‌باشد. حال بنابر قضیه مذکور در بخش ۳$\S$ از همین فصل f دیفرانسیل‌پذیر می‌باشد. $\square$

در خاتمه یادآور می‌شویم که هر منیفلد دیفرانسیل‌پذیر n بعدی را می‌توان به عنوان یک زیرمنیفلد $I\!R^N$ (N باندازه کافی بزرگ) در نظر گرفت. به عنوان مثال قضایای زیر را ذکر می‌نماییم.

قضیه ناش:[۱] **هر منیفلد nبعدی M را می‌توان در یک فضای $I\!R^N$** (برای N به اندازه کافی بزرگ) نشاند (به عبارت دیگر M با زیرمنیفلدی از $I\!R^N$ دیفئومورف است.)

قضیه ویتنی:[۲] **هر منیفلد n بعدی M را می‌توان در فضای $I\!R^{2n}$ نشاند**

اگر منیفلد M فشرده باشد مسئله به شکل ساده‌تری قابل حل است که به عنوان مثال می‌توان به کتاب $Spivak, I$ صفحه ۷۰ مراجعه نمود.

تمرین:

۱ـ دیدیم نگاشت $f: \theta \to (\cos\theta, \sin\theta)$ با فرض $\theta \in [0, 2\pi]$ یک جادهنده است. آیا f در این فاصله نشاننده است؟

۲ـ آیا نگاشت $f: t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$ با فرض $t \in I\!R$ نشاننده است؟

۳ـ نگاشت $f: I\!R \to N \subset I\!R^2$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

---

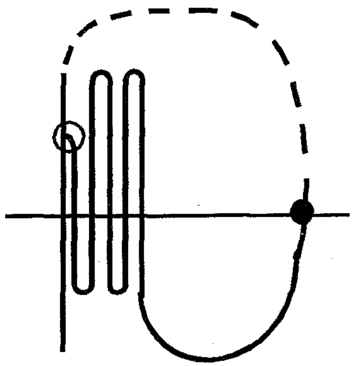
[۱] *Nash theorem J. Nash : Ann · Math* · ۶۳(۱۹۵۶), ۲۰ − ۳۶

[۲] *Withney theorem : Ann · Math* · ۴۵(۱۹۴۴), ۲۲۰ − ۲۴۶

$$f(t) = \begin{cases} (\frac{۲}{t}, \sin \frac{\pi}{۲} t) & ۲ \leq t \leq \infty \\ \text{منحنی منظم واصل به دو منحنی} & -۲ < t < ۲ \\ (۰, t + ۳) & -\infty < t \leq -۲ \end{cases}$$

N تصویر این نگاشت همانطور که در نمودار زیر مشخص شده است از دو منحنی تشکیل گردیده است. تابع f در فاصله $-۲ < t < ۲$ به این صورت تعریف شده است که دو منحنی راتوسط یک منحنی منظم به یکدیگر متصل می‌نماید. به این صورت یک جادهنده از تمام $I\!R$ در $R^۲$ تعریف می‌کنیم.

نشان دهید f یک جادهنده یک به یک می‌باشد اما نمی‌تواند یک همئومورفیسم باشد و لذا تصویر آن یک زیرمنیفلد نیست.



شکل ۳.۱۰: یک منحنی با توپولوژی ذاتی و القایی متفاوت

۴ـ رویه‌ای در $I\!R^۳$ مثال بزنید که زیرمنیفلد جادهنده $I\!R^۳$ باشد اما زیرمنیفلد (نشاننده) $I\!R^۳$ نباشد.

راهنمایی: می‌توانید از تمرین ۳ نیز استفاده کنید.

۵ـ اگر توپولوژی منیفلد M هاسدرف باشد آنگاه توپولوژی هر زیرمنیفلد جادهنده آن نیز هاسدرف است.

۶ـ نشان دهید زیر فضای برداری از هر فضای برداری متناهی‌البعد یک زیر منیفلد نشاننده

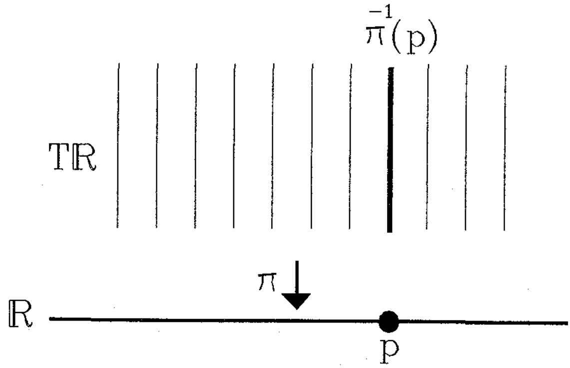
آن است.

۵.۳ § روش ساخت زیرمنیفلدها

در این بخش به اثبات قضیه‌ای می‌پردازیم که توسط آن می‌توان روش ساده‌ای جهت ساخت زیرمنیفلدها ارائه نمود.

تعریف: نگاشت $f : M \longrightarrow N$ را در نظر می‌گیریم. اگر $p \in N$ باشد زیر مجموعهٔ $f^{-1}(p) \subset M$ را یک تار روی p[1] می‌نامیم.

مثال: اگر $\pi : TM \longrightarrow M$ نگاشت تصویر باشد. تار روی p نسبت به نگاشت π عبارت است از T_pM. به عنوان مثال اگر فرض کنیم $M = I\!R$، $\pi : TI\!R \to I\!R$ و $TI\!R \simeq I\!R \times I\!R$ آنگاه به ازاء هر نقطه p از $I\!R$، $\pi^{-1}(p)$ تار روی p است.



شکل ۳.۱۱: مجموعه تارها روی فضای مماس

قضیه: **فرض کنیم نگاشت $f : M^{n+k} \to N^k$ یک پوشاننده یا سوبمرسیون باشد.**

اگر $n = 0$، هر تار مجموعه‌ای است که تمام نقاط آن تنها هستند.

اگر $n \geq 1$، هر تار یک زیرمنیفلد از M به بعد n است.

اثبات: اگر $n = 0$، f یک دیفئومورفیسم موضعی است و برای $\forall m \in M$ یک همسایگی U شامل m وجود دارد بطوریکه $f|_U$ دوسویی باشد. بنابراین تنها اشتراک U و تار تحت

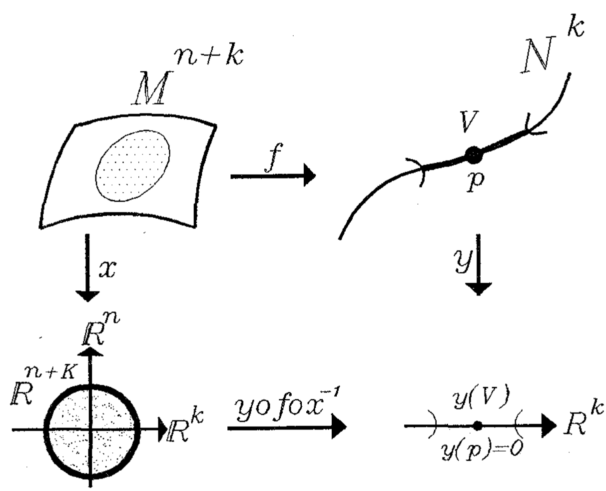
---

[1] *fiber over* $-$ p (*fibre au* $-$ *dessus de p*)

m در نقطه m می‌باشد.

(چون اگر $x \neq m$ و $x \in U \cap f^{-1}(m)$ ⇐ $x, m \in U$ و $f(x) = f(m)$ که تناقض است با دوسویی بودن f) بنابراین نقاط تار تنها می‌باشند.

اگر $n \geq 1$ و $p \in N$، یک ساختار زیرمنیفلد روی $S = f^{-1}(p)$ به شرح زیر تعریف می‌کنیم. کارت‌های موضعی (x, U) و (y, V) را به شرط $y(p) = 0$، با توجه به پوشاننده بودن f انتخاب می‌نمائیم.



شکل ۳.۱۲:

داریم

$$y \circ f \circ x^{-1} : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$$

$$(a_1, \cdots, a_k, a_{k+1}, \cdots, a_{k+n}) \to (a_1, \cdots, a_k)$$

اگر $m \in S \cap U$ و $m = x^{-1}(a_1, \cdots, a_{n+k})$ داریم $f(m) = p$ لذا داریم $y \circ f(m) = y(p) = 0$ بنابراین

$$0 = y \circ f(m) = (y \circ f \circ x^{-1})(a_1, \cdots, a_{n+k}) = (a_1, \cdots, a_k)$$

در نتیجه نقاط $S \cap U$ در مختصات موضعی عبارتند از $(0, \cdots, 0, a_{k+1}, \cdots, a_{k+n})$.

ساختار منیفلد روی S را توسط کارت $(\overline{x}, \overline{U})$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم $\overline{U} = S \cap U$

$$\overline{x} : \overline{U} \to I\!R^n$$

$$x(m) = (\circ, \cdots, \circ, a_{k+\backslash}, \cdots, a_{k+n}) \to (a_{k+\backslash}, \cdots, a_{k+n}) \qquad m \in \overline{U}$$

براحتی می‌توان نشان داد که این کارت‌ها تشکیل یک اطلس C^∞ می‌دهند و توپولوژی وابسته به این اطلس همان توپولوژی القایی M است. از طرف دیگر نگاشت یک به یک کانونی $J : S \to M$ در این کارت‌ها به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$(x \circ J \circ \overline{x}^{-1})(b_1, \cdots, b_n) = (\circ, \cdots, \circ, b_1, \cdots, b_n)$$

J بنابراین یک جادهنده و در نتیجه یک نشاننده است چون S دارای توپولوژی القایی است، بنابراین S یک زیرمنیفلد می باشد. □

نتیجه ۱: *فرض کنیم $f : M^{n+k} \to N^k$ $n \geq 1$ نگاشتی از کلاس C^∞ باشد اگر در تمام نقاط یک تار S داشته باشیم $rkf = k$ آنگاه S یک زیرمنیفلد M به بعد n است.*

نتیجه ۲ : (روش ساخت زیرمنیفلدهایی که توسط معادلات تعریف می‌شوند.)

فرض کنیم $f : M^n \to I\!R^k$ و $(n > k)$ یک نگاشت دیفرانسیل‌پذیر باشد قرار می‌دهیم $N = \{p \in M | f(p) = \circ\}$. اگر $N \neq \phi$ و $rkf|_N = k$ آنگاه N یک زیر منیفلد M به بعد $n - k$ است.

مثال ۱ : هر رویه دیفرانسیل‌پذیر (منیفلد دوبعدی) در $I\!R^3$ که بتوان آنرا توسط یک تابع دیفرانسیل‌پذیر مانند $f(x, y, z) = \circ$ بیان نمود یک زیرمنیفلد $I\!R^3$ است. به عبارت دیگر فرض کنیم $f(x, y, z) = \circ$ معادله رویه‌ای در $I\!R^3$ باشد به طوریکه نگاشت $f : I\!R^3 \to I\!R$، $(x, y, z) \to f(x, y, z)$ دارای مشتقات جزئی پیوسته‌ای باشد که همگی باهم صفر نباشند.

چون $f_* = (\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}) \neq (\circ, \circ, \circ)$ و $rkf = 1$ بنابراین f یک پوشاننده است و لذا مجموعه نقاط $f(x, y, z) = \circ$ تشکیل یک زیرمنیفلد دوبعدی از $I\!R^3$ می‌دهد.

مثال ۲ : کره S^n، $S^n = \{x \in I\!R^{n+1} | x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ یک منیفلد nبعدی است. زیرا اگر فرض کنیم

$$f : I\!R^{n+1} \to I\!R$$

$$(x_1, \cdots, x_{n+1}) \to x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 - 1$$

آنگاه $S^n = \{x \in I\!R^{n+1} | f(x) = 0\}$ و $rkf = 1$ و بنابرنتیجه ۲، S^n زیرمنیفلدی از $I\!R^{n+1}$ به بعد $(n+1) - 1$ می‌باشد که در نتیجه یک منیفلد n بعدی است.

مثال ۳: یک کاربرد دیگر از نتیجه بالا را می‌توان در $O(n)$ **گروه تبدیلات خطی متعامد**[1] روی $I\!R^n$ مشاهده کرد. $O(n)$ گروه ماتریس‌های $n \times n$ حقیقی است که در رابطه زیر صدق می‌کنند.

$$O(n) = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(I\!R) |\ AA^t = I\}$$

در اینجا I ماتریس همانی فرض شده است. می‌خواهیم نشان دهیم که $O(n)$ یک زیرمنیفلد $\mathcal{M}_{n\times n}(I\!R)$ مجموعهٔ ماتریس‌های حقیقی $n \times n$ است. برای اینکار باید نگاشت پوشاننده f را طوری تعریف کنیم که خصوصیات مورد نظر را داشته باشد یعنی $O(n) = f^{-1}(0)$. ابتدا یادآوری می‌کنیم که به ازاء هر ماتریس دلخواه A ماتریس حاصلضرب AA^t متقارن است زیرا با ترانهاده خود برابر است. فضای برداری ماتریس‌های متقارن $n \times n$ را توسط $Sym(n)$ نمایش می‌دهیم. فضای برداری $Sym(n)$ زیرمنیفلد $\mathcal{M}_{n\times n}$ به بعد $\frac{n(n+1)}{2}$ است.

نگاشت f را به صورت زیر تعریف می‌نماییم.

$$f :\ \mathcal{M}_{n\times n}(I\!R) \longrightarrow Sym(n)$$

که $f(A) = AA^t - I$ آنگاه $O(n) = f^{-1}(0)$. حال مشتق f در نقطه ماتریس A را محاسبه نموده نشان می‌دهیم که نگاشت f یک سوبمرسیون یا پوشاننده در نقاط $O(n)$ است. به ازاء $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$، داریم

$$\begin{aligned} df_A(B) &= \lim_{s\to 0} \frac{f(A+sB) - f(A)}{s} \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{(A+sB)(A+sB)^t - I - (AA^t - I)}{s} \end{aligned}$$

---

[1] *Orthogonal group (groupe orthogonal)*

$$= \lim_{s\to 0} \frac{AA^t + sBA^t + sAB^t + s^2 BB^t - AA^t}{s}$$
$$= \lim_{s\to 0}(BA^t + AB^t + sBB^t) = BA^t + AB^t$$

برای آنکه f در نقاط $O(n)$ پوشاننده یا سوبمرسیون باشد باید نشان دهیم نگاشت مشتق df_A در هر نقطه ماتریس A، $A \in f^{-1}(0) = O(n)$ پوششی است.

$$df_A : T_A\mathcal{M}_{n\times n} \longrightarrow T_{f(A)}Sym(n)$$

با یکی گرفتن $\mathcal{M}_{n\times n}$ و $Sym(n)$ با فضای اقلیدسی داریم: $T_A\mathcal{M}_{n\times n} = \mathcal{M}_{n\times n}$ و $T_{f(A)}Sym(n) = Sym(n)$. برای آنکه به ازاء هر $A \in O(n)$ نگاشت df_A پوششی باشد نشان می‌دهیم به ازاء هر $C \in Sym(n)$ ماتریسی مانند $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ موجود است بطوریکه $df_A(B) = C$ به عبارت دیگر مقدار B را از معادله $BA^t + AB^t = C$ به دست می‌آوریم.

چون C متقارن است می‌توان نوشت $C = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C^t$ لذا می‌توان از معادله $BA^t = \frac{1}{2}C$ جواب B را با ضرب A از راست به دست آورد. حال می‌گوییم $B = \frac{1}{2}CA$ جواب معادله است، زیرا

$$df_A(B) = (\frac{1}{2}CA)A^t + A(\frac{1}{2}CA)^t = \frac{1}{2}C(AA^t) + \frac{1}{2}(AA^t)C^t$$
$$= \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C^t = C$$

بنابراین نگاشت df_A پوششی بوده، f در نقاط $O(n)$ پوشاننده یا سوبمرسیون می‌شود. و در نتیجه بنابر قضیه بالا $O(n) = f^{-1}(0)$ یک زیرمنیفلد دیفرانسیل‌پذیر از $\mathcal{M}_{n\times n}$ است که بُعد آن از تفاضل بعد $\mathcal{M}_{n\times n}$ و بعد $Sym(n)$ به دست می‌آید.

$$\dim O(n) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

تمرین:

۱ـ رویه‌های $z = x^2 + y^2$ (سهمیگون) و $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (نیم مخروط) را در $I\!R^3$

در نظر گرفته بررسی کنید در کدام یک از تعاریف زیر صدق می‌کنند.

الف) منیفلد توپولوژیک

ب) منیفلد دیفرانسیل‌پذیر

ج) زیرمنیفلد جادهنده $I\!R^۳$

د) زیرمنیفلد $I\!R^۳$

۲ـ هذلولیگون[1] H_c^n در $I\!R^{n+۱}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$H_c^n = \{(x_۱, \cdots, x_{n+۱}) \in I\!R^{n+۱} | x_۱^۲ - x_۲^۲ \cdots - x_{n+۱}^۲ = c\}$$

سه حالت برای عدد حقیقی c در نظر می‌گیریم.($c < ۰$ ، $c = ۰$ ، $c > ۰$)

تعیین کنید در کدام یک از حالات فوق H_c^n زیرمنیفلد $I\!R^{n+۱}$ است، و بعد آنرا مشخص نموده، در سه حالت فوق مکان نقاط H_c^n در $I\!R^۳$ را رسم نمایید.

۳ـ گروه ماتریس‌های متعامد خاص[2] $n \times n$ را به‌صورت زیر تعریف می‌نماییم.

$$SO(n) = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(I\!R) | det\ A = ۱\ ,\ AA^t = Id\}$$

نشان دهید $SO(n)$ یک زیرمنیفلد $\mathcal{M}_{n\times n}(I\!R) \simeq I\!R^{n^۲}$ به بعد $\frac{n(n-۱)}{۲}$ است.

راهنمایی: در حقیقت $GL^+(n, R) = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(I\!R) | \det\ A > ۰\}$ را در نظر گرفته با استفاده از نگاشت دترمینان نشان دهید زیرمجموعهٔ بازی از $\mathcal{M}_{n\times n}$ است. سپس f را به‌صورت زیر تعریف نموده نشان دهید یک سوبمرسیون یا پوشاننده است و $SO(n) = f^{-۱}(۰)$.

$$f : GL^+(n, I\!R) \to Sym(n)$$

$$f : A \to AA^t - Id$$

در اینجا $Sym(n)$ مجموعه ماتریسهای متقارن $n \times n$ حقیقی است که ابتدا باید نشان داد

---

[1] *Hyperboloid*

[2] *Special Orthogonal group*

به ازاء $A \in GL^+(n, I\!R)$ دیفرانسیل df_A در H به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$df_A(H) = AH^t + HA^t$$

۴ـ یک گروه G را که یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر نیز باشد یک **گروه لی**[۱] گوئیم اگر نگاشت‌های زیر (با عمل گروه) نگاشت‌های دیفرانسیل‌پذیر بین دو منیفلد باشند.

$$\begin{array}{lll} G \times G \longrightarrow G & \qquad\qquad & G \longrightarrow G \\ (A, B) \mapsto AB & & A \mapsto A^{-1} \end{array}$$

به عنوان مثال $I\!R^n$ با عمل جمع دو بردار و صفحه اعداد مختلط بدون مبدأ با عمل ضرب، گروههای لی هستند.
ثابت کنید $O(n)$ با عمل ضرب ماتریسها یک گروه لی است.

۶.۳ § خواص عمومی پوشاننده یا سوبمرسیون

در این بخش به بیان چند گزاره در مورد نگاشت پوشاننده می‌پردازیم که در بخش‌های بعد مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

همانطوریکه دیدیم از قضیه رتبه نتیجه می‌شود که اگر $f : M^{n+k} \longrightarrow N^n$ یک پوشاننده (یا سوبمرسیون) باشد آنگاه برای هرکارت (y, V) روی N یک کارت (x, U) روی M موجود است به طوریکه

$$\begin{array}{rl} yofox^{-1} : & x(U) \subset I\!R^n \times I\!R^k \longrightarrow I\!R^n \\ & (a, b) \mapsto a \end{array}$$

این کارت‌ها را **کارت‌های وابسته به پوشاننده (یا سوبمرسیون)** می‌نامیم.

از قضیه رتبه همچنین نتیجه می‌شود که هر پوشاننده بطور موضعی پوششی است.

گزاره ۱: فرض کنیم $f : M^{n+k} \longrightarrow N^n$ یک پوشاننده باشد. اگر $\varphi : N^n \longrightarrow M_1^p$

---

[۱] *Lie group (groupe de Lie)*

نگاشتی باشد که ترکیب آن با f یعنی $\varphi o f$ دیفرانسیل‌پذیر باشد آنگاه φ دیفرانسیل‌پذیر است.

به عبارت دیگر:

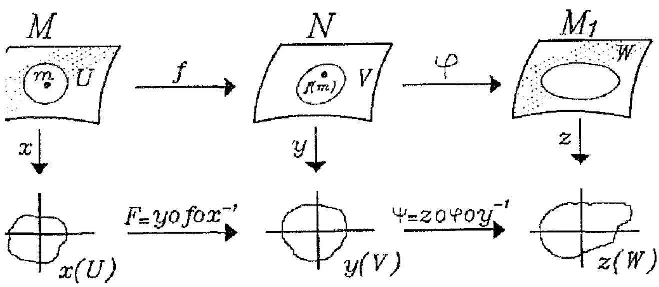
$$\left\{\begin{array}{l} f \text{ پوشاننده} \\ \varphi o f \text{ دیفرانسیل‌پذیر} \end{array}\right. \Rightarrow \varphi \text{دیفرانسیل پذیر}$$

اثبات: کارت‌های وابسته به پوشاننده یا سوبمرسیون را در همسایگی m و $f(m)$ بترتیب (x, U) و (y, V) در نظر می‌گیریم. فرض کنیم که (z, W) نیز کارتی در همسایگی $(\varphi o f)(m)$ باشد داریم

$$F = yofox^{-1} : I\!R^n \times I\!R^k \longrightarrow I\!R^n$$
$$(a, b) \mapsto a$$

اگر فرض کنیم $J = \psi o F$ داریم:

$$J(a, b) = \psi o F(a, b) = \psi(a)$$



شکل ۳.۱۳: ترکیب دو تابع

بنابر فرض J دیفرانسیل‌پذیر است لذا ψ دیفرانسیل‌پذیر بوده بنابر تعریف φ دیفرانسیل‌پذیر می‌باشد. □

فرض کنیم $f : M \longrightarrow N$ یک نگاشت دلخواه باشد. می‌گوئیم نگاشت $g : N \longrightarrow M$

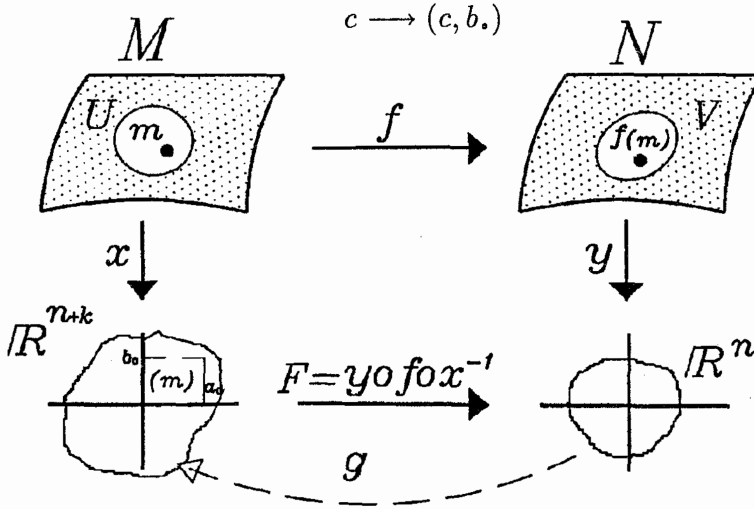
یک بخش[۱] f است اگر $fog = Id_N$ نگاشت همانی روی N باشد، نگاشت g را یک بخش موضعی[۲] f گوئیم اگر فقط روی ناحیه‌ای از N تعریف شود.

گزاره ۲: نگاشت دیفرانسیل‌پذیر $f : M^{n+k} \longrightarrow N^n$ یک پوشاننده (یا سوبمرسیون) است اگر و تنها اگر در هر نقطه m از حوزه تعریف f یک بخش موضعی دیفرانسیل‌پذیر موجود باشد که در یک همسایگی $f(m)$ تعریف شود.

اثبات: فرض کنیم $f : M^{n+k} \longrightarrow N^n$ یک پوشاننده باشد. کارت‌های وابسته به پوشاننده را در همسایگی m و $f(m)$ با (x, U) و (y, V) نشان می‌دهیم. فرض کنیم $x(m) = (a_\circ, b_\circ)$ حال نگاشت g را در نظر می‌گیریم

$$g : I\!R^n \longrightarrow I\!R^{n+k}$$

$$c \longrightarrow (c, b_\circ)$$



شکل ۳.۱۴:

واضح است که g یک بخش $F = yofox^{-1}$ است زیرا از $F(a, b) = a$ نتیجه

---

[۱] section

[۲] local section

می‌شود

$$(Fog)(c) = F(c, b_\circ) = c$$

لذا $S = x^{-1}ogoy$ یک بخش موضعی دیفرانسیل‌پذیر f است.

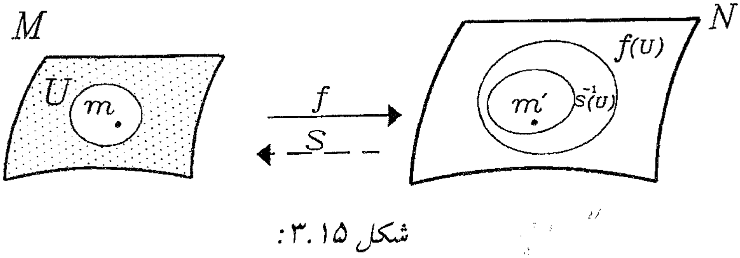
برعکس فرض کنیم در هر نقطه m از حوزه تعریف f یک بخش موضعی دیفرانسیل‌پذیر S در یک همسایگی V از $f(m)$ تعریف شود. روی همسایگی V داریم $foS = Id$ لذا اگر $v \in T_{f(m)}V$

$$f_* oS_*(v) = f_*(S_*(v)) = v$$

بنابراین $f_* oS_* = Id$ که از آن نتیجه می‌شود f_* پوششی است. در نتیجه f یک پوشاننده است.

گزاره ۳: هر پوشاننده (یا سوبمرسیون) یک نگاشت باز است.

اثبات: فرض کنیم $f : M \longrightarrow N$ یک پوشاننده و U بازی از M باشد. اگر $m' \in f(U)$ نقطه $m \in U$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $f(m) = m'$ همچنین بخش موضعی دیفرانسیل‌پذیر S را در همسایگی m' طوری اختیار می‌کنیم که $S(m') = m$. (بنابر گزاره ۲ چنین بخش موضعی وجود دارد.)



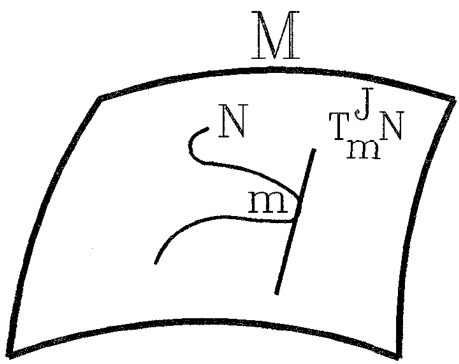
شکل ۳.۱۵:

چون S پیوسته است $S^{-1}(U)$ باز است. از طرف دیگر $f(m) \in S^{-1}(U)$ زیرا S یک بخش در همسایگی $f(m)$ است. لذا $m' \in S^{-1}(U)$ و $S^{-1}(U)$ در داخل $f(U)$ قرار دارد. (چون از $U \subset f^{-1}of(U)$ نتیجه می‌شود $S^{-1}(U) \subset \underbrace{S^{-1}of^{-1}}_{Id}of(U)$).

در نتیجه ثابت شد که به ازاء هر $m' \in f(U)$ یک همسایگی باز $S^{-1}(U)$ شامل m' وجود دارد بطوریکه $S^{-1}(U) \subset f(U)$ لذا بنابر تعریف $f(U)$ باز است. بنابراین f یک نگاشت باز است. □

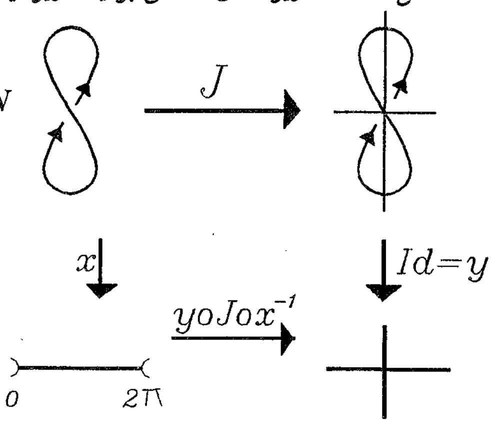
۷.۳ § زیر فضای مماس بر یک زیرمنیفلد جادهنده

تعریف: *فرض کنیم $N \subset M$ یک زیرمنیفلد جادهنده و $J : N \to M$ نگاشت شمول طبیعی باشد.* **زیرفضائی از TM که در نقطه $m \in N$ بر N مماس باشد را توسط تصویر نگاشت** *$(J_*)_m$ تعریف نموده $(J_*)_m : T_mN \to T_mM$ آنرا به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم*



شکل ۳.۱۶: زیرفضای مماس بر یک زیرمنیفلد

$T^J_m N = (J_*)_m T_m N$



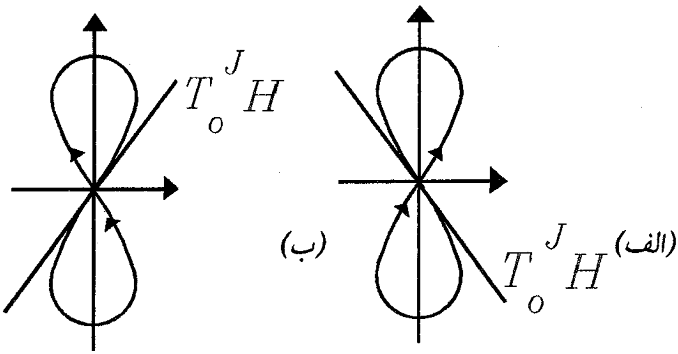
شکل ۳.۱۷:

چون J یک جادهنده یا ایمرسیون است $T_m^J N$ یک زیر فضای $n = dimN$ بعدی از $T_m M$ می‌باشد.

مثال: فرض کنیم $H \subset I\!R^۲$ هشت لاتین باشد که توسط کارت

$\theta \to (\sin ۲\theta, \sin\theta) \qquad x : H \to]\circ, ۲\pi[$ تعریف شده است. J نگاشت شمول طبیعی است حال به محاسبه $T_\circ^J$ می‌پردازیم. $\circ = (\circ, \circ)$ نقطه صفر توسط $\theta = \pi$ بدست می‌آید. داریم

$$(J_*)_\circ = (id \circ J \circ x^{-۱})_{*\theta=\pi} = (۲\cos ۲\theta, \cos\theta)_{\theta=\pi} = (۲, -۱)$$



شکل ۳.۱۸:

$$(J_*)_\circ\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right) = ۲\left(\frac{\partial}{\partial x^۱}\right)_\circ - \left(\frac{\partial}{\partial x^۲}\right)_\circ = V \Rightarrow T_\circ^j H = I\!RV$$

به شکل فوق (الف) توجه فرمائید

از طرف دیگر اگر H را توسط کارت زیر تعریف نمائیم

$$x : H \longrightarrow]-\pi, \pi[$$

$$(\sin ۲\theta, \sin\theta) \longrightarrow \theta$$

مرکز $\circ = (\circ, \circ)$ توسط $\theta = \circ$ بدست می‌آید. به روش فوق می توان $(J_*)_\circ$ را محاسبه نمود

$$(J_*)_\circ = (id \circ J \circ x^{-۱})_{*\theta=\circ} = (۲, ۱) = W \Rightarrow T^j_\circ H = I\!RW$$

به شکل فوق (ب) توجه فرمایید

گزاره ۱: فرض کنیم $f : M_۱ \longrightarrow M_۲$ نگاشت دیفرانسیل‌پذیر بوده و $N_۱$ و $N_۲$ دو زیرمنیفلد جادهنده در $M_۱$ و $M_۲$ باشند بطوریکه $f(N_۱) \subset N_۲$ آنگاه اگر نگاشت $f_۱ = f|_{N۱}$ دیفرانسیل پذیر باشد داریم

$$f_* T^{J_۱} N_۱ \subset T^{J_۲} N_۲$$

(در اینجا $J_i : N_i \to M_i$ نگاشت شمول طبیعی می باشد)

اثبات: در حقیقت چون $f(N_۱) \subset N_۲$ داریم $f \circ J_۱ = J_۲ \circ f_۱$ با درنظر گرفتن نگاشت مماس داریم $(J_۲)_* \circ (f_۱)_* = f_* \circ (J_۱)_*$ لذا اثر f_* روی تصویر $(J_۱)_*$ عبارت است از

$$f_*(Im(J_۱)_*) \subset Im(J_۲)_*$$

$$f_* T^{J_۱} N_۱ \subset T^{J_۲} N_۲ \qquad \square$$

تذکر: این گزاره در حالتی که $f_۱$ دیفرانسیل پذیر نباشد برقرار نیست.

مثال نقض: نگاشت $f : I\!R^۲ \to I\!R^۲$ با فرض $f = Id$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $N_۱$ و $N_۲$ هشت لاتین H با دو ساختار دیفرانسیل‌پذیری تعریف شده در بالا باشند داریم

$$V \in T^{J_۱}_\circ H, f_* V = V \notin T^{J_۲}_\circ H$$

دلیل این موضوع مشتق پذیر نبودن نگاشت $Id|_H$ است.

قضیه: فرض کنیم $f : M^{n+k} \to N^k$ و $n \geq ۱$ باشد و $rk_\circ(f_*)_m$ در تمام نقاط یک تار S برابر k باشد. آنگاه زیرفضای $T_m M$، مماس بر S[۱] در نقطه m عبارت است از

---

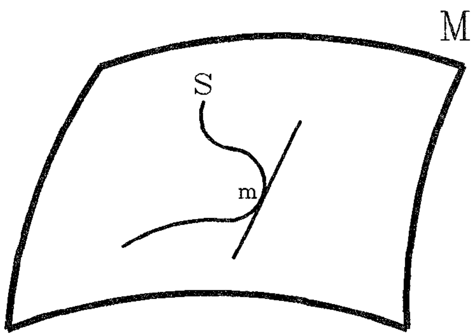
[۱] لذا S در اینجا یک زیرمنیفلد است.

$\ker(f_*)_m$

اثبات: فرض کنیم $J : S \to M$ نگاشت شمول طبیعی باشد. اگر S تار تحت p باشد $(S = f^{-1}(p))$ داریم

$$(f \circ J)(x)(x) = p \qquad \forall x \in S$$

بنابراین نگاشت $f \circ J$ ثابت بوده و در نتیجه $f_* \circ J_* = 0_*$. به عبارت دیگر تصویر $ImJ_* \subset \ker f_*$ در نتیجه



شکل ۳.۱۹:

$$J_*(T_mS) \subset \ker(f_*)_m$$

از طرف دیگر چون f یک پوشاننده یا سوبمرسیون است بُعد هسته آن برابر است با

$$\dim(\ker f_*) = (n+k) - rkf_* = n + k - k = n$$

چون J یک جادهنده است داریم:

$$\dim J_*(T_mS) = \dim(T_mS) = n \Rightarrow J_*(T_mS) = Ker(f_*)_m$$

□

پیوست I: منیفلدهای خارج قسمتی

مقدمه: منیفلدهای خارج قسمتی بخش عمده‌ای از مطالعات هندسه را خصوصاً در شاخه هندسه جبری به خود اختصاص داده‌اند اما از آنجا که گستردگی و تنوع مطالب در آن ممکن است باعث پراکندگی آموخته‌های دانشجویانی گردد که برای اولین بار با مفهوم منیفلدها آشنا می‌شوند این مبحث در پیوست فصل سوم آورده شده است تا خوانندگان علاقه‌مند پس از تسلط کافی به مفاهیم اساسی منیفلدها به مطالعه آن بپردازند.

در بخش اول مفاهیم مقدماتی توپولوژی خارج قسمتی با ذکر چند مثال به عنوان یادآوری عنوان می‌شود تا خوانندگانی که این مقدمات را فراموش کرده‌اند نیازی به مراجعه به مراجع دیگر نداشته باشند. بخش دوم که بخش اصلی این مبحث است به تعریف منیفلد خارج قسمتی با ذکر چند مثال اختصاص دارد. در بخش سوم روش ساخت این منیفلدها را با استفاده از عمل گروه بیان می‌کنیم. در قسمت الف ابتدا تعاریف مقدماتی را با ذکر چند مثال آورده نشان می‌دهیم که بطور طبیعی می‌توان هر گروه را که روی یک منیفلد M عمل می‌کند با یک گروه که بطور موثر روی M عمل می‌کند تعویض نمود. در قسمت ب پس از تعریف گروه تبدیلات ناپیوسته ثابت می‌کنیم که اگر G بطور آزاد و ناپیوسته روی M عمل کند آنگاه

---

[1] $quotient\ manifold\ (Varie'te'\ quotient)$

مجموعه خارج قسمتی M/G دارای ساختار منیفلد خارج قسمتی است.

۸.۳ § یادآوری توپولوژی خارج قسمتی

اگر M یک مجموعهٔ دلخواه و R یک رابطه هم‌ارزی روی آن باشد، آنگاه R، مجموعه M را به کلاس‌های هم‌ارزی تقسیم‌بندی یا افراز می‌نماید. مجموعه کلاس‌های هم ارزی روی M را توسط M/R نمایش داده آنرا **مجموعه خارج قسمتی**[۱] می‌نامیم. اگر M دارای یک توپولوژی نیز باشد این سؤال مطرح می‌شود که آیا می‌توان با استفاده از این توپولوژی بطور طبیعی یک توپولوژی روی M/R تعریف کرد. جواب این سؤال به شرح زیر مثبت است.

ابتدا یادآوری می‌کنیم که یک نگاشت طبیعی f از M در M/R وجود دارد که توسط رابطه $f(x) = \overline{x}$ که در آن $\overline{x}$ کلاس هم‌ارزی x است، تعریف می‌شود.

$$f : M \longrightarrow M/R$$

$$x \mapsto \overline{x} = \{y \in M | xRy\}$$

اگر M یک فضای توپولوژیک باشد طبیعی است که یک توپولوژی روی M/R جستجو کنیم که f نسبت به آن پیوسته باشد. می‌دانیم که f پیوسته است اگر و تنها اگر به ازاء هر مجموعهٔ باز U از M/R، $f^{-1}(U)$ باز باشد. حال با استفاده از این خاصیت یک توپولوژی روی M/R تعریف می‌کنیم. زیرمجموعهٔ U از M/R را باز می‌نامیم اگر $f^{-1}(U)$ در M باز باشد. به راحتی ثابت می‌شود که با این عمل یک توپولوژی روی M/R تعریف می‌شود، این توپولوژی را **توپولوژی خارج قسمتی**[۲] و M/R را **فضای خارج قسمتی**[۳] می‌نامیم.

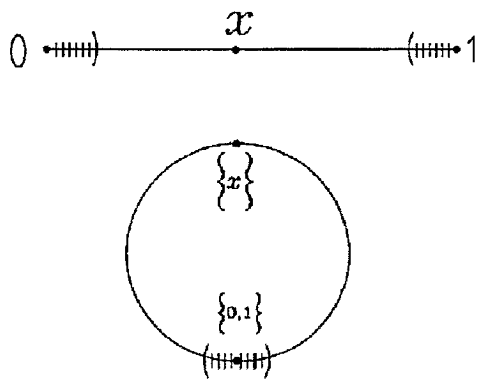
---

[۱] *quotient set (Espace quotient)*

[۲] *quotient topology*

[۳] *quotient space*

مثال ۱: فاصله بسته $[۰, ۱]$ را همراه با توپولوژی عادی آن در نظر گرفته سپس رابطه هم‌ارزی روی این فاصله را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. فرض می‌کنیم ۰ با ۱ هم‌ارز باشد و هر عدد دیگر در فاصله $(۰, ۱)$ با خودش هم‌ارز باشد آنگاه کلاس‌های هم‌ارزی عبارتند از $\{۰, ۱\}$ و $\{x\}$ به ازاء $x \in (۰, ۱)$. با یکی قرار دادن ۱,۰ یک دایره به دست می‌آید. لذا فضای خارج قسمتی $[۰, ۱]/R$ یک دایره است.

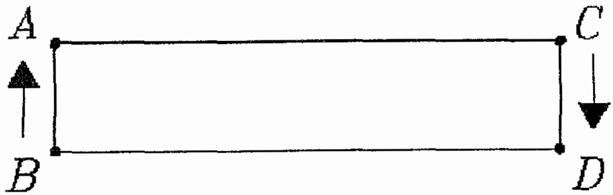


شکل ۳.۲۰: با تعریف یک رابطه هم‌ارزی روی $[۰, ۱]$ یک دایره حاصل می‌شود

با یکی قرار دادن نقاط ابتدا و انتهای یک فاصله فضای توپولوژیکی جدیدی حاصل می‌شود که یک منحنی ساده و بسته بوده و توپولوژی آن توپولوژی خارج قسمتی است. اینجا تابع پیوسته f به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$f : [۰, ۱] \longrightarrow [۰, ۱]/R = S^{۱}$$
$$\theta \longrightarrow (\cos ۲\pi\theta\ ,\ \sin ۲\pi\theta)$$

مثال ۲: یک نوار مستطیل شکل در نظر گرفته و یک رابطه هم‌ارزی روی آن به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم



شکل ۳.۲۱: رابطه هم‌ارزی روی نوار

نقاط روی لبه چپ با لبه راست پس از تغییر جهت هم‌ارز باشند و هر نقطه دیگر مستطیل که در روی این دو خط نیست با خودش هم‌ارز باشد. لذا نقطه A با D و نقطه B با C هم‌ارز می‌شود.

با استفاده از این رابطه هم‌ارزی و یکی قرار دادن لبه‌های چپ و راست پس از تغییر جهت یک فضای خارج قسمتی حاصل می‌شود که آن را **نوار موبیوس**[1] می‌نامند.

شکل ۳.۲۲: فضای خارج‌قسمتی

مثال ۳: کره S^2 را در نظر گرفته روی آن یک رابطه هم‌ارزی به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. هر نقطه $x \in S^2$ را با نقطه متقاطر آن $-x \in S^2$ هم‌ارز قرار می‌دهیم. با استفاده از این رابطه هم‌ارزی یک فضای خارج قسمتی تولید می‌شود که آن را **صفحه تصویری**[2] نامیده با $\mathbb{P}^2$ نمایش می‌دهیم اعضای $\mathbb{P}^2$ عبارتند از مجموعه‌های $\{x, -x\}$ به ازاء $x \in S^2$ که آن را توسط کلاس هم‌ارزی $\overline{x}$ نشان می‌دهیم. نگاشت پیوسته f عبارتست از

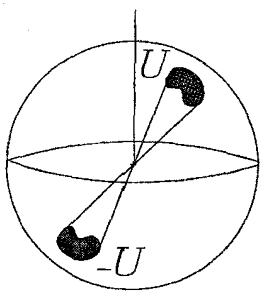
$$f:\ S^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$$

$$x \longrightarrow \overline{x}$$

[1] $Mobius\ bonde$ برای توضیحات بیشتر در مورد نوار موبیوس به بخش ۵.۵ از فصل پنجم مراجعه نمائید.

[2] $projective\ plane$

بازهای $I\!\!P^{2}$ عبارتند از تصاویر بازهای S^{2} توسط f لذا اگر V یک باز S^{2} باشد آنگاه $U = f(V)$ یک باز $I\!\!P^{2}$ است. بنابراین تعریف باز در S^{2} و $I\!\!P^{2}$ به یک نحو است، با این تفاوت که در $I\!\!P^{2}$ اگر x متعلق به U باشد آنگاه $-x$ نیز به U تعلق دارد.



شکل ۳.۲۳: رابطه هم‌ارزی روی کره

مثال ۴: فرض کنیم M یک مجموعه دلخواه و (M', τ') یک فضای توپولوژیک و g یک تابع از M' باشد. $g : M \longrightarrow M'$ یک توپولوژی روی M تعریف می‌نمائیم که نسبت به آن g پیوسته باشد چون g در این توپولوژی پیوسته فرض شده است کافی است بازهای $V \in M$ را تصویر معکوس بازهای $U \in M'$ توسط g انتخاب نمائیم یعنی $V = g^{-1}(U)$ لذا خانواده بازهای M یک توپولوژی روی آن تعریف می‌نماید.

یک رابطه هم‌ارزی روی M تعریف می‌کنیم. می‌گوئیم xRx' اگر $g(x) = g(x')$ برای هر x و x' در M. اگر $\overline{x}$ کلاس هم‌ارزی x باشد آنگاه یک تابع طبیعی از M/R در M' موجود است که توسط $\overline{g}(\overline{x}) = g(x)$ تعریف می‌شود

$$\overline{g} : M/R \longrightarrow M'$$

$$\overline{x} \longrightarrow \overline{g}(\overline{x}) = g(x)$$

تابع $\overline{g}$ خوش تعریف است چون اگر $\overline{x} = \overline{x'}$ آنگاه

$$\overline{g}(\overline{x}) = g(x) = g(x') = \overline{g}(\overline{x'})$$

فرض کنیم f نگاشت پیوسته $f : M \longrightarrow M/R$ باشد. آنگاه اگر g پوششی بوده و M/R دارای توپولوژی خارج قسمتی τ'' باشد، براحتی ثابت می‌کنیم $\overline{g}$ **یک همئومورفیسم** از $(M/R, \tau'')$ بروی (M', τ') است. ابتدا می‌گوئیم $\overline{g}$ پوششی است چون g پوششی فرض شده است. حال فرض کنیم $\overline{g}(\overline{x}_1) = \overline{g}(\overline{x}_2)$ از آن نتیجه می‌گیریم،

$g(x_1) = g(x_2)$ لذا x_1 و x_2 هم‌ارز شده داریم $\overline{x}_1 = \overline{x}_2$ بنابراین $\overline{g}$ یک به یک و در نتیجه دوسویی است. کافی است نشان دهیم $\overline{g}$ و $\overline{g}^{-1}$ پیوسته هستند که اینکار با استفاده از تابع f براحتی قابل انجام است، اما چون کاربردی در اینجا ندارد از آوردن جزئیات آن خودداری می‌شود.

۹.۳ منیفلد خارج قسمتی

در اینجا با استفاده از مقدماتی که در بخش قبل آورده شد منیفلد خارج قسمتی را تعریف نموده با استفاده از مطالب مشروحه در بخش ۶.۳ خواص مهم آنرا بررسی و اثبات می‌نمائیم.

فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر، R یک رابطه هم‌ارزی و M/R مجموعهٔ کلاس‌های هم‌ارزی روی M باشد. همچنین فرض کنیم نگاشت زیر

$$q : M \longrightarrow M/R$$

$$x \longrightarrow \overline{x}$$

نگاشت پوششی باشد. حال می‌توانیم منیفلد خارج قسمتی را به شرح زیر تعریف نموده ثابت کنیم که توپولوژی که توسط اطلس‌ها (ذاتی) روی آن تعریف می‌شود همان توپولوژی خارج قسمتی است.

تعریف: *اگر M/R دارای ساختار یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر بوده و نگاشت q یک پوشاننده (یا سوبمرسیون) باشد آنگاه M/R را یک* **منیفلد خارج قسمتی**[1] *می‌گوییم.*

---

[1] *quotient mainfold (variété quotient)*

مثال ۱: فرض کنیم $g : M \longrightarrow M'$ پوشاننده باشد. رابطه هم‌ارزی R روی M را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

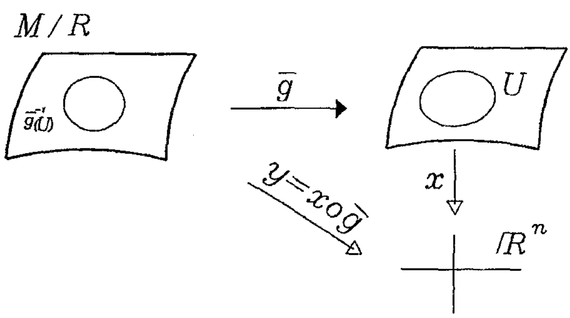
$$x_1 R x_2 \Leftrightarrow g(x_1) = g(x_2)$$

نگاشت $\overline{g}$ را مشابه مثال ۴ در بخش قبل به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\overline{g} : M/R \longrightarrow M'$$
$$\overline{x} \longrightarrow g(x)$$

دیدیم که $\overline{g}$ دوسویی است. با استفاده از $\overline{g}$ ساختار M' را به روی M/R منتقل می‌کنیم. مطابق شکل زیر اگر (x, U) یک کارت روی M' باشد کارت $(xo\overline{g}, \overline{g}^{-1}(U))$ را روی M/R در نظر می‌گیریم.

در این صورت $\overline{g}$ تعویض اطلس می‌نماید و بنابر قضیه مذکور در بخش §۳ از فصل یک $\overline{g}$ یک دیفئومورفیسم (برای توپولوژی‌های ذاتی) است.



شکل ۳.۲۴: منیفلد خارج قسمتی

حال می‌گوئیم M/R با این ساختار یک منیفلد خارج قسمتی است. بنابر تعریف کافی است نشان دهیم نگاشت $q = \overline{g}^{-1} o g$ از M در M/R پوشاننده است. می‌دانیم بنابر فرض g

پوشاننده بوده و $\overline{g}$ دیفئومورفیسم است بنابراین ترکیب آنها یک پوشاننده می‌باشد.

تذکر: اعضای یک منیفلد خارج قسمتی (یعنی کلاس‌های هم‌ارزی) همگی فقط از نقاط تنها و یا از زیرمنیفلدهای M (با ابعاد مساوی) تشکیل شده‌اند. (بنابر قضیه‌ای که در بخش روش ساخت زیرمنیفلدها در این فصل بیان نمودیم.)

در گزاره زیر نشان می‌دهیم که توپولوژی که در مثال بالا روی M/R تعریف شد توپولوژی خارج قسمتی است که در حقیقت مجوزی است جهت استفاده از نام منیفلد خارج قسمتی برای M/R.

گزاره ۱: اگر M/R یک منیفلد خارج قسمتی باشد آنگاه توپولوژی (ذاتی) M/R توپولوژی خارج قسمتی است.

اثبات: چون نگاشت پوشاننده (یا سوبمرسیون) $q : M \longrightarrow M/R$ دیفرانسیل‌پذیر است، لذا پیوسته است. از گزاره ۳ در بخش ۳§۶ نتیجه می‌گیریم که q باز نیز هست. بنابر آنچه در ابتدای بخش ۳§۸ یادآوری شد نگاشت q توپولوژی خارج قسمتی روی M/R تعریف می‌نماید. این توپولوژی بر توپولوژی ذاتی M/R (که در مثال قبل تعریف شد) منطبق است. □

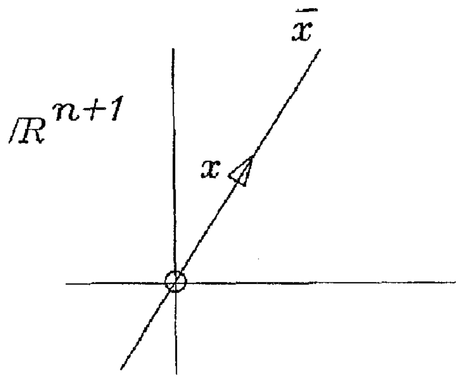
لازم به یادآوری است که روی هر مجموعهٔ خارج قسمتی الزاماً ساختار یک منیفلد خارج قسمتی تعریف نمی‌شود. به مثال زیر که مؤید این واقعیت است توجه فرمائید.

مثال ۲: فرض کنیم R یک رابطه هم‌ارزی روی $I\!R^{n+1}$ بوده که به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$xRy \Leftrightarrow \exists a \in I\!R - \{0\} : \ x = ay$$

$\overline{x}$ کلاس هم‌ارزی x (با فرض $x \neq 0$) عبارت است از خط برداری تولید شده توسط x که شامل مبدأ مختصات نیست. کلاس هم‌ارزی مبدأ عبارت است از $\overline{o} = \{0\}$ حال می‌گوئیم $I\!R^{n+1}/R$ نمی‌تواند یک منیفلد خارج قسمتی باشد، زیرا کلاس‌های هم‌ارزی فقط از نقاط تنها و یا فقط از زیرمنیفلدهای متساوی البعد تشکیل نشده‌اند و بنابر تذکر بالا $I\!R^{n+1}/R$

یک منیفلد خارج قسمتی نیست.



شکل ۳.۲۵ : کلاس هم‌ارزی

منیفلد تصویری حقیقی[1]

مثال ۳: اگر از $I\!R^{n+1}$ مبدأ را حذف نمائیم آنگاه $I\!R^{n+1} - \{\circ\}$ با رابطه هم‌ارزی زیر یک منیفلد خارج قسمتی است که آن را **منیفلد تصویری حقیقی** نامیده با $P^n I\!R$ نمایش می‌دهیم. در اینجا نشان می‌دهیم که روی $P^n I\!R = (I\!R^{n+1} - \{\circ\})/R$ ساختار یک منیفلد n بعدی وجود دارد.

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists a \in I\!R - \{\circ\} : x = ay$$

در اینجا $x, y \in I\!R^{n+1}$. رابطه اخیر را می‌توان به‌صورت زیر نوشت.

$$(y_1, \cdots, y_{n+1}) \sim a(y_1, \cdots, y_{n+1}) = (ay_1, \cdots, ay_{n+1})$$

$P^n I\!R$ را می‌توان مشابه مثال ۲ با مجموعه خطوط گذرنده از مبدا در $I\!R^{n+1}$ همانند در نظر گرفت. در اینجا اعضای $P^n I\!R$ یعنی کلاس‌های هم‌ارزی را با $[y_1, \cdots, y_{n+1}]$ نمایش

[1] *projective manifold (real) (varie'te' projective)*

داده‌ایم. لذا با فرض $y_i \neq ۰$ داریم

$$[y_۱, \cdots, y_{n+۱}] = [\frac{y_۱}{y_i}, \cdots, \frac{y_{i-۱}}{y_i}, ۱, \frac{y_{i+۱}}{y_i}, \cdots, \frac{y_{n+۱}}{y_i}]$$

برای تعریف کارت‌های موضعی روی $P^n I\!R$ زیرمجموعه‌های $U_۱, \cdots, U_{n+۱}$ را از آن به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$U_i = \{[y_۱, \cdots, y_{n+۱}] \in I\!P^n I\!R | y_i \neq ۰\}$$

U_i در اینجا مجموعهٔ خطوطی است از $I\!R^{n+۱}$ که از مبدأ می‌گذرند و به صفحه $y_i = ۰$ تعلق ندارند. حال نگاشت دو سویی $x_i : U_i \to I\!R^n$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: $(۱ \leq i \leq n+۱)$

$$x_i([y_۱, \cdots, y_{i-۱}, y_i, y_{i+۱}, \cdots, y_{n+۱}]) = (\frac{y_۱}{y_i}, \cdots, \frac{y_{i-۱}}{y_i}, \frac{y_{i+۱}}{y_i}, \cdots, \frac{y_{n+۱}}{y_i})$$

چون $x_i(U_i) = I\!R^n$ باز است و $\cup U_i = P^n I\!R$ بنابراین (x_i, U_i) خانواده کارت‌ها روی $P^n I\!R$ هستند. حال نشان می‌دهیم که به ازاء هر i و j نگاشت تغییر کارت دیفرانسیل‌پذیر است.

$$x_j o x_i^{-۱} : x_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow x_j(U_i \cap U_j)$$

به ازاء $j < i$ داریم

$$\begin{aligned} x_j o x_i^{-۱}(y_۱, \cdots, y_n) &= x_j(y_i[y_۱, \cdots, y_{i-۱}\ ,\ ۱\ ,\ y_i, \cdots, y_n]) \\ &= x_j[(y_۱, \cdots, y_{i-۱}, ۱, y_i, \cdots, y_n]) \\ &= (\frac{y_۱}{y_j}, \cdots, \frac{y_{j-۱}}{y_j}\ ,\ \frac{y_{j+۱}}{y_j}, \cdots, \frac{y_{i-۱}}{y_j}, \frac{۱}{y_j}, \frac{y_i}{y_j}, \cdots, \frac{y_n}{y_j}) \end{aligned}$$

این نگاشت دیفرانسیل‌پذیر است. چون حالت $i > j$ مشابه حالت قبل و حالت $j = i$ بدیهی است لذا مجموعه کارت‌های (x_i, U_i) تشکیل یک ساختار منیفلد دیفرانسیل‌پذیر n

بعدی روی $P^n I\!R$ می‌دهند.

۱۰.۳ § روش ساخت منیفلدهای خارج قسمتی

الف) گروه تبدیلات[1]

تعریف: فرض کنیم G یک گروه و M یک منیفلد باشد. گوئیم G **یک گروه تبدیلات** M است یا G روی M **عمل**[2] می‌کند اگر نگاشتی مانند φ موجود باشد که در شرایط زیر صدق کند.

$$\varphi : G \times M \longrightarrow M$$

I) **به ازاء هر $g \in G$ نگاشت φ_g که به‌صورت زیر تعریف می‌شود یک دیفئومورفیسم باشد.**

$$\varphi_g : M \longrightarrow M$$
$$m \mapsto \varphi(g, m)$$

II) اگر $g, h \in G$ آنگاه

$$\varphi_g \circ \varphi_h = \varphi_{g \cdot h}$$

تذکر: اگر e عضو خنثی G باشد داریم $\varphi_e = Id$ زیرا

$$\varphi_e = \varphi_e \circ \varphi_e \circ \varphi_e^{-1} = \varphi_{e^2} \circ \varphi_e^{-1} = \varphi_e \circ \varphi_e^{-1} = Id$$

از طرفی دیگر $\varphi_g^{-1} = \varphi_{g^{-1}}$ زیرا

$$Id = \varphi_e = \varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}}$$

تعریف: گوئیم G **بطور مؤثر**[3] روی M عمل می‌کند اگر e تنها عضو G باشد بطوریکه $\varphi_e = Id$ به عبارت دیگر اگر به‌ازاء هر نقطه m،

---

[1] $Transformations\ group$

[2] $G\ act\ on\ M\ (G\ agir\ on\ M)$

[3] $Act\ effectively\ (Agir\ effectivement)$

$$\forall m \in M \quad , \quad \varphi_g(m) = m \;\Rightarrow g = e$$

گوئیم G بطور آزاد[۱] روی M عمل می‌کند اگر e تنها عضو G باشد که دارای نقطه ثابت است. یعنی اگر به‌ازاء یک نقطه m،

$$\exists m \in M \quad , \quad \varphi_g(m) = m \Rightarrow g = e$$

به عبارت دیگر تنها دیفئومورفیسم φ_g که دارای نقاط ثابت باشد نگاشت همانی است. در این صورت گاهی می‌گوئیم G **بدون نقطه ثابت** عمل می‌کند.)

واضح است که: اگر G بطور آزاد عمل کند آنگاه G بطور مؤثر عمل می‌کند.

مثال ۱: فرض کنیم $G = SO(2, I\!R)$ گروه ماتریس‌های متعامد 2×2 با دترمینان یک[۲] باشد. از نظر هندسی G گروه دوران حول مبدأ مختصات است. G بطور موثر روی $M = I\!R^2$ عمل می‌کند.

$$G \times I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$$
$$(A, x) \longrightarrow Ax$$

G بطور موثر عمل می‌کند اما بطور آزاد عمل نمی‌کند زیرا مبدأ مختصات توسط دوران ثابت است.

$$\forall \; A \in G \quad A_0 = 0$$

مثال ۲: فرض کنیم $G = GL(n, I\!R)$ گروه خطی ماتریس‌های $n \times n$ حقیقی با دترمینان مخالف صفر[۳] بوده و $M = \mathcal{M}_{n\times n}(I\!R)$ مجموعهٔ ماتریس‌های $n \times n$ حقیقی باشد.

می‌خواهیم نشان دهیم که G یک گروه تبدیلات است که روی M عمل می‌کند. سپس بررسی می‌کنیم که آیا G بطور موثر روی M عمل می‌کند؟

---

[۱] *Act freely (Agir librement)*

[۲] *Special Orthogonal group*

[۳] *General Linear group*

نشان می‌دهیم G توسط نگاشت φ به‌صورت زیر روی M عمل می‌کند.

$$\varphi : G \times \mathcal{M}_{n\times n}(I\!R) \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times n}(I\!R)$$
$$(P, B) \longrightarrow PBP^{-1}$$

I) ابتدا نشان می‌دهیم $\varphi_p : M \longrightarrow M$ دیفرانسیل‌پذیر و دوسویی است.

$$\begin{aligned}
\varphi_P(B) &= PBP^{-1} \\
d(\varphi_P)_A(B) &= \lim_{s\to 0} \frac{\varphi_P(A+sB) - \varphi_P(A)}{s} \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{P(A+sB)P^{-1} - PAP^{-1}}{s} \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{PAP^{-1} + sPBP^{-1} - PAP^{-1}}{s} = PBP^{-1}
\end{aligned}$$

در نتیجه φ_P دیفرانسیل‌پذیر[1] بوده چون $\varphi_P^{-1} = \varphi_{P^{-1}}$ عکس آن نیز دیفرانسیل‌پذیر است.

φ_P یک به یک است زیرا

$$\varphi_P(B) = \varphi_P(B') \Rightarrow PBP^{-1} = PB'P^{-1} \Rightarrow B = B'$$

φ_P پوششی است زیرا به ازاء هر $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(I\!R)$ ماتریس B را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$B = P^{-1}AP \Rightarrow \varphi_p(B) = PP^{-1}APP^{-1} = A$$

II) اگر $P, Q \in G$ آنگاه

$$\begin{aligned}
\varphi_Q \circ \varphi_P(A) &= \varphi_Q(PAP^{-1}) = QPAP^{-1}Q^{-1} = QPA(QP)^{-1} \\
&= \varphi_{QP}(A)
\end{aligned}$$

---

[1] به طور کلی هر نگاشت خطی بین فضاهای برداری با بعد متناهی دیفرانسیل‌پذیر است و دیفرانسیل آن در هر نقطه برابر خود نگاشت است. به [۲۷] مراجعه شود.

G یک گروه تبدیلات روی M است که بطور موثر روی M عمل نمی‌کند زیرا $\varphi_{-I} = Id$

تذکر: حال نشان می‌دهیم که هر گروه تبدیلات روی M را می‌توان بطور طبیعی با یک گروه تبدیلات که بطور موثر روی M عمل می‌کند تعویض نمود.

مجموعه عناصر $k \in G$ بطوریکه $\varphi_k = Id$ را با K نمایش می‌دهیم.

$$K = \{k \in G | \varphi_k = Id\}$$

براحتی مشاهده می‌شود که K یک زیرگروه G است. اگر $k \in K$ و $g \in G$ باشد داریم

$$\varphi_{gkg^{-1}} = \varphi_g \circ \varphi_k \circ \varphi_{g^{-1}} = \varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}} = \varphi_g \circ (\varphi_g)^{-1} = Id$$

بنابراین $gkg^{-1} \in K$ لذا K یک زیر گروه نرمال G است.

گزاره ۱: اگر G روی M عمل کند آنگاه گروه خارج قسمتی G/K بطور موثر روی M عمل می‌کند.

اثبات: با استفاده از نمادگذاری بالا فرض کنیم $g \in G$، $k \in K$ و $m \in M$ و $\varphi : G \times M \longrightarrow M$ یک نگاشت باشد. داریم

$$\varphi(gk, m) = \varphi_{gk}(m) = \varphi_g(m) = \varphi(g, m)$$

حال نگاشت $\overline{\varphi}$ را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\overline{\varphi} : G/K \times M \longrightarrow M$$

$$(gK, m) \mapsto \varphi(g, m)$$

لذا نگاشت $\overline{\varphi}_{gK}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\overline{\varphi}_{gK} : M \longrightarrow M$$

$$m \mapsto \varphi_g(m)$$

تعریف این نگاشت مشابه تعریف نگاشت φ_g است $\overline{\varphi}_{gK}(m) = \varphi_g(m)$ لذا براحتی می‌توان مشاهده کرد که توسط نگاشت $\overline{\varphi}$ گروه G/K بطور موثر روی M عمل می‌کند.$\square$

تذکر: عمل G گروه تبدیلات روی M را می‌توان به‌صورت دیگری نیز بیان نمود. می‌گوئیم G از چپ روی M **عمل می‌کند**[1] و بجای $\varphi_g(m)$ می‌نویسیم gm لذا رابطه II در تعریف با فرض $g, h \in G$ و $m \in M$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$g(hm) = (gh)m$$

از محاسن بیان جدید آن است که می‌توان آنرا برای عمل راست به‌صورت زیر تعریف کرد. گوئیم G از راست روی M **عمل می‌کند**[2] اگر این عمل توسط نگاشت زیر تعریف شود بطوریکه

$$\varphi : M \times G \longrightarrow M$$

$(I)'$ نگاشت $\varphi_g : m \longrightarrow \varphi(m, g)$ دیفئومورفیسم باشد.

$(II)'$ اگر $g, h \in G$ آنگاه $\varphi_g \circ \varphi_h = \varphi_{hg}$.

گاهی اوقات بجای $\varphi_g(m)$ از نماد $m \cdot g$ استفاده می‌کنیم. در این صورت رابطه $(II)'$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$(m \cdot h) \cdot g = m \cdot (hg)$$

مثال ۳: گروه جمعی اعداد صحیح، $\mathbb{Z}$ را در نظر می‌گیریم. با استفاده از نگاشت

$$\varphi : \mathbb{R}^{۲} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}^{۲}$$

$$((x_{۱}, x_{۲}), n) \longrightarrow (x_{۱} + n, x_{۲})$$

نشان می‌دهیم $\mathbb{Z}$ از راست یا چپ روی $\mathbb{R}^{۲}$ عمل می‌کند. شرایط I و II را تحقیق می‌کنیم. واضح است که φ_n دیفرانسیل‌پذیر است.

---

[1] *act on the left (agir à gauche)*

[2] *act on the right (agir à droite)*

$$\varphi_n(x_1, x_2) = (x_1 + n, x_2)$$

از طرفی چون $Id = \varphi_0 = \varphi_n \circ \varphi_{-n}$ داریم. $\varphi_n^{-1} = \varphi_{-n}$ لذا φ_n^{-1} نیز دیفرانسیل‌پذیر است. φ_n یک به یک و پوششی است بنابراین شرط I برقرار است. حال می‌گوئیم $\forall m, n \in \mathbb{Z}$

$$\varphi_m \circ \varphi_n(x_1, x_2) = \varphi_m(x_1 + n, x_2) = (x_1 + n + m, x_2) = \varphi_{n+m}(x_1, x_2)$$

لذا شرط II نیز برقرار است.

حال می‌گوئیم $\mathbb{Z}$ بطور آزاد روی $\mathbb{R}^2$ عمل می‌کند زیرا اگر نقطه‌ای مانند (x_1, x_2) از $\mathbb{R}^2$ موجود باشد بطوریکه $\varphi_n(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ از آن نتیجه می‌شود که n عضو خنثی نسبت به عمل جمع است. در حقیقت

$$\varphi_n(x_1, x_2) = (x_1 + n, x_2) = (x_1, x_2) \Rightarrow n = 0$$

بنابراین عضو خنثی در $\mathbb{Z}$ تنها نگاشتی است که دارای نقاط ثابت است.

تمرین ۱: فرض کنیم $Sym(n, \mathbb{R})$ فضای برداری ماتریس‌های $n \times n$ متقارن حقیقی[1] باشد.

الف ـ نشان دهید که $Sym(n, \mathbb{R})$ یک زیرمنیفلد جادهنده $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ است.

راهنمایی: یک کارت کلی طوری در نظر می‌گیریم که درایه‌های هر ماتریس متقارن را به درایه‌های روی قطر و بالای قطر ببرد. تعداد این درایه‌ها $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 - n}{2} + n$ است.

$$x : Sym(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$$

$$x : \|a_{ij}\| \longrightarrow (a_{11}, \cdots, a_{1n}, a_{22}, \cdots, a_{2n}, a_{33}, \cdots, a_{3n}, \cdots a_{nn})$$

سپس بنابر تعریف زیرمنیفلد جادهنده کافی است با استفاده از تعریف کارت x نشان دهید نگاشت شمول طبیعی $J : Sym(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ جادهنده است. این تمرین را می‌توان با استفاده از تمرین ۶ بخش ۴.۳ نیز حل نمود.

ب ـ نشان دهید که گروه خطی ماتریس‌های $n \times n$ حقیقی $GL(n, \mathbb{R})$ توسط نگاشت

---

[1] *Symetric group*

زیر یک گروه تبدیلات روی $Sym(n, I\!R)$ است.

$$\varphi : GL(n, I\!R) \times Sym(n, I\!R) \longrightarrow Sym(n, I\!R)$$
$$(T, A) \longrightarrow TAT^t$$

ج ـ نشان دهید $GL(n, I\!R)$ به‌طور موثر روی $Sym(n, I\!R)$ عمل نمی‌کند.

ب) ساخت منیفلد خارج قسمتی توسط عمل یک گروه

فرض کنیم G یک گروه تبدیلات باشد که روی M عمل می‌کند.

$$\varphi : G \times M \longrightarrow M$$
$$(g, m) \ \mapsto \ \varphi_g(m)$$

در این قسمت از نماد $g \cdot m$ بجای $\varphi_g(m)$ استفاده می‌کنیم $g \cdot m = \varphi_g(m)$. یک رابطه هم‌ارزی روی M به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\forall m_۱, m_۲ \in M \quad , \quad m_۱ \sim m_۲ \Leftrightarrow \exists g \in G : \quad m_۲ = g \cdot m_۱$$

مجموعه خارج قسمتی را توسط M/G نمایش می‌دهیم. این مجموعه خارج قسمتی الزاماً یک منیفلد خارج قسمتی نیست.

مثال ۴: $I\!R^* = I\!R - \{۰\}$ توسط نگاشت زیر روی $I\!R^{n+۱}$ عمل می‌کند

$$I\!R^* \times I\!R^{n+۱} \longrightarrow I\!R^{n+۱}$$
$$(a, x) \ \mapsto \ ax$$

همانطوریکه در مثال ۲ از بخش قبل دیدیم $I\!R^{n+۱}/I\!R^*$ دارای ساختار منیفلد خارج قسمتی نیست.

حال می‌خواهیم ببینیم تحت چه شرایطی M/G دارای ساختار منیفلد خارج قسمتی است. فرض کنیم G بطور آزاد روی M عمل کند (یعنی بدون نقطه ثابت) و M/G یک منیفلد خارج قسمتی باشد. در این صورت $q : M \longrightarrow M/G$ یک پوشاننده یا سوبمرسیون است. اگر M و M/G دارای ابعاد برابر باشند، q یک دیفئومورفیسم موضعی است. به عبارت دیگر:

به ازاء هر $m \in M$ وجود دارد یک همسایگی U شامل m بطوریکه $q|_U$ دو سویی باشد. چون G بطور آزاد روی M عمل می‌کند بسادگی می‌توان نشان داد که اگر $g \neq e$ آنگاه $U \cap gU = \phi$. در حقیقت اگر $x \in U \cap gU$ داریم $x \in U$ و $x = gy$ بطوریکه $y \in U$ یعنی $\overline{x} = \overline{y}$ یا $q(x) = q(y)$. چون $q|_U$ دو سویی است از آن نتیجه می‌شود $x = y$ لذا $gx = x$ و x نقطه ثابت است و در نتیجه چون G بطور آزاد عمل می‌کند $g = e$ بنابراین اگر $g \neq e$ فرض شود آنگاه $U \cap gU$ تهی خواهد بود. (یادآوری می‌کنیم که دو سویی بودن $q|_U$ به این معنی است که کلاس‌های هم‌ارزی در U مجموعه‌های تک عضوی هستند.)

بحث فوق ما را به ارائه تعریف زیر رهنمون می‌سازد.

تعریف: فرض کنیم گروه تبدیلات G روی M عمل کند. گوئیم G **بطور ناپیوسته**[1] عمل می‌کند اگر به ازاء هر $m \in M$ یک همسایگی U از m وجود داشته باشد بطوریکه

$$\forall g \neq e \qquad U \cap gU = \phi$$

تذکر ۱: اگر G بطور ناپیوسته عمل کند آنگاه بطور آزاد عمل می‌کند.

تذکر ۲: همانطوریکه در بالا اشاره شد اگر G بدون نقطه ثابت (بطور آزاد) روی M عمل کند و M/G یک منیفلد خارج قسمتی باشد بطوریکه بعد M/G با بعد M برابر شود آنگاه G بطور ناپیوسته عمل می‌کند.

---

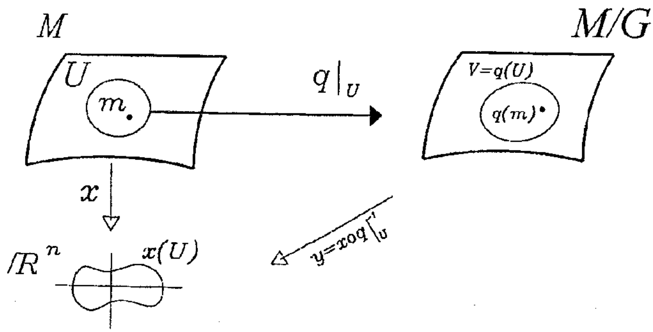
[1] *discontinuous*

عکس این موضوع نیز صحت دارد که در قضیه زیر ثابت می‌شود.

قضیه ۱: اگر گروه تبدیلات G بطور آزاد (بدون نقطه ثابت) و ناپیوسته روی M عمل کند آنگاه مجموعه خارج قسمتی M/G دارای ساختار یک منیفلد خارج قسمتی است که بعد آن برابر بعد M است.

اثبات: اگر عمل G ناپیوسته باشد به ازاء هر $m \in M$ یک همسایگی U از M موجود است بطوریکه $q|_U : M \longrightarrow M/G$ یک به یک باشد زیرا به ازاء هر $g \neq e$، U در رابطه $U \cap gU = \phi$ صدق می‌کند و اگر فرض کنیم $x, y \in U$ و $q(x) = q(y)$ از آن نتیجه می‌شود که $\overline{y} = \overline{x}$ و چون اعضای این کلاس‌ها تک عضوی هستند داریم $x = y$.

حال فرض کنیم $m \in M$ و U به‌صورت بالا تعریف شده و دامنه کارت (x, U) باشد.



شکل ۳.۲۶

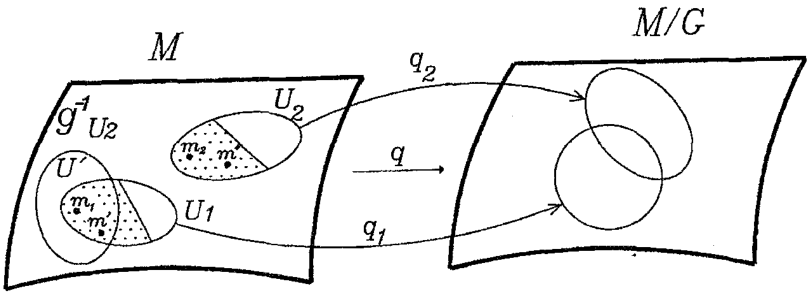
حال یک کارت روی M/G در همسایگی $q(m)$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. فرض کنیم $y = xoq|_U^{-1}$ و $V = q(U)$ نشان می‌دهیم که کارت‌های (y, V) یک اطلس C^∞ روی M/G تعریف می‌کنند.

واضح است که حوزه تعریف این کارت‌ها M/G را می‌پوشاند. فرض کنیم (y_1, V_1) و (y_2, V_2) دو کارت روی M/G با فرض $V_1 \cap V_2 \neq \phi$ باشند. فرض کنیم m_1 و m_2 دو نقطه از M بوده که بترتیب در کارت‌های (x_1, U_1) و (x_2, U_2) قرار داشته باشند. برای

اختصار فرض کنیم $q_1 = q|_{U_1}$ و $q_2 = q|_{U_2}$. باید نشان دهیم که نگاشت تغییر کارت

$$y_2 \circ y_1^{-1} = x_2 \circ q_2^{-1} \circ q_1 \circ x_1^{-1}$$

دیفرانسیل‌پذیر است. (با توجه به شکل) کافی است نشان دهیم $q_2^{-1} \circ q_1$ دیفرانسیل‌پذیر است.



شکل ۳.۲۷

فرض کنیم m_1 در حوزه تعریف $q_2^{-1} \circ q_1$ قرار داشته باشد به عبارت دیگر $m_1 \in q_1^{-1}(V_1 \cap V_2)$ نشان می‌دهیم که $q_2^{-1} \circ q_1$ در نقطه m_1 دیفرانسیل‌پذیر است.

فرض کنیم $m_2 = q_2^{-1} \circ q_1(m_1) \in U_2$ چون m_1 و m_2 هم‌ارز هستند به عبارت دیگر چون $q(m_1) = q(m_2)$ عضوی مانند $g \in G$ وجود دارد بطوریکه $m_2 = gm_1$ از آن نتیجه می‌گیریم که

$$U' = U_1 \cap g^{-1} U_2$$

بازی از M شامل m_1 است. باید ثابت کنیم که تحدید $q_2^{-1} \circ q_1$ به U' دیفرانسیل‌پذیر است (از این موضوع در حالت خاص نتیجه می‌گیریم $q_2^{-1} \circ q_1$ در m_1 دیفرانسیل‌پذیر است)

فرض کنیم $m' \in U' = U_1 \cap g^{-1} U_2$ نقطه دلخواهی از U' باشد و همچنین $m'' = q_2^{-1} \circ q_1(m')$ چون $m' \in g^{-1} U_2$ داریم $gm' \in U_2$ از طرف دیگر m' و

gm' در یک کلاس هم‌ارزی قرار دارند بنابراین $q(m') = q(gm')$. از اینکه $m' \in U_1$ و $gm' \in U_2$ بنابر تعریف q_1 و q_2 داریم $q_1(m') = q_2(gm')$

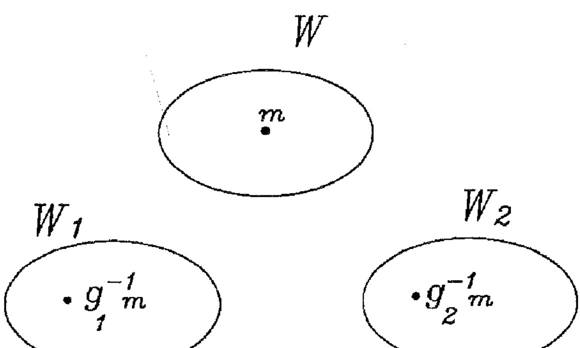
$$q_2^{-1} \circ q_1(m') = gm'$$

از اینجا نتیجه می‌شود که $q_2^{-1} o q_1$ روی U' بر نگاشت $\varphi_g(m) = gm$ منطبق می‌شود لذا روی U' و علی‌الخصوص در نقطه m_1 مشتق‌پذیر است. □ در اینجا باید توجه داشت که اگر منیفلد M هاسدرف باشد الزاماً منیفلد خارج‌قسمتی M/G هاسدرف نیست[1]، امّا اگر گروه G متناهی بوده و بطور آزاد عمل کند M/G نیز هاسدرف خواهد بود. (تمرین ۴ را ببینید)

گزاره ۲: اگر M یک منیفلد هاسدرف بوده و G یک گروه متناهی باشد که بطور آزاد (بدون نقطه ثابت) روی M عمل می‌کند، آنگاه G بطور ناپیوسته عمل می‌کند و در نتیجه M/G یک منیفلد خارج قسمتی است که بعد آن برابر بعد M است.

اثبات: فرض کنیم $G = \{g_1, \cdots, g_k, e\}$ چون M هاسدرف بوده و برای هر $m \in M$ یک همسایگی باز W از m و همچنین بازهای W_i شامل $g_i^{-1}m$ موجودند بطوریکه

$$W \cap (\cup_{i=1}^{k} W_i) = \phi$$



شکل ۳.۲۸

[1] برای مثال نقض می‌توانید به [۶] مثال ۶.۳.۲ مراجعه کنید.

داریم $m \in W$ و $m \notin g_i\overline{W}$ زیرا اگر $m \in g_i\overline{W}$ آنگاه $g_i^{-1}m \in \overline{W}$ که یک تناقض است. در اینجا منظور ما از $\mathcal{C}W$ مکمل W است.

بنابراین به ازاء هر $i = 1, \cdots, k$ داریم $m \in W \cap \mathcal{C}g_i\overline{W}$ حال فرض کنیم

$$U = W \cap \mathcal{C}g_1\overline{W}_1 \cap \mathcal{C}g_2\overline{W}_2 \cap \cdots \cap \mathcal{C}g_k\overline{W}$$

U باز است و $U \cap g_iU = \phi \quad \forall i = 1, \cdots, k$ زیرا

$$\begin{aligned} U \cap g_iU &= (W \cap \mathcal{C}g_1\overline{W} \cap \cdots \cap \mathcal{C}g_i\overline{W} \cdots \cap \mathcal{C}g_k\overline{W}) \cap (g_iW \cap \cdots) \\ &= (\mathcal{C}g_i\overline{W} \cap g_iW) \cap \cdots \end{aligned}$$

بنابراین

$$\mathcal{C}g_i\overline{W} \cap g_iW \subset (\mathcal{C}_{g_i}W) \cap g_iW = \phi$$

از آنجا $U \cap g_iU = \phi$ لذا بنابر تعریف گروه G بطور ناپیوسته عمل می‌کند. از قضیه قبل نتیجه می‌شود که M/G یک منیفلد خارج قسمتی است که بعد آن برابر بعد منیفلد M است. □

مثال ۵: نشان می‌دهیم اگر $\mathbb{Z}$ مجموعهٔ اعداد صحیح باشد آنگاه $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ یک منیفلد خارج قسمتی ۲ بعدی است.

در مثال ۳ از همین بخش دیدیم که $\mathbb{Z}$ با استفاده از نگاشت زیر بطور آزاد روی $\mathbb{R}^2$ عمل می‌کند.

$$\varphi_n(x_1, x_2) = (x_1 + n, x_2)$$

حال می‌گوئیم که $\mathbb{Z}$ بطور ناپیوسته عمل می‌کند زیرا اگر همسایگی U از نقطه $m = (x_1, x_2)$ در $\mathbb{R}^2$ را باندازه کافی کوچک اختیار کنیم آنگاه

$$U \cap \varphi_n(U) = \phi$$

(زیرا در حقیقت φ_n هر نقطه (x_1, x_2) را به اندازه لااقل یک واحد در جهت محور x_1 به جلو منتقل می‌کند بنابراین اگر شعاع همسایگی U را باندازه کافی کوچک اختیار کنیم $U \cap \varphi_n(U) = \phi$)

لذا $\mathbb{Z}$ بطور ناپیوسته عمل می‌کند. حال از قضیه ۱ نتیجه می‌گیریم $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ یک منیفلد خارج قسمتی با بعد ۲ است.

تمرین :

۲ـ نشان دهید $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ یک منیفلد خارج قسمتی با بعد یک است.

راهنمایی: ثابت کنید $\mathbb{Z}$ گروه جمعی اعداد صحیح با استفاده از تابع زیر بطور آزاد و ناپیوسته روی $\mathbb{R}$ عمل می‌کند. سپس از قضیه ۱ استفاده کنید.

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(t, n) \longrightarrow t + n$$

۳ـ فرض کنیم روی $\mathbb{Z}$ گروه جمعی اعداد صحیح تابع φ به‌صورت زیر تعریف شود

$$\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(m, n, t) \longrightarrow t + m\alpha + n\beta$$

که در آن α و β اعداد حقیقی ناصفری هستند که خارج قسمت آنها عددی گنگ است.

الف ـ نشان دهید φ مشخص کننده عمل $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ روی $\mathbb{R}$ بعنوان یک گروه تبدیلات است.

ب ـ نشان دهید φ آزاد است.

ج ـ نشان دهید φ بطور ناپیوسته عمل نمی‌کند.

۴ـ دیدیم اگر یک گروه متناهی بطور آزاد روی منیفلد هاسدرف M عمل کند آنگاه بطور ناپیوسته نیز عمل می‌کند. ثابت کنید در این حالت منیفلد خارج قسمتی نیز هاسدرف است.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

فصل ۴: جبر تانسورها[1]

مقدمه

از خواص مهم هندسه ایجاد ارتباط بین ریاضیات محض و کاربرد آن در علوم مختلف است. یکی از ابزارهایی که برای ایجاد این ارتباط مورد استفاده قرار می‌گیرد تانسورها هستند. تانسورها که به نوعی تبدیلات چند خطی می‌باشند در تعیین ماهیت فضاها نقش عمده‌ای دارند. به عنوان مثال در ریاضیات عمومی با تانسورهای انحنا و تاب (تانسور از نوع $\binom{\circ}{\circ}$) که مشخص کننده خمیدگی و میزان انحراف از صفحه یک منحنی در $I\!R^۳$ هستند آشنا شده‌ایم. در اینجا قصد تعمیم این مفاهیم را نداریم بلکه هدف ما آشنا نمودن خواننده با مفهوم تانسورها بطور مجرد است. به عبارت دیگر می‌خواهیم مقدمات لازم جهت مطالعه حسابان تانسورها و استفاده از آن در هندسه و فیزیک را فراهم نماییم.

در این فصل پس از یادآوری چند تعریف مقدماتی به تعریف تانسور هموردا در بخش ۲§ می‌پردازیم. در این بخش ضرب تانسورها روی فضاهای برداری را تعریف نموده نشان می‌دهیم خانواده این گونه تانسورها تشکیل یک فضای برداری می‌دهد که پایه و بعد آن را مشخص می‌کنیم. بخش ۳§ به تعمیم این مفاهیم روی منیفلدها اختصاص داشته خواهیم دید که

---

[1] *Tensor Algebra (Algébre tensoriel)*

خانواده این گونه تانسورها روی یک منیفلد تشکیل یک منیفلد می‌دهد. در بخش ۴§ تعریف کلی تانسورهای پادوردا و هموردا ارائه می‌شود. در این دو بخش مشابه میدان‌های برداری، میدان‌های تانسوری را تعریف می‌کنیم. بخش ۵§ به تعریف دوم تانسورها به نام تعریف کلاسیک تانسورها اختصاص دارد. این تعریف اگرچه قدیمی‌تر است اما دارای ویژگی‌هایی است که کاربرد آن را در عمل ساده‌تر می‌سازد و از این حیث مورد توجه بیشتر فیزیکدانان است. به دانشجویان رشته فیزیک و یا خوانندگانی که خواهان دستیابی سریع به تعریف تانسورها و استفاده از آن می‌باشند توصیه می‌گردد این بخش را مطالعه نمایند.

مثال‌ها و تمرینات این فصل با دقت از میان متون کلاسیک و مدرن هندسه انتخاب گردیده و مطالعه آنها می‌تواند دانشجویان را بیشتر با ماهیت این ابزار هندسی آشنا سازد.

۱.۴ § یادآوری: فضای دوگان[1]

فرض کنیم E یک فضای برداری nـبعدی روی میدان $I\!K$ باشد (در این بخش میدان $I\!K$ را مجموعه اعداد حقیقی $I\!R$ در نظرمی‌گیریم) قرار می‌دهیم $E^* = L(E, I\!K)$ مجموعه نگاشتهای خطی از E در $I\!K$ باشد. E^* را **فضای دوگان** واعضای آنرا *فرم‌های خطی* می‌گویند.

اگر e_i یک پایه برای E باشد فرم‌های خطی نگاشتهای زیر می‌باشند

$$\omega : E \longrightarrow I\!K$$

$$\omega : x = \sum_i x^i e_i \;\mapsto\; a_1 x^1 + \cdots + a_n x^n \qquad\qquad (a_i \in I\!K)$$

چون E و E^* دارای ابعاد برابرند (بعد مجموعه توابع خطی از E در $I\!R$ برابر $1 \times n$ است) بنابراین با انتخاب یک پایه برای E و یک پایه برای E^*، E با E^* *ایزومورف* می‌باشد. این موضوع را می‌توان به‌صورت زیر نیز بررسی نمود.

در حقیقت اگر یک پایه برای E در نظر بگیریم یک پایه برای E^* به آن وابسته می‌باشد

---

[1] *Dual space (Espace duale)*

که آنرا **پایه دوگان** می‌نامیم. اگر فرض کنیم e_i یک پایه برای E باشد و نگاشت θ^i به‌صورت زیر تعریف شود براحتی می‌توان نشان داد که θ^iها یک پایه برای E^* است.

$$\theta^i : E \longrightarrow I\!K$$
$$\theta^i : x = \sum_j x^j e_j \mapsto \theta^i(x) = x^i \qquad\qquad (i = ۱, \cdots, n)$$

دراینجا θ^i نگاشت مولفه iام در پایه e_i نیز گفته می‌شود که باتوجه به تعریف داریم

$$\theta^i(e_j) = \delta^i_j$$

با تاثیر θ^i روی اعضای E به دلیل خطی بودن آن داریم

$$\theta^i(x) = \theta^i(\sum_j x^j e_j) = \sum_j x^j \theta^i(e_j) = \sum_j x^j \delta^i_j = x^i$$

به این صورت بین E^* و E *با انتخاب یک پایه در* E *یک ایزومورفیسم برقرار می‌باشد.* این ایزومورفیسم $\varphi : E \to E^*$ را طوری تعریف می‌کنیم که اعضای پایه را به اعضای پایه دوگان ببرد $\varphi(e_i) = \theta^i$. چون E وE^* دارای ابعاد برابرند چنین ایزومورفیسمی موجود است ولذا داریم

$$\varphi(x) = \varphi(\sum_i x^i e_i) = \sum_i x^i \varphi(e_i) = \sum_i x^i \theta^i$$

از طرف دیگر E^{**} با E *ایزومورف کانونی است.* یعنی یک ایزومورفیسم ψ وجود دارد بطوریکه $\begin{aligned} \psi : \quad & E \to E^{**} \\ & x \mapsto \psi(x) \end{aligned}$ به انتخاب پایه برای E بستگی نداشته باشد. داریم

$\begin{aligned} \psi(x) : \quad & E^* \mapsto I\!R \\ & \omega \mapsto \omega(x) \end{aligned}$ می‌توان نشان داد که $\psi(x) \in L(E^*, I\!R)$ یا $\psi(x) \in E^{**}$

و اگر E با بعد متناهی باشد ψ ایزومورفیسم فضای برداری خواهد بود. از این پس E را با E^{**} همانند در نظر خواهیم گرفت.

۲.۴ § تانسور هموردا و ضرب تانسوری[۱]

در این بخش ابتدا به تعریف تانسور هموردا روی فضای برداری E پرداخته، سپس تعمیم آنرا برای منیفلدها بیان می‌کنیم.

تعریف: فرض کنیم E یک فضای برداری روی میدان $I\!K$ باشد. هر نگاشت $p-$ خطی t روی E را یک $p-$ **تانسور هموردا** یایک تانسور از نوع $\binom{0}{p}$ می‌گوئیم.

$$t : \underbrace{E \times \cdots \times E}_{p} \longrightarrow I\!K$$

به عنوان مثال تانسورهای از نوع $\binom{0}{1}$ همان اعضای E^* هستند که آنها را ۱ـفرمی نامیدیم. مجموعه تانسورهای نوع $\binom{0}{p}$ را با $\otimes_p^0(E)$ نمایش می‌دهیم. می‌دانیم

$$\otimes_1^0 E = E^*$$

$$\otimes_0^0 E = I\!K \qquad \text{قرار می‌دهیم}$$

$\otimes_p^0(E)$ با عمل جمع وضرب اسکالر زیر، یک فضای برداری روی $I\!K$ می‌باشد.

$$\begin{cases} (t_1 + t_2)(X_1, \cdots, X_p) &= t_1(X_1, \cdots, X_p) + t_2(X_1, \cdots, X_p) \\ (\lambda t)(X_1, \cdots, X_p) &= \lambda t(X_1, \cdots, X_p) \qquad \lambda \in I\!K \end{cases}$$

ضرب تانسوری[۲]

تعریف: فرض کنیم $t \in \otimes_q^0(E)$ و $s \in \otimes_p^0(E)$، $(p, q \geq 1)$ حاصلضرب تانسورهای $s \otimes t$ را به‌صورت زیر تعریف می کنیم $s \otimes t \in \otimes_{p+q}^0(E)$

$$(s \otimes t)(X_1, \cdots, X_p, Y_1, \cdots, Y_q) = s(X_1, \cdots, X_p)t(Y_1, \cdots, Y_q)$$

---

[۱] Covariant Tensor & Tensor product (Tenseur covariant & Produit tenseuriel)

[۲] Tensor product (Produit Tenseuriel)

اگر $\lambda \in \otimes^0_0(E) = I\!K$ قرار می‌دهیم $\lambda \otimes t = \lambda t$

تمرین:

باتوجه به تعریف فوق درستی روابط زیر را تحقیق کنید.

خاصیت انجمنی

$$\alpha \otimes (\beta \otimes \gamma) = (\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma$$

خاصیت توزیع پذیری

$$\alpha \otimes (\beta + \gamma) = \alpha \otimes \beta + \alpha \otimes \gamma$$

$$(\alpha + \beta) \otimes \gamma = \alpha \otimes \gamma + \beta \otimes \gamma$$

تذکر: یادآوری می‌کنیم که هنگام جمع، دو تانسور لازم است از یک نوع باشند اما هنگام ضرب، چنین شرطی لازم نیست.

مثال: فرض کنیم $t \in \otimes^0_2(E)$ و $\{e_1, \cdots, e_n\}$ یک پایه برای E و $\{\theta^1, \cdots, \theta^n\}$ پایه دوگان آن باشد. پایه‌ای برای $\otimes^0_2(E)$ بدست می‌آوریم.

برای هر $X, Y \in E$ داریم

$$t(X,Y) = t(\sum_{i=1}^{n} X^i e_i, \sum_{j=1}^{n} Y^j e_j) = \sum_{i,j} X^i Y^j t(e_i, e_j)$$

در اینجا فرض کرده‌ایم $t_{ij} = t(e_i, e_j) \in I\!K$ چون $\theta^i(X) = X^i, \theta^j(Y) = Y^j$ می‌توان نوشت

$$t(X,Y) = \sum_{i,j} t_{ij}\theta^i(X)\theta^j(Y) = (\sum_{i,j} t_{ij}\theta^i \otimes \theta^j)(X,Y)$$

و از آنجا

$$t = \sum_{i,j=1}^{n} t_{ij}\theta^i \otimes \theta^j$$

از این عبارت نتیجه می شود که خانواده $\{\theta^i \otimes \theta^j\}_{i,j=1,\cdots n}$ فضای برداری $\otimes_2^0(E)$ را تولید می‌کند.

حال نشان می‌دهیم که این خانواده مستقل خطی نیز هست. فرض کنیم

$$\sum_{\alpha_1,\alpha_2=1}^{n} \lambda_{\alpha_1\alpha_2}\, \theta^{\alpha_1} \otimes \theta^{\alpha_2} = 0$$

از تاثیر این عبارت بر روی $(e_{\beta_1}, e_{\beta_2})$ با فرض $\beta_2 = 1, \cdots, n, \beta_1 = 1, \cdots, n$ داریم

$$0 = \sum_{\alpha_1,\alpha_2=1}^{n} \lambda_{\alpha_1\alpha_2}\theta^{\alpha_1}(e_{\beta_1})\theta^{\alpha_2}(e_{\beta_2}) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2} \lambda_{\alpha_1,\alpha_2}\delta^{\alpha_1}_{\beta_1}\delta^{\alpha_2}_{\beta_2} = \lambda_{\beta_1\beta_2}$$

بنابراین مستقل خطی است.

در حالت کلی قضیه زیر را داریم که اثبات آن کاملاً مشابه مثال بالاست.

قضیه: اگر $\theta^1, \cdots, \theta^n$ یک پایه E^* باشد آنگاه مجموعه تانسورهای $\{\theta^{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \theta^{\alpha_p}\}_{\substack{\alpha_1=1,\cdots,n \\ \alpha_p=1,\cdots,n}}$ یک پایه برای فضای برداری $\otimes_p^0(E)$ است و داریم:

$$\dim \otimes_p^0 E = n^p$$

اثبات: فرض کنیم $\{e_1, \cdots, e_n\}$ پایه E و $\{\theta^1, \cdots, \theta^n\}$ پایه دوگان آن باشد نشان می‌دهیم که خانواده $\{\theta^{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \theta^{\alpha_p}\}$ که در آن تغییرات اندیسها عبارت است از $\alpha_p = 1, \cdots, n, \cdots, \alpha_1 = 1, \cdots, n$ فضای $\otimes_p^0 E$ را تولید می‌کند.

فرض کنیم $X_1, \cdots, X_p \in E, t \in \otimes_p^0(E)$ داریم:

$$\begin{aligned}
t(X_1, \cdots, X_p) &= t(\sum_{\alpha_1} X_1^{\alpha_1} e_{\alpha_1}, \cdots, \sum_{\alpha_p} X_p^{\alpha_p} e_{\alpha_p}) \\
&= \sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_p} X_1^{\alpha_1} \cdots X_p^{\alpha_p} t(e_{\alpha_1}, \cdots, e_{\alpha_p}) \\
&= \sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_p} t_{\alpha_1\cdots\alpha_p} X_1^{\alpha_1} \cdots X_p^{\alpha_p}
\end{aligned}$$

(در اینجا فرض کرده‌ایم $(t(e_{\alpha_1}, \cdots, e_{\alpha_p}) = t_{\alpha_1 \cdots \alpha_p}$

$$= \sum_{\alpha_1, \cdots, \alpha_p} t_{\alpha_1, \cdots, \alpha_p} \theta^{\alpha_1}(X_1) \cdots \theta^{\alpha_p}(X_p)$$
$$= (\sum_{\alpha_1, \cdots, \alpha_p} t_{\alpha_1, \cdots, \alpha_p} \theta^{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \theta^{\alpha_p})(X_1 \cdots X_p)$$

و از آنجا داریم

$$t = \sum_{\alpha_1 \cdots \alpha_p} t_{\alpha_1 \cdots \alpha_p} \theta^{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \theta^{\alpha_p}$$

بنابراین خانواده فوق فضای $\otimes_p^0(E)$ را تولید می‌کند.

حال نشان می‌دهیم که این خانواده مستقل خطی است. داریم $\theta^i(e_j) = \delta_j^i$ فرض کنیم

$$\sum_{\alpha_1, \cdots, \alpha_p = 1}^{n} \lambda_{\alpha_1 \cdots \alpha_p} \theta^{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \theta^{\alpha_p} = 0$$

با عمل این عبارت روی بردارهای پایه $(e_{\beta_1}, \cdots, e_{\beta_p})$ داریم :

$$0 = \sum_{\alpha_1 \cdots \alpha_p} \lambda_{\alpha_1 \cdots \alpha_p} \theta^{\alpha_1}(e_{\beta_1}) \cdots \theta^{\alpha_p}(e_{\beta_p}) = \sum_{\alpha_1, \cdots, \alpha_p} \lambda_{\alpha_1 \cdots \alpha_p} \delta_{\beta_1}^{\alpha_1} \cdots \delta_{\beta_p}^{\alpha_p}$$

از آنجا نتیجه می‌شود $\lambda_{\beta_1 \cdots \beta_p} = 0$ بنابراین خانواده فوق مستقل خطی نیز هست و درنتیجه یک پایه برای فضای $\otimes_p^0(E)$ تشکیل می‌دهد.

چون تعداد اعضای پایه برابر $\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{p}$ است بعد فضای $\otimes_p^0(E)$ برابر n^p است.

□

۳.۴ § تانسور روی منیفلدها

فرض کنیم M یک منیفلد و T_mM فضای مماس بر M در m باشد. می‌دانیم T_mM یک فضای برداری است. حال فضای تانسورهای $\otimes_p^0(T_mM)$ را درنظر می‌گیریم.

تعریف: *یک تانسور از نوع $\binom{0}{p}$ در یک نقطه m از منیفلد M عبارت است از یک عضو فضای برداری*

$$\otimes_p^0(T_mM)$$

اگر (x,U) یک کارت مختصاتی در همسایگی m و $\left\{(\frac{\partial}{\partial x^i})_m\right\}$ پایه طبیعی T_mM وابسته به این مختصات باشد، قبلا دیدیم که پایه دوگان پایه فوق عبارت است از $\{(dx^i)_m\}$.
بنابراین یک تانسور از نوع $\binom{0}{p}$ را می‌توان با توجه به قضیه قبل به‌صورت زیر نوشت

$$t_m \in \otimes_p^0(T_mM)$$

$$\boxed{t_m \underset{U}{=} \sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_p} t_{\alpha_1\cdots\alpha_p}(dx^{\alpha_1})_m \otimes \cdots \otimes (dx^{\alpha_p})_m}$$

که درآن $t_{\alpha_1\cdots\alpha_p} \in \mathbb{R}$، مقادیری حقیقی هستند که در اثبات قضیه قبل تعریف گردیدند.
این مقادیر را مولفه‌های تانسور t می‌نامیم.
رابطه اخیر را تعریف مدرن تانسور هموردا از نوع $\binom{0}{p}$ در همسایگی (x,V) از نقطه $m \in M$ می‌نامند.
مثال ۱: فرض کنیم $f : M \to \mathbb{R}$ دیفرانسیل‌پذیر باشد آنگاه df یک تانسور هموردا از نوع $\binom{0}{1}$ روی M است. همچنین حاصلضرب تانسوری $df \otimes df$ تانسوری از نوع $\binom{0}{2}$ روی M است.

در حقیقت بنابر تعریف دیفرانسیل کل داریم $df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ لذا با توجه به تعریف مدرن تانسور هموردا از نوع $\binom{0}{p}$، df یک تانسور از نوع $\binom{0}{1}$ روی M بوده $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ مولفه‌های آن هستند. بنابر تعریف ضرب تانسوری $df \otimes df$ یک تانسور $\binom{0}{2}$ است که مولفه‌های آن از توابع $\frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j}$ تشکیل شده است.
لم: $\otimes_p^0(TM)$ مجموعه تانسورهای نوع $\binom{0}{p}$ روی M یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر است.
اثبات : داریم

$$\otimes_p^0(TM) = \cup_{m\in M} \otimes_p^0 (T_mM)$$

(می‌دانیم $\otimes_1^0(TM) = T^*M$)
نشان می‌دهیم که اگر M ازکلاس C^k باشد $\otimes_p^0(TM)$ دارای ساختار یک منیفلد از کلاس C^{k-1} است.

فرض کنیم

$$\pi : \otimes_p^\circ(TM) \longrightarrow M$$
$$t_m \in \otimes_p^\circ(T_mM) \mapsto m$$

اگر (x,U) یک کارت روی M باشد کارت $(\overline{x},\overline{U})$ را روی $\otimes_p^\circ(TM)$ به‌صورت زیر تعریف می نمائیم.

$$\overline{U} = \pi^{-1}(U)$$
$$\overline{x} \ : \ \overline{U} \to I\!R^{n+n^p}$$
$$t_m \to (x^1(m),\cdots,x^n(m),t_{\alpha_1\cdots\alpha_p})$$

که $t_{\alpha_1\cdots\alpha_p}$ عبارت است از مولفه‌های تانسور t در پایه $\{(dx^i)_m\}$ یعنی

$$t_m = \textstyle\sum_{\alpha_1\cdots\alpha_p} t_{\alpha_1\cdots\alpha_p}(dx^{\alpha_1})_m \otimes\cdots\otimes (dx^{\alpha_p})_m$$

به این صورت می‌توان بررسی نمود که خانواده کارت های فوق تشکیل یک اطلس C^{k-1} روی $\otimes_p^\circ(TM)$ می‌دهند. (رابطه بین مولفه‌های تانسور t در دوکارت x',x در بخش ۵.۴ .§ تعریف کلاسیک تانسورها آورده شده است) □

در اینجا میدان ۱ ـفرمی راتعمیم داده مشابه آن میدان تانسوری را تعریف می‌کنیم.

تعریف: یک **میدان تانسوری**[1] از نوع $\binom{\circ}{p}$ روی M عبارت است از یک بخش C^∞ از نگاشت $\pi : \otimes_p^\circ TM \to M$ یا به عبارت دیگر نگاشت C^∞ زیر

$$t : M \longrightarrow \otimes_p^\circ(TM)$$
$$m \ \mapsto \ t_m \in \otimes_p^\circ(T_mM)$$

مجموعه میدان‌های تانسوری روی M را با $\otimes_p^\circ(M)$ نمایش می‌دهیم. $\otimes_p^\circ(M)$ دارای یک ساختار $C^\infty(M)$ـمدول همراه با اعمال زیر می‌باشد.

---

[1] *Tensor field (Champs de tenseurs)*

$$(t+t')_m = t_m + t'_m$$
$$(ft)_m = f(m)t_m$$

همانطور که برای ۱ـفرمی‌ها دیدیم ثابت می‌شود که تانسوری از نوع $\binom{\circ}{p}$ را می‌توان معادل نگاشت $C^\infty(M)$ـچندخطی زیر قرار داد.

$$t : \mathcal{X}(M) \times \cdots \times \mathcal{X}(M) \to C^\infty(M)$$

بطوریکه $t(X_۱, \cdots, X_p) = t_m((X_۱)_m, \cdots, (X_p)_m)$ در مختصات موضعی (x, U) رابطه اخیر به‌صورت زیر نوشته می شود.

t یک میدان تانسوری $\binom{\circ}{p}$ روی M است.

$$\boxed{t \underset{U}{=} \sum t_{i_۱\cdots i_p} dx^{i_۱} \otimes \cdots \otimes dx^{i_p}}$$

مثال ۲: نشان می‌دهیم‌نگاشت ۲ـخطی $g : E \times E \to I\!R$ که به‌صورت

$$g(v, w) = \sum_{i,j=۱}^{n} \delta_{ij}\theta^i \otimes \theta^j(v, w)$$

تعریف می‌شود یک تانسور هموردا از نوع $\binom{\circ}{۲}$ معین، مثبت[۱] و متقارن است. در اینجا e_i پایه E، θ^i پایه دوگان آن و δ_{ij} دلتای کرونکر فرض شده است و

$$g_{ij} = g(e_i, e_j) = \delta_{ij} \qquad\qquad i, j = ۱, \cdots, n$$

الف) g معین مثبت است. یعنی $g(v, v) > \circ$ اگر $v \neq \circ$ باشد

$$g(v, v) = \sum_{i,j=۱}^{n} \delta_{ij}\theta^i \otimes \theta^j(v, v) = \sum_{i,j} \delta_{ij}\theta^i(v)\theta^j(v)$$
$$= \sum_i (\theta^i(v))^۲) > \circ$$

[۱] *definit positive*

ب) g متقارن است یعنی $g(v,w)=g(w,v)$

$$\begin{aligned} g(v,w) &= \sum_{i,j}\delta_{ij}\theta^i\otimes\theta^j(v,w)=\sum_{i,j}\delta_{ij}\theta^i(v)\theta^j(w) \\ &= \sum_{i,j}\delta_{ij}\theta^j(v)\theta^i(w)=\sum_{i,j}\delta_{ij}\theta^i(w)\theta^j(v)=g(w,v)\end{aligned}$$

چون $\delta_{ij}=\delta_{ji}$

تانسور g را یک **ضرب اسکالر**[۱] روی E نیز می‌نامند خواهیم دید که تانسور متریک ریمان تعمیم همین ضرب اسکالرروی منیفلدها است.

۴.۴ § تانسور پادوردا وتانسور از نوع $\binom{p}{q}$

تعریف: فرض کنیم E یک فضای برداری روی میدان $I\!K$ باشد قرار می‌دهیم

$$\otimes^p_\circ(E)=\otimes^\circ_p(E^*)$$

اعضای $\otimes^p_\circ(E)$ را **تانسور پادوردا**[۲] از نوع $\binom{p}{\circ}$ می‌نامیم.
بنابراین یک تانسور پادوردا از نوع $\binom{p}{\circ}$ عبارت است از یک تابع pـخطی زیر

$$t:E^*\times\cdots\times E^*\to I\!K$$

می‌دانیم که $\otimes^{۱}_\circ(E)=E^{**}\simeq E$
واضح است که تمام تعاریف و خواص $\otimes^\circ_p(E)$ قابل انتقال روی $\otimes^p_\circ(E)$ است.
(کافی است که E^* را جایگزین E بنمائیم) .
مشابه قضیه ای که برای تانسورهای هموردا اثبات شد می‌توان ثابت نمود که اگر خانواده $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^{۱}},\dots,\dfrac{\partial}{\partial x^n}\right\}$ یک پایه برای T_mM باشد آنگاه مجموعه تانسورهای

---

[۱] *Scalar product (produit escalaire)*

[۲] *Contravariant tensor (Tenseur Contravariant)*

$\left\{\frac{\partial}{\partial x^{J_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{J_p}}\right\}$ یک پایه برای فضای برداری $\otimes^p_\circ T_m M = \otimes^\circ_p T^*_m M$ مجموعه تانسورهای پادوردا از نوع $\binom{p}{\circ}$ می‌باشد. دراینجا $J_1 = 1, \cdots, n$ و $\cdots$ و $J_p = 1, \cdots, n$ بنابراین قضیه هر تانسور پادوردا در $\otimes^p_\circ T_m M$ را می‌توان در این پایه به‌صورت زیر نوشت

$$\boxed{t_m \underset{U}{=} \sum_{J_1, \cdots, J_p = 1}^{n} t^{J_1 \cdots J_p} \left(\frac{\partial}{\partial x^{J_1}}\right)_m \otimes \cdots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{J_p}}\right)_m}$$

تعریف: فرض کنیم E یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{K}$ باشد. یک تانسور از نوع $\binom{p}{q}$ عبارت است از نگاشت $q + p-$ خطی t که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$t : \underbrace{E \times \cdots \times E}_{q} \times \underbrace{E^* \times \cdots \times E^*}_{p} \to \mathbb{K}$$

این نگاشت را تانسور $q-$ **مرتبه هموردا** و $p-$ **مرتبه پادوردا** می‌نامند.

اگر در روی منیفلد M فرض کنیم $T_m M$ و $T^*_m M$ فضای مماس و دوگان مماس با پایه‌های $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}$ و $\{dx^i\}$ باشند بحث پایه برای فضای تانسورهای هموردا را می‌توان برای فضای تانسورهای از نوع $\binom{p}{q}$ نیز بطور مشابه تعمیم داده نشان داد که هر تانسور از نوع $\binom{p}{q}$ روی منیفلد M به‌صورت زیر در مختصات (x, U) نوشته می‌شود.

$$\boxed{t_m \underset{U}{=} \sum_{\substack{i_1, \cdots, i_q = 1 \\ J_1, \cdots, J_p = 1}}^{n} t^{J_1 \cdots J_p}_{i_1 \cdots i_q} (dx^{i_1})_m \otimes \cdots \otimes (dx^{i_q})_m \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{J_1}}\right)_m \otimes \cdots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{J_p}}\right)_m}$$

رابطه اخیر را تعریف مدرن **تانسور پادوردا** از درجه p و هموردا از درجه q و یا تانسور از نوع $\binom{p}{q}$ در مختصات (x, U) در همسایگی نقطه m از M می‌نامیم.

تغییر شکل یک تانسور و انقباض[1] آن

تانسورهایی که معمولا در هندسه کاربرد دارند از نوع $\binom{1}{p}$ می‌باشند یعنی توابع چند خطی زیر هستند.

$$t : E \times \cdots \times E \times E^* \to \mathbb{R}$$

[1] Contraction

ثابت می‌شود که هر تانسور از نوع $\binom{1}{p}$ را می‌توان توسط یک نگاشت چند خطی مانند $\tilde{t}$ به‌صورت زیر معرفی نمود.

$$\tilde{t} : E \times \cdots \times E \to E$$

بطوریکه

$$t(X_1, \cdots, X_p, \omega) = \omega(\tilde{t}(X_1, \cdots, X_p)) \qquad \omega \in E^*, X_i \in E$$

مثال ۱: فرض کنیم $t : E \times E^* \to I\!R$ تانسوری از نوع $\binom{1}{1}$ باشد. تانسور t را به‌صورت نگاشت خطی $\tilde{t}$ به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\begin{aligned} &\tilde{t} \ : E \to E \\ (I) \qquad & t(X, \omega) = \omega(\tilde{t}(X)) \qquad \omega \in E^*, X \in E \end{aligned}$$

حال ببینیم بطور موضعی مولفه های تانسور t چه رابطه‌ای با نگاشت $\tilde{t}$ دارند.اگر $\{e_i\}$ و $\{\theta^i\}$ پایه‌های E^*, E که دوگان یکدیگرند باشند تانسور t به‌صورت زیر نوشته می شود.

$$t = \sum_{i,j} t_i^j \theta^i \otimes e_j$$

در اینجا $t_i^j = t(e_i, \theta^j)$ و A ماتریس نگاشت خطی $\tilde{t}$ به‌صورت زیر بدست می‌آید

$$\tilde{t}(e_i) = \sum_{k=1}^{n} a_i^k e_k \qquad A = (a_i^k)$$

با تاثیر θ^i (تابع مولفه‌iام) بر روی این عبارت داریم

$$\theta^j(\tilde{t}(e_i)) = a_i^j$$

و از طرف دیگر با توجه به رابطه (I) داریم

$$t_i^j = t(e_i, \theta^j) = \theta^j(\tilde{t}(e_i))$$

در نتیجه $A = (a_i^j) = (t_i^j)$. بنابراین می‌بینیم که مولفه‌های تانسور t درایه‌های ماتریس نگاشت خطی $\tilde{t}$ هستند. لذا می‌توان تانسور t از نوع $\binom{1}{1}$ را به‌صورت یک نگاشت خطی $\tilde{t} : E \to E$ نوشت.

تعریف: *منظور از* **انقباض** *تانسور t از نوع $\binom{1}{p}$ اثر ماتریس $\tilde{t}$ می‌باشد.*

در مثال فوق برای بدست آوردن انقباض تانسور t اثر ماتریس $\tilde{t}$ یعنی $A = (t_i^j)$ را بدست می‌آوریم.

$$Cont_{\circ}(t) = \sum_{i=1}^{n} t_i^i$$

بنابراین انقباض یک تانسور به نوعی مساوی قرار دادن یک اندیس از پایین و یک اندیس از بالا در مولفه‌های آن تانسور و سپس جمع آنها است.

مشابه میدان برداری و میدان ۱ـفرمی میدان تانسوری تعریف می‌شود.

تعریف: *یک میدان تانسوری*[1] *از نوع $\binom{1}{p}$ روی منیفلد M عبارت است از نگاشت C^∞ زیر*

$$t : x \in M \mapsto t_x \in \otimes_p^1 T_x M$$

مثال ۲: هر میدان برداری X روی منیفلد M یک میدان تانسوری از نوع $\binom{1}{0}$ است. همچنین حاصلضرب تانسوری دو میدان برداری $X \otimes X$ یک میدان تانسوری از نوع $\binom{2}{0}$ روی منیفلد M است.

در حقیقت بنابر تعریف میدان برداری داریم $X \underset{U}{=} \sum_i X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ لذا با توجه به تعریف مدرن تانسورهای از نوع $\binom{p}{0}$ میدان برداری X یک تانسور از نوع $\binom{1}{0}$ روی M بوده X^iها مولفه‌های آن هستند. همچنین بنابر تعریف ضرب تانسوری، $X \otimes Y$ تانسوری از نوع $\binom{2}{0}$ است که مولفه‌های آن از توابع $X^i Y^j$ تشکیل می‌شود.

مشابه بحث فوق در مورد تغییر شکل تانسور می‌توان نشان داد که هر میدان تانسوری از

---

[1] *Tensor field (Champs de tenseur)*

نوع $\binom{1}{p}$ را می‌توان توسط نگاشت چند خطی زیر نوشت

$$\tilde{t} : \underbrace{\mathcal{X}(M) \times \cdots \times \mathcal{X}(M)}_{p} \to \mathcal{X}(M)$$

۵.۴ § تعریف کلاسیک تانسورها

در بخش‌های قبل تانسورها را به‌صورت نگاشتهای چند خطی بیان نمودیم، در این بخش به تعریف کلاسیک یک تانسور می‌پردازیم. این تعریف اگر چه قدیمی‌تر است ولی دارای ویژگی‌هایی است که به سرعت و دقت محاسبات، می‌افزاید. اخیرا" نیز نرم افزارهای جدیدی تهیه شده است که توسط کامپیوتر می‌توان به انجام محاسبات روی تانسورها پرداخت، دراین نرم‌افزارها از تعریف کلاسیک تانسورها استفاده می‌شود.

فرض کنیم x', x دو دستگاه مختصات روی فضای برداری E باشند (در حقیقت x', x تبدیلات خطی از فضای برداری E روی $I\!R^n$ هستند که به هر نقطه از E مختصات x^i و x'^i روی $I\!R^n$ را وابسته می‌کنند. در اینجا x^i و x'^i توابع خطی از E در $I\!R$ هستند) رابطه بین مولفه‌های این دو مختصات عبارت است از

$$x'^j = \sum_{i=1}^{n} a_i^j x^i$$

که در آن $A = (a_i^j)$ ماتریس تغییر مختصات است.برای محاسبه a_i^j از طرفین رابطه نسبت به x^k مشتق جزئی می گیریم. لذا داریم

$$\frac{\partial x'^j}{\partial x^k} = \sum_{i=1}^{n} a_i^j \delta_k^i = a_k^j$$

در نتیجه

$$\boxed{x'^j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} x^i} \qquad (I)$$

قبلا دیدیم $df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ اگر فرض کنیم $f = x'^i$ داریم

$$dx'^j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} dx^i \qquad (II)$$

حال اگر ω ترکیب خطی از dx^i باشد و $\omega = \sum_i \omega_i dx^i$ نحوه تغییرات آن در دو دستگاه مختصات جدید را بررسی می‌کنیم. در مختصات جدید $\omega = \sum_i \omega'_i dx'^i$. اگر بجای dx^i در رابطه اول ω مقدار زیر را قرار دهیم

$$dx^i = \sum_j \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} dx'^j \qquad (III)$$

و سپس آنرا با رابطه دوم ω مقایسه کنیم داریم:

$$\boxed{\omega'_j = \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \omega_i}$$

حال این روابط را برای منیفلدها به‌صورت زیر تعمیم می‌دهیم.

فرض کنیم (x, U) یک دستگاه مختصات موضعی در همسایگی نقطه p از منیفلد M باشد. دیدیم خانواده $\{(dx^i)_p\}$ پایه‌ای برای T_p^*M و $dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k}$ پایه‌ای برای $\otimes_k^{\circ}(T_pM)$ است. بنابراین در U، هر تانسور هموردا از مرتبه k (یعنی از نوع $\binom{\circ}{k}$) به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$t \underset{U}{=} \sum_{i_1, \cdots, i_k = 1}^{n} t_{i_1 \cdots i_k} dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k}$$

حال اگر تانسور t در مختصات (x', V) در همسایگی نقطه p بیان شود داریم

$$t \underset{V}{=} \sum_{i_1, \cdots, i_k = 1}^{n} t'_{i_1 \cdots i_k} dx'^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx'^{i_k}$$

آنگاه با استفاده از رابطه III و خاصیت ضرب $\otimes$ داریم

$$\boxed{t'_{\alpha_1 \cdots \alpha_k} = \sum_{i_1 \cdots i_k} t_{i_1 \cdots i_k} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x'^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial x'^{\alpha_k}}} \qquad \begin{array}{c} \alpha_h = 1, \cdots, n \\ h = 1, \cdots, k \end{array}$$

می‌دانیم بطورکلی اگر t یک تانسور از نوع $\binom{\ell}{k}$ باشد به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\boxed{t \underset{U}{=} \sum_{\substack{i_1,\cdots,i_k \\ j_1,\cdots,j_\ell}} t_{i_1\cdots i_k}^{j_1,\cdots,j_\ell} dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_\ell}}}$$

می‌توان به روش بالا رابطه آنرا در مختصات جدید x' به‌صورت زیر بدست آورد

$$\boxed{t'^{\beta_1\cdots\beta_\ell}_{\alpha_1\cdots\alpha_k} = \sum_{\substack{i_1\cdots i_k \\ j_1\cdots j_\ell}} t^{j_1\cdots j_\ell}_{i_1\cdots i_k} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x'^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial x'^{\alpha_k}} \frac{\partial x'^{\beta_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\beta_\ell}}{\partial x^{j_\ell}}}$$

حال می‌توانیم تعریف کلاسیک یک تانسور از نوع $\binom{\ell}{k}$ را به‌صورت زیر بیان کنیم.

تعریف: *اگر رابطه بین مولفه‌های نگاشتی در دوستگاه مختصات موضعی* (x,U) و (x',V) *روی* M *در رابطه فوق صدق کند آنرا* **تانسور هموردا از درجه** k **و پادوردا از درجه** ℓ **یا** *ازنوع* $\binom{\ell}{k}$ *می‌نامیم.*

مثال ۱: نشان دهید هر بردار مماس X_p یک تانسور از نوع $\binom{1}{0}$ است.

فرض کنیم X_p در مختصات x', x به‌صورت زیر نوشته شود

$$X_p = \sum_j X^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$
$$X_p = \sum_i X'^i \frac{\partial}{\partial x'^i}$$

اگر این دو بردار را روی x'^k اثر دهیم داریم

$$X'^k = \sum_j \frac{\partial x'^k}{\partial x^j} x^j$$

که در رابطه (I) صدق می‌کند لذا هر بردار مماس یک تانسور از نوع $\binom{1}{0}$ است.

مثال ۲: هر ۱ـ فرمی دیفرانسیل پذیر ω_p یک تانسور از نوع $\binom{0}{1}$ است.

مثال ۳: اگر ω یک میدان ۱ـفرمی روی منیفلد M و X یک میدان برداری روی M باشد

آنگاه اثر ω بر روی X، $\omega(X)$ به‌صورت زیر بدست می‌آید.

$$\omega(X) = \sum_i \omega_i dx^i(X) = \sum_i \omega_i dx^i(\sum_j X^j \frac{\partial}{\partial x^j})$$

چون dx^i خطی است داریم

$$= \sum_{i,j} \omega_i X^j \underbrace{dx^i(\frac{\partial}{\partial x_j})}_{\delta^i{}_j} = \sum_i \omega_i X^i$$

لازم به یادآوری است که اثر ω بر X یعنی $\omega(X)$ که یک تابع اسکالر است با حاصلضرب $X \otimes \omega$ که یک تانسور $\binom{1}{1}$ می‌باشد متفاوت است. اگر بخواهیم این موضوع را به روش کلاسیک نیز بررسی کنیم حاصلضرب $\omega_i X^j$ یک تانسور $\binom{1}{1}$ می‌باشد اما اثر ω_i بر X^j عبارت است از $\omega_i X^i$ که یک تابع اسکالراست. تذکر ۲ را ملاحظه کنید.

قرارداد جمعبندی:[1]

اگر اندیسی یکبار در بالا و یکبار در پایین تکرار شود آنرا جمع‌بندی شده می‌نامیم و از نوشتن علامت $\sum$ برای سهولت محاسبات خودداری می‌نمائیم.
به عنوان مثال در عبارت $\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i dx^i$، i اندیس جمعبندی می‌باشد که آنرا به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\omega = \omega_i dx^i$$

مثال ۳: در تانسور t با مولفه‌های t^k_{ijk}، i و j اندیس‌های آزاد و k را اندیس جمع‌بندی می‌نامیم

$$t^k_{ijk} = \sum_{k=1}^{n} t^k_{ijk}$$

در تعریف کلاسیک تانسورها، نوع یک تانسور از روی تعداد اندیس‌های آزاد مولفه‌های آن نیز مشخص می‌شود، یعنی اگر تانسوری از نوع $\binom{p}{q}$ باشد مولفه‌های آن دارای p اندیس آزاد

[1] *Summation Convention*

در بالا و q اندیس آزاد در پایین است.
به عنوان مثال در t^k_{ijk} تنها j, i اندیس‌های آزاد می‌باشند بنابراین این تانسور از نوع $\binom{0}{2}$ است.

انقباض:[1]

در شکل کلاسیک یک تانسورمنظور از منقبض کردن یک تانسور مساوی قراردادن یک اندیس از بالاویک اندیس از پایین در مولفه‌های آن تانسور است. به عنوان مثال نوع منقبض شده تانسور انحنای ریمان که یک تانسور $\binom{1}{3}$ در روی یک رویه است $\sum\limits_{i=1}^{n} R^i_{jki} = R_{jk}$ یک تانسور $\binom{0}{2}$ است که آن را تانسور ریچی[2] می‌نامند.

تذکر ۱: همانطور که در ضرب تانسورها دیدیم حاصلضرب تانسوری دو تانسور از نوع $\binom{p}{q}$ و $\binom{\ell}{k}$ تانسوری از نوع $\binom{p+\ell}{q+k}$ می‌باشد. به‌عنوان مثال تانسور $R^i_{jk\ell}$ تانسور $\binom{1}{3}$ و g^{mh} تانسور $\binom{2}{0}$ است که حاصلضرب تانسوری آنها تانسوری از نوع $\binom{3}{3}$ خواهد بود. (در تعریف کلاسیک تانسورها هنگام ضرب تانسوری از علامت $\otimes$ استفاده نمی‌کنیم)

تذکر ۲: مسئله انقباض تانسورها را در تعریف کلاسیک (با استفاده از اندیس) دیدیم حال مفهوم انقباض در تعریف مدرن (بدون استفاده از اندیس) آن است که یک تانسور بر تانسور دیگر اثر می‌نماید. به عنوان مثال تانسور ω از نوع $\binom{0}{1}$ و تانسور X از نوع $\binom{1}{0}$ وقتی در یکدیگر ضرب تانسوری می‌شوند حاصل $X \otimes \omega$ یک تانسور از نوع $\binom{1}{1}$ می‌باشد اما اثر ω بر X یعنی $\omega(X)$ که تانسور $\binom{0}{0}$ است از انقباض $X \otimes \omega$ پدید می‌آید. در مثال زیر به حل یکی از تمرینات[3] کلاسیک تانسورها می‌پردازیم. این مثال کاربرد زیادی در درک مسایل تانسورها دارد.

---

[1] *Contraction*

[2] *Ricci* تانسور ریچی اساس تعریف فضای انیشتن است که پس از تعریف انحنای ریمان در منیفلد II مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

[3] این تمرین ابتدا در کتاب Schouten آورده شده و سپس در صفحه ۱۶ Eisenhart و فصل ۴ Spivak I از آن اقتباس گردیده است.

تعریف: *تابع f را پایا*[1] *گوییم اگر مقدار آن در مختصات x و x' پس از یک تغییر متغیر برابر باشد.* به عبارت دیگر مانند یک اسکالر در آنالیز برداری عمل نماید. لذا آنرا تابع اسکالر یا تانسوری از نوع $\binom{0}{0}$ نیز می‌نامند.

مثال ۴: فرض کنیم به ازا هر تانسور دلخواه X و Y از نوع $\binom{1}{0}$ با مولفه‌های X^i، Y^j عبارت $f = \sum\limits_{i,j} A_{ij} X^i Y^j$ پایا باشد. نشان دهید A_{ij} مولفه‌های یک تانسور از نوع $\binom{0}{2}$ است. اگر A_{ij}ها را در مختصات x' توسط A'_{ij} نمایش دهیم بنابر فرض داریم

$$f = \sum_{i,j} A'_{ij} X'^i Y'^j = \sum_{i,j} A_{ij} X^i Y^j$$

$$X'^i = \sum_k X^k \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \qquad Y'^j = \sum_\ell Y^\ell \frac{\partial x'^j}{\partial x^\ell}$$

$$f = \sum_{i,j} A'_{ij} X^k Y^\ell \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x'^j}{\partial x^\ell} = \sum_{k,\ell} A_{k\ell} X^k Y^\ell$$

$$(\sum_{i,j} A'_{ij} \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x'^j}{\partial x^\ell} - A_{k\ell}) X^k Y^\ell = 0 \tag{I}$$

چون X^k و Y^ℓ در اینجا دو برابر دلخواه هستند، از این رابطه نتیجه می‌شود که مقدار پرانتز برابر صفر است. زیرا بطور کلی اگر $B_{k\ell}$ها $k, \ell = 1, 2, \cdots n$ توابعی باشند که به ازاء هر بردار دلخواه X^k و Y^ℓ داشته باشیم $\sum\limits_{k,\ell} B_{k\ell} X^k Y^\ell = 0$ آنگاه از این نتیجه می‌شود

$$B_{11} X^1 Y^1 + B_{12} X^1 Y^2 + \cdots + B_{nn} X^n Y^n = 0$$

حال اگر در $X = (X^1, \cdots, X^n)$ و $Y = (Y^1, \cdots, Y^n)$ فرض کنیم مولفه‌های اول برابر یک یعنی $X^1 = Y^1 = 1$ و بقیه مولفه‌ها صفر باشند آنگاه داریم $B_{11} = 0$ و به همین ترتیب با اختیار مقادیر دلخواه متفاوت برای X^k و Y^ℓ نتیجه می‌شود که $B_{k\ell} = 0$.

از صفر شدن مقدار پرانتز در رابطه I حکم مسئله با تعویض مختصات xو x' نتیجه می‌شود.

---

[1] *Invariant*

تذکر ۳: از مثال بالا نتیجه می‌گیریم که اگر به ازاء هر تانسور دلخواه از نوع $\binom{1}{0}$ با مولفه‌های X^i و Y^j داشته باشیم $\sum\limits_{i,j} A_{ij}X^iY^j = 0$ آنگاه $A_{ij} = 0$.

تمرین:

۱[1]ـ فرض کنیم معادله رویه‌ای در $I\!R^3$ توسط رابطه $f(x,y,z) = 0$ داده شده باشد. بردار گرادیان در هر نقطه بر رویه عمود بوده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$grad\ f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

نشان دهید حاصلضرب مولفه‌های بردار گرادیان، مولفه‌های یک تانسور هموردا از نوع $\binom{0}{3}$ می‌باشد. *راهنمایی:* مثال ۱ در بخش ۳§ را ببینید.

۲ـ اگر X^i و ω_j مولفه‌های دو تانسور از نوع $\binom{1}{0}$ و $\binom{0}{1}$ باشند، نشان دهید $\omega_j + X^i$ نمی‌تواند مولفه‌های یک تانسور $\binom{1}{1}$ باشد.

۳ـ الف) نشان دهید اگر a^{ij} ، b^{ij} مولفه‌های تانسورهایی از نوع $\binom{2}{0}$ باشند آنگاه $a^{ij}+b^{ij}$ نیز مولفه‌های تانسوری از همان نوع هستند. به همین صورت اگر a^{ij} و $b_{k\ell}$ مولفه‌های تانسوری از نوع $\binom{2}{0}$ و $\binom{0}{2}$ باشند آنگاه $a^{ij}b_{k\ell}$ مولفه‌های تانسوری از نوع $\binom{2}{2}$ است.

ب) مسئله بالا را با استفاده از تعریف مدرن بیان نموده، سپس آنرا به روش تعریف مدرن تانسورها حل کنید.

۴ـ تانسور T با مولفه‌های T_{ij} را **متقارن**[2] گوئیم اگر $T_{ij} = T_{ji}$ و آنرا **پاد متقارن**[3] گوئیم اگر $T_{ij} = -T_{ji}$. نشان دهید هر تانسور از نوع $\binom{0}{2}$ را می‌توان به‌صورت جمع مستقیم دو تانسور متقارن و پاد متقارن از نوع $\binom{0}{2}$ نوشت. این تمرین را ابتدا به روش کلاسیک حل نمایید سپس صورت مسئله را تغییر داده آنرا به روش مدرن بیان و حل کنید.

(*راهنمایی:* به‌عنوان مثال $T_{ij} + T_{ji}$ همواره یک تانسور متقارن از نوع $\binom{0}{2}$ است.)

---

[1] برخی تمرینات این فصل از کتب Spivak،Warner ، Prakash ، Eisenhart وSchouten اقتباس گردیده و پس از انجام تغییرات در اینجا آورده شده است.

[2] *symmetric*

[3] *anti − symmetric*

۵ـ فرض کنیم A_j و A'_j مولفه‌های تابعی باشند که در دستگاه مختصات x و x' در رابطه زیر صدق می‌کنند.

$$A'_j = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} A_j$$

نشان دهید عبارت زیر یک تانسور پاد متقارن از نوع $\binom{۰}{۲}$ است.

$$\frac{\partial A_j}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_j}$$

(*راهنمایی:* فرض کنید $A_{i,\ell} = \dfrac{\partial A_i}{\partial x_\ell}$ و $B_{i\ell} = A_{i,\ell} - A_{\ell,i}$ سپس با استفاده از قاعده زنجیره‌ای نشان دهید $B_{i\ell}$ مولفه‌های تانسور مورد نظر است.)

۶ـ الف) اگر به ازاء هر تانسور دلخواه از نوع $\binom{۱}{۰}$ با مولفه‌های X^i، عبارت $f = \sum_{i,j} A_{ij} X^i X^j$ یک تابع پایا (تانسوری از نوع $\binom{۰}{۰}$) باشد نشان دهید $A_{ij} + A_{ji}$ مولفه‌های تانسوری از نوع $\binom{۰}{۲}$ هستند.

(*راهنمایی:* ابتدا نشان دهید اگر B_{ij} متقارن باشد و به ازاء هر تانسور دلخواه با مولفه‌های X^i داشته باشیم $\sum_{i,j} B_{ij} X^i X^j = ۰$ آنگاه $B_{ij} = ۰$)

ب) از آن نتیجه بگیرید اگر $f = ۰$ باشد آنگاه $A_{ij} + A_{ji} = ۰$

۷ـ فرض کنیم $g_{k\ell}$ مولفه‌های تانسوری از نوع $\binom{۰}{۲}$ در دستگاه مختصات x باشد که در رابطه زیر صدق کند

$$\sum_{\alpha=۱}^{n} g_{k\alpha} x^\alpha = x^k$$

ثابت کنید

$$\sum_{i,j} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} x^i x^j = ۰$$

۸ـ نشان دهید اگر $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^۱}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x^n}\right\}$، یک پایه برای E باشد آنگاه خانواده تانسورهای $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^{J_۱}} \otimes \cdots \otimes \dfrac{\partial}{\partial x^{J_p}}\right\}$ یک پایه برای $\otimes^p_۰ E$ فضای تانسورهای $\binom{p}{۰}$ تشکیل می‌دهد.

در اینجا اندیس‌های $J_{۱}, \cdots, J_p$ مقادیر $۱, \cdots, n$ را اختیار می‌کنند.

۹ـ فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر از کلاس C^k و به بعد n باشد. نشان دهید مجموعه تانسورهای نوع $\binom{۰}{p}$ روی M یک منیفلد $C^{k-۱}$ به بعد $n + n^p$ است.

راهنمایی: نگاشت تغییر کارت در متن درس آورده شده است.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

فصل ۵: p- فرمی‌ها و حساب دیفرانسیل خارجی روی منیفلدها

مقدمه

در فصل قبل با مفهوم تانسورها آشنا شدیم. در این فصل با فرم‌ها به عنوان مثالی از تانسورها آشنا می‌شویم. فرم‌ها ابزاری هستند که برای تعمیم بسیاری از مفاهیم آنالیز حقیقی روی منیفلدها به کار می‌روند. در دروس جبر خطی و آنالیز III تا اندازه‌ای با فرم‌ها روی فضای برداری و فضای اقلیدسی آشنا شده‌ایم. در اینجا با تعمیم این مفهوم برای منیفلدها مقدمات لازم را جهت مطالعه آنالیز روی منیفلدها فراهم می‌آوریم.

در بخش $1\S$ به تعریف فرم‌ها و ضرب خارجی پرداخته با استفاده از قضیه ۱ فرمولی جهت نوشتن فرم‌ها روی یک فضای برداری ارائه می‌دهیم. قضایای ۲ و ۳ در این بخش به ترتیب برای تعریف جهت‌پذیری و اثبات قضیه استوکس روی منیفلدها در این فصل و فصول آینده بکار می‌روند.

در بخش $2\S$ نتایج بخش قبل را برای منیفلدها تعمیم می‌دهیم.

در بخش ۳§ نگاشت معکوس یا نگاشت عقب‌بر یک فرم را تعریف نموده خواص آن را مورد مطالعه قرار می‌دهیم این نگاشت در تعریف انتگرال روی منیفلدها نقش اساسی دارد.

در بخش ۴§ مشتق‌گیری از جبر خارجی فرم‌ها را تعریف نموده مثال‌هایی از مشتق‌گیری به نام مشتق خارجی، مشتق لی و ضرب درونی به ترتیب با درجه‌های ۱+، ۰، ۱− ارائه می‌نماییم. تمرینات این بخش با استفاده از تعریف قابل حل بوده از میان متون مختلف و سئوالات امتحانی انتخاب شده است.

در بخش ۵§ با یادآوری تعریف جهت روی رویه‌ها در هندسه دیفرانسیل و تعریف جهت روی فضای برداری در جبر خطی، جهت‌پذیری روی منیفلدها را تعریف می‌کنیم. تمرینات این بخش با راهنمایی‌های ارائه شده براحتی قابل حل بوده به خواننده توصیه می‌شود.

بخش ۶§ به قضیه پوانکاره و اثبات آن اختصاص دارد.

خوانندگانی که مایل به فراگیری مقدمات لازم جهت تعریف انتگرال روی منیفلدها در زمان کوتاه هستند می‌توانند بخش ۵§ و ۶§ را در نگرش‌های بعدی خود مورد مطالعه قرار دهند.

۱.۵ § pـ فرمی[1] روی فضای برداری

تعریف: *فرض کنیم E یک فضای برداری به بعد n روی میدان $I\!K$ باشد. یک* **pـ فرمی خارجی** *(یا یک فرم از درجه p) عبارت است از نگاشت pـ* **خطی متناوب** *ω که به‌صورت زیر می‌باشد.*

$$\omega : \overbrace{E \times \cdots \times E}^{p-\text{مرتبه}} \to I\!K$$

یادآوری: نگاشت pـخطی ω را متناوب[2] گوئیم هرگاه $p = ۱$ یا برای $p \leq ۲$ داشته باشیم

$$(I) \qquad \omega(X_۱ \cdots X_i \cdots X_j \cdots X_p) = -\omega(X_۱ \cdots X_j \cdots X_i \cdots X_p)$$

با استفاده از خواص جایگشتها از رابطه فوق برای هر جایگشت $\delta = (\delta_۱ \cdots \delta_p)$ در

[1] $p - form$

[2] $Alternative$

$\{1 \cdots p\}$ تساوی زیر بدست می‌آید.

$$\omega(X_{\delta_1} \cdots X_{\delta_p}) = sgn\delta \quad \omega(X_1 \cdots X_p) \tag{II}$$

دراینجا $sgn\delta$ علامت جایگشت δ می‌باشد. اگر δ زوج باشد $sgn\delta = 1$ و اگر فرد باشد $sgn\delta = -1$.

از تعریف فوق نتیجه می‌شود اگر دو عضو از $X_1, \cdots, X_p$ با هم برابر باشند، آنگاه

$$\omega(X_1, \cdots, X_p) = 0$$

و برعکس اگر خاصیت بالا را داشته باشد ω متناوب است، زیرا

$$\begin{aligned} 0 &= \omega(X_1, \cdots, X_i + X_j \cdots, X_i + X_j \cdots X_p) \\ &= \omega(X_1 \cdots X_i \cdots X_i \cdots X_p) + \omega(X_1 \cdots X_i \cdots X_j \cdots X_p) \\ &\quad + \omega(X_1 \cdots X_j \cdots X_i \cdots X_p) + \omega(X_1 \cdots X_j \cdots X_j \cdots X_p) \\ 0 &= \omega(X_1 \cdots X_i \cdots X_j \cdots X_p) + \omega(X_1 \cdots X_j \cdots X_i \cdots X_p) \end{aligned}$$

که از اینجا رابطه I نتیجه می‌شود. مجموعه pـ فرمی‌های خارجی یک فضای برداری است که آن را توسط $\Omega^p E$ نمایش می‌دهیم. در حالت خاص

$$\Omega^1 E = E^* = \otimes_1^0(E)$$

ضرب خارجی

می‌خواهیم روی مجموعه فرم‌های خارجی یک قانون ضرب به‌صورت زیر تعریف نمائیم.

$$\Omega^p E \times \Omega^q E \to \Omega^{p+q} E$$

برای این کار ابتدا تعریف زیر را می‌آوریم.

تعریف: pـ فرمی خارجی $Alt(t) \in \Omega^p E$ را یک تناوب [1] تانسور t از نوع $t \in \otimes_p^0 E$

[1] Alternation

نامیده و به‌صورت زیر تعریف می‌نمائیم

$$Alt(t)(X_1 \cdots X_p) = \sum_{\delta \in \delta_p} sgn(\delta) \quad t(X_{\delta_1} \cdots X_{\delta_p})$$

در اینجا δ_p عبارت است از گروه جایگشتهای $\{1, \cdots, p\}$ و $\delta = (\delta_1 \cdots \delta_p)$ عضو این گروه می‌باشد.

مثال ۱: اگر $t \in \otimes_2^0 E$

$$Alt(t)(X, Y) = t(X, Y) - t(Y, X)$$

اگر $t \in \Omega^2 E$ باشد از (I) نتیجه می‌شود $Alt(t)(X, Y) = 2t(X, Y)$

اگر $t \in \otimes_3^0 E$ باشد، داریم:

$$\begin{aligned} Alt(t)(X, Y, Z) &= t(X, Y, Z) + t(Y, Z, X) + t(Z, X, Y) \\ &\quad - t(X, Z, Y) - t(Y, X, Z) - t(Z, Y, X) \end{aligned}$$

اگر $t \in \Omega^3 E$ باشد با استفاده از (I) داریم $Alt(t)(X, Y, Z) = 6t(X, Y, Z)$

تذکر: اگر $t \in \Omega^p E$ داریم $Alt(t) = p!t$

عمل "تناوب" به ما کمک می‌کند که براحتی بتوانیم ضرب خارجی را تعریف نمائیم.

تعریف : ضرب خارجی[1]

فرض کنیم $\omega \in \Omega^p E$ و $\pi \in \Omega^q E$ ضرب خارجی این دو فرم یک $(p+q)$ـ فرمی است که آنرا به‌صورت زیر تعریف می‌نمائیم

$$\omega \wedge \pi = \frac{1}{p!q!} Alt(\omega \otimes \pi) \qquad \omega \wedge \pi \in \Omega^{p+q}(E)$$

مثال ۲: اگر $\omega, \pi \in \Omega^1 E = E^*$

$$\begin{aligned} \omega \wedge \pi(X, Y) &= (Alt(\omega \otimes \pi))(X, Y) = (\omega \otimes \pi)(X, Y) - (\omega \otimes \pi)(Y, X) \\ &= \omega(X)\pi(Y) - \omega(Y)\pi(X) = (\omega \otimes \pi - \pi \otimes \omega)(X, Y) \end{aligned}$$

[1] Wedge product (produit exterieur)

بنابراین

$$\omega \wedge \pi = \omega \otimes \pi - \pi \otimes \omega$$

و درحالت خاص اگر $\omega \in \Omega^{1}E$ آنگاه $\omega \wedge \omega = 0$

مثال ۳: اگر $\omega \in \Omega^{1}E$ و $\pi \in \Omega^{2}E$ آنگاه $\omega \wedge \pi \in \Omega^{3}E$

$$\begin{aligned}(\omega \wedge \pi)(X,Y,Z) &= \frac{1}{2}Alt(\omega \otimes \pi)(X,Y,Z)\\ &= \frac{1}{2}[\omega(X)\pi(Y,Z) + \omega(Y)\pi(Z,X) + \omega(Z)\pi(X,Y)\\ &\quad -\omega(X)\pi(Z,Y) - \omega(Y)\pi(X,Z) - \omega(Z)\pi(Y,X)]\end{aligned}$$

$$(\omega \wedge \pi)(X,Y,Z) = \omega(X)\pi(Y,Z) + \omega(Y)\pi(Z,X) + \omega(Z)\pi(X,Y)$$

تمرین:

مطلوب است محاسبه $\omega \wedge \omega$ برای $\omega \in \Omega^{2}E$

ضرب خارجی دارای خواص زیر است.

الف) انجمنی

$$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$$

در اینجا فرض شده است که γ, β, α فرم‌هایی از درجات p، q و l هستند. با استفاده از تذکر بالا ثابت می‌شود.[1]

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \frac{1}{p!q!l!}Alt(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma)$$

ب) توزیع پذیری

$$\begin{cases} \alpha \wedge (\beta + \gamma) & = \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \gamma \\ (\alpha + \beta) \wedge \gamma & = \alpha \wedge \gamma + \beta \wedge \gamma \end{cases}$$

---

[1] اثبات این خاصیت بطور کامل در کتاب جبر خطی هافمن آورده شده است که از تکرار آن خودداری می‌شود.

هنگام جمع لازم است فرم‌ها از یک درجه باشند.

ج) جابجایی

اگر $\alpha \in \Omega^p E$ و $\beta \in \Omega^q E$

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$$

د) از خاصیت جابجایی نتیجه بگیرید اگر α از درجه فرد باشد یعنی اگر $\alpha \in \Omega^{2p+1} E$ آنگاه $\alpha \wedge \alpha = 0$

پایه وبعد $\Omega^p E$

به همان صورت که برای تانسورها قضیه‌ای ثابت شد که پایه و بعد فضای تانسورها را مشخص نمود. برای فضای $\Omega^p E$ نیز قضیه زیر را داریم.

قضیه ۱: اگر E یک فضای برداری به بعد n و $\{e_1 \cdots e_n\}$ یک پایه برای E و $\{\theta^1, \cdots, \theta^n\}$ پایه دوگان آن باشد آنگاه مجموعه pـ فرمی‌ها $\{\theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_p}\}$ با فرض $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n$ یک پایه $\Omega^p E$ است و داریم $\dim \Omega^p E = C_p^n$

اثبات: برای بدست آوردن روش اثبات این قضیه بهتر است ابتدا قضیه را در حالت $p = 2, n = 3$ در نظر گرفته ثابت نمائیم $\{\theta^1 \wedge \theta^2, \theta^2 \wedge \theta^3, \theta^1 \wedge \theta^3\}$ یک پایه $\Omega^2 E$ می‌باشد. فرض کنیم $X = \sum_{i=1}^{3} X^i e_i$ و $Y = \sum_{j=1}^{3} Y^j e_j$ و $\{\theta^1, \theta^2, \theta^3\}$ پایه دوگان $\{e_1, e_2, e_3\}$ باشد. به ازاء هر $\omega \in \Omega^2 E$ داریم

$$\omega(X, Y) = \omega(X^1 e_1 + X^2 e_2 + X^3 e_3, Y^1 e_1 + Y^2 e_2 + Y^3 e_3)$$

$$= X^1 Y^1 \overbrace{\omega(e_1, e_1)}^{0} + X^1 Y^2 \omega(e_1, e_2) + X^1 Y^3 \omega(e_1, e_3) + \cdots$$

$$\omega(X, Y) = (X^1 Y^2 - X^2 Y^1) \omega(e_1, e_2) + (X^1 Y^3 - X^3 Y^1) \omega(e_1, e_3)$$

$$+ (X^2 Y^3 - X^3 Y^2) \omega(e_2, e_3)$$

با فرض $a_{ij} = \omega(e_i, e_j) \in I\!K$ و استفاده از نگاشت مولفه‌ jام $\theta^j(X) = X^j$ داریم

$$\omega(X, Y) = a_{12}(\theta^1(X)\theta^2(Y) - \theta^2(X)\theta^1(Y)) + a_{13}(\theta^1(X)\theta^3(Y)$$

$$-\theta^3(X)\theta^1(Y)) + a_{23}(\theta^2(X)\theta^3(Y) - \theta^3(X)\theta^2(Y))$$

$$\omega(X,Y) = (a_{12}\theta^1 \wedge \theta^2 + a_{13}\theta^1 \wedge \theta^3 + a_{23}\theta^2 \wedge \theta^3)(X,Y)$$

بنابراین خانواده فوق $\Omega^2 E$ را تولید می‌کند .حال نشان می‌دهیم که مستقل خطی‌اند

$$a\theta^1 \wedge \theta^2 + b\theta^1 \wedge \theta^3 + c\theta^2 \wedge \theta^3 = 0$$

با تاثیر این رابطه روی زوج (e_1, e_2) داریم $a = 0$ و باتاثیر روی (e_1, e_3) داریم $b = 0$ و به همین صورت $c = 0$ بنابراین خانواده فوق مستقل خطی می‌باشند.

حال می‌توان این نتیجه را به حالت کلی تعمیم داده قضیه را با این روش اثبات نمود. این موضوع به‌عنوان تمرین واگذار می‌شود. □

تمرین :

۱ـ اثبات قضیه بالا را کامل کنید.

۲ـ با استفاده از قضیه فوق وخاصیت $\omega \wedge \omega = 0$ برای $\omega \in \Omega^1 E$ ثابت کنید به‌ازاء هر k بزرگتر از n (n بعد E) داریم:

$$\forall k \in \mathbb{R} \qquad k > n \qquad \Omega^k E = (0)$$

نتیجه: *از قضیه فوق نتیجه می‌شود یک p-فرمی روی E به‌صورت زیر نوشته می‌شود*

$$\boxed{\omega = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_p \le n} a_{i_1 i_2 \cdots i_p} \theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_p}}$$

در اینجا ضرائب $a_{i_1 i_2 \cdots i_p}$ اعداد حقیقی هستند. می‌توان ω رابه‌صورت دیگری نیز نوشت که در برخی موارد استفاده ازآن راحت‌تر است. به عبارت دیگر می‌توان فرض نمود که این ضرائب پاد متقارن نیز باشند.

به عنوان مثال فرض کنیم $n = 3$ و$\omega \in \Omega^2 E$ از فرمول بالا داریم

$$\omega = a_{12}\theta^1 \wedge \theta^2 + a_{13}\theta^1 \wedge \theta^3 + a_{23}\theta^2 \wedge \theta^3$$

حال فرض کنیم a_{ij}ها پاد متقارن باشند یعنی $a_{ij} = -a_{ji}$ در این صورت

$$a_{۱۲}\theta^{۱} \wedge \theta^{۲} = -a_{۲۱}\theta^{۱} \wedge \theta^{۲} = a_{۲۱}\theta^{۲} \wedge \theta^{۱}$$

لذا اولین جمله ω به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{۱}{۲}(a_{۱۲}\theta^{۱} \wedge \theta^{۲} + a_{۲۱}\theta^{۲} \wedge \theta^{۱})$$

اگر بطور مشابه برای جملات بعدی عمل نمائیم چون $a_{\alpha\alpha} = ۰$ داریم

$$\omega = \frac{۱}{۲}\sum_{\alpha,\beta=۱}^{۳} a_{\alpha\beta}\theta^{\alpha} \wedge \theta^{\beta} = \frac{۱}{۲!}\sum_{\alpha,\beta=۱}^{۳} a_{\alpha\beta}\theta^{\alpha} \wedge \theta^{\beta}$$

در اینجا $a_{\alpha\beta} = -a_{\beta\alpha}$ بوده و $\alpha \neq \beta$ می‌باشد. به همین صورت می‌توان نشان داد که فرمول بالا بطور کلی بشکل زیر نوشته می‌شود.

$$\boxed{\omega = \frac{۱}{p!}\sum_{\alpha_{۱}\cdots\alpha_{p}=۱}^{n} a_{\alpha_{۱}\cdots\alpha_{p}}\theta^{\alpha_{۱}} \wedge \cdots \wedge \theta^{\alpha_{p}}}$$

در اینجا ضرایب $a_{\alpha_{۱}\cdots\alpha_{p}}$ نسبت به اندیسها متناوب می‌باشند.

قضیه ۲: فرض کنیم $\omega_{۱}, \cdots, \omega_{k} \in \Omega^{۱}E = E^{*}$ **آنگاه دستگاه فرمهای** $\{\omega_{۱}, \cdots, \omega_{k}\}$ **مستقل خطی می‌باشند اگر وتنها اگر**

$$\omega_{۱} \wedge \cdots \wedge \omega_{k} \neq ۰$$

اثبات: فرض کنیم خانواده $\{\omega_{۱}, \cdots, \omega_{k}\}$ مستقل خطی باشد آنگاه با تکمیل آن، خانواده $\{\omega_{۱}, \cdots, \omega_{k}, \cdots, \omega_{n}\}$ یک پایه برای E^{*} خواهد بود. بنابر قضیه ۱ خانواده $\{\omega_{i_{۱}} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_{k}}\}_{۱\leq i_{۱}<i_{۲}\cdots<i_{k}\leq n}$ یک پایه برای $\Omega^{k}E$ می‌باشد و درحالت خاص $\omega_{۱} \wedge \cdots \wedge \omega_{k}$ یک عضو این پایه بوده و در نتیجه مخالف صفر است.

برعکس ـ(برهان خلف) فرض کنیم $\omega_{۱} \wedge \cdots \wedge \omega_{k} \neq ۰$ و این خانواده مستقل خطی نباشند آنگاه مثلاً می‌توان نوشت $\omega_{۱} = a_{۲}\omega_{۲} + \cdots + a_{k}\omega_{k}$ از آنجا

$$\omega_{۱} \wedge \omega_{۲} \wedge \cdots \wedge \omega_{k} = (a_{۲}\omega_{۲} + \cdots + a_{k}\omega_{k}) \wedge \omega_{۲} \wedge \cdots \wedge \omega_{k} = ۰$$

که یک تناقض است. □

قضیه ۳: فرض کنیم $\{X_1, \cdots, X_n\}$ خانواده‌ای از بردارهای E باشد و داشته باشیم $\omega \in \Omega^n E$ آنگاه به ازاء هر تبدیل خطی از E روی E مانند f که آنرا توسط $f \in End(E)$ نشان می‌دهیم داریم:

الف)

$$\omega(f(X_1), \cdots, f(X_n)) = (det f)\omega(X_1, \cdots, X_n)$$

ب)

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(X_1, \cdots, f(X_i), \cdots, X_n) = (Tr f)\omega(X_1, \cdots, X_n)$$

اثبات: الف) ابتدا فرض کنیم که بردارهای X_i اعضای پایه $\{e_1, \cdots, e_n\}$ از فضای E باشند داریم

$$f(e_i) = \sum_j a_i^j e_j$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\omega(f(e_1), \cdots . f(e_n)) &= \omega(\sum_{j_1} a_1^{j_1} e_{j_1}, \cdots, \sum_{j_n} a_n^{j_n} e_{j_n}) \\
&= \sum_{j_1, \cdots, j_n} a_1^{j_1} \cdots a_n^{j_n} \omega(e_{j_1}, \cdots, e_{j_n}) \\
&= \sum_{J \in p_n} sgn(J) a_1^{j_1} \cdots a_n^{j_n} \omega(e_1, \cdots, e_n) \\
&\doteq (\det f)\omega(e_1 \cdots e_n)
\end{aligned}$$

حال فرض کنیم $\{X_1, \cdots, X_n\}$ یک خانواده دلخواه از بردارهای E بوده و $\{e_1, \cdots, e_n\}$ پایه‌ای برای E باشد. اگر تبدیل خطی $g \in End(E)$ توسط رابطه زیر تعریف شود

$$g(e_1) = X_1, \cdots, g(e_n) = X_n$$

داریم

$$\begin{aligned}\omega(f(X_1),\cdots,f(X_n)) &= \omega((f\circ g)(e_1),\cdots,(f\circ g)(e_n))\\ &= (\det f\circ g)\omega(e_1,\cdots,e_n)\\ &= (\det f)(\det g)\omega(e_1,\cdots,e_n)\\ &= (\det f)\omega(g(e_1),\cdots,g(e_n))\\ &= (\det f)\omega(X_1,\cdots,X_n)\end{aligned}$$

اثبات: ب) مشابه حالت الف قضیه را روی اعضای پایه $\{e_i\}$ ثابت نموده، سپس تعمیم می‌دهیم.

$$\begin{aligned}\sum_i \omega(e_1,\cdots,f(e_i),\cdots,e_n) &= \sum_i \omega(e_1,\cdots,\overbrace{\sum_j a_i^j e_j}^{\text{مولفه}\, i\,\text{ـام}},\cdots,e_n)\\ &= \sum_{i,j} a_i^j \omega(e_1,\cdots,\underbrace{e_j}_{\text{مولفه}\, i\,\text{ام}},\cdots,e_n)\\ &= \sum_{i,j} a_i^j \delta_j^i \omega(e_1,\cdots,e_n)\\ &= \sum_i a_i^i \omega(e_1,\cdots,e_n)\\ &= (Trf)\omega(e_1,\cdots,e_n)\end{aligned}$$

حال فرض کنیم $\{X_1,\cdots,X_n\}$ بردارهای دلخواهی از E باشند. داریم:

$$X_k = \sum_i b_k^i e_i$$

$$\begin{aligned}&\sum_k \omega\ (\ X_1,\cdots,f(X_k),\cdots,X_n)\\ &\quad= \sum_k \omega(\sum_{i_1} b_1^{i_1} e_{i_1},\cdots,f(\sum_{i_k} b_k^{i_k} e_{i_k}),\cdots \sum_{i_n} b_n^{i_n} e_{i_n})\\ &\quad= \sum_{k,i_1,\cdots i_n} b_1^{i_1}\cdots b_n^{i_n}\omega(e_{i_1},\cdots,f(e_{i_k}),\cdots,e_{i_n})\end{aligned}$$

با استفاده از نتیجه بالا و خطی بودن ω داریم

$$= Trf \sum_{i_1,\cdots,i_n} b_1^{i_1}\cdots b_n^{i_n}\omega(e_{i_1}\cdots e_{i_n}) = (Trf)\omega(X_1,\cdots,X_n)$$

□

۲.۵ § p_فرمی روی منیفلدها

به راحتی می‌توان با انتخاب یک کارت (x,U) روی منیفلد M تعریف p_فرمی روی فضای برداری E را بر روی منیفلد M تکرار نمود. در اینجا بجای فضای برداری E از فضای مماس T_mM در نقطه m استفاده می‌کنیم. ابتدا به تعریف یک میدان p_فرمی می‌پردازیم.

تعریف: یک میدان p_فرمی روی منیفلد M *عبارت است از یک نگاشت C^∞ که به هر نقطه* m *از* M *یک* $p-$ *فرمی وابسته می‌کند*

$$\omega : m \in M \to \omega_m \in \Omega^p(T_mM)$$

مانند ۱_فرمی‌ها ثابت می‌شود که می‌توان یک میدان p_فرمی را توسط یک نگاشت متناوب $C^\infty(M)$ p_خطی به‌صورت زیر معرفی نمود.

$$\omega : \overbrace{\mathcal{X}(M)\times\cdots\times\mathcal{X}(M)}^{\text{مرتبه}-p} \to C^\infty(M)$$

خانواده این نگاشت ها را توسط Ω^pM نمایش می‌دهیم.

فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر از کلاس C^k باشد. باتوجه به قضیه ۱، یک p_فرمی از کلاس $C^q(q \le k-1)$ در مختصات موضعی روی M نسبت به کارت (x,U) به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\boxed{\omega \underset{U}{=} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_p\le n} a_{i_1\cdots i_p} \qquad dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}}$$

در اینجا $a_{i_1\cdots i_p}$ توابع حقیقی از کلاس C^∞ روی U بوده و U حوزه تعریف کارتی شامل m مانند (x,U) از یک اطلس M است.

همانطوری که در بخش قبل دیدیم فرمول بالا در صورت متناوب بودن (یا پاد متقارن بودن) ضرایب به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\boxed{\omega \underset{U}{=} \frac{1}{p!} \sum_{\alpha_1 \cdots \alpha_p} a_{\alpha_1 \cdots \alpha_p} dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_p}}$$

در اینجا ضرایب $a_{\alpha_1 \cdots \alpha_p}$ متناوب یا پاد متقارن فرض شده‌اند.

مثال ۱:

فرض کنیم $\omega \in \Omega^1(M)$ و $X \in \mathcal{X}(M)$ تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1_X \omega : \mathcal{X}(M) &\to C^\infty(M) \\ Y &\to X \cdot \omega(Y) \end{aligned}$$

آیا $\mathcal{L}^1_X \omega$ یک میدان ۱ـفرمی است؟

حل: باید خاصیت $C^\infty(M)$ـخطی را تحقیق کنیم. یعنی

$$\begin{cases} \mathcal{L}^1_X \omega(Y+Z) &= \mathcal{L}^1_X \omega(Y) + \mathcal{L}^1_X \omega(Z) \\ \mathcal{L}^1_X \omega(fY) &= f(\mathcal{L}^1_X \omega)(Y) \qquad \forall f \in C^\infty(M) \end{cases}$$

خاصیت اول برقرار است. خاصیت دوم را بررسی می‌نمائیم

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1_X \omega(fY) &= X \cdot \omega(fY) = X \cdot f\omega(Y) = \\ &= (X \cdot f)\omega(Y) + f \overbrace{X \cdot \omega(Y)}^{\mathcal{L}^1_X \omega(Y)} \neq f \mathcal{L}^1_X \omega(Y) \end{aligned}$$

لذا $\mathcal{L}^1_X \omega$ یک میدان ۱ـفرمی نیست.

مثال ۲: فرض کنیم $\omega \in \Omega^1(M)$ و $X \in \mathcal{X}(M)$ اگر $\mathcal{L}_X \omega$ را به‌صورت زیر تعریف کنیم

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X \omega : \mathcal{X}(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ Y &\mapsto X \cdot \omega(Y) - \omega([X,Y]) \end{aligned}$$

$\mathcal{L}_X$ رامشتق لی ۱ـفرمی ω نسبت به X می‌نامیم[1]. این تعریف بطور جامع‌تری برای pـفرمی ها درهمین فصل آورده خواهد شد. نشان دهید $\mathcal{L}_X \omega$ یک میدان ۱ـفرمی می‌باشد، یعنی

[1] *Lie derivative* (*Lie* ریاضیدان نروژی متخصص در نظریه گروه‌ها ۱۸۹۹ـ۱۸۴۲)

$\mathcal{L}_X\omega \in \Omega^1 M$ سپس معادله آن را در دستگاه مختصات موضعی پیدا کنید.

حل: اولین خاصیت خطی بودن براحتی قابل بررسی است

$$\mathcal{L}_X\omega(Y+Z) = \mathcal{L}_X\omega(Y) + \mathcal{L}_X\omega(Z)$$

خاصیت دوم را بررسی می‌نمائیم.

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X\omega)(fY) &= X\cdot\omega(fY) - \omega([X,fY]) = X\cdot(f\omega(Y))\\ &\quad -\omega((X\cdot f)Y + f[X,Y])\\ &= (X\cdot f)\omega(Y) + fX\cdot\omega(Y) - (X\cdot f)\omega(Y) - f\omega[X,Y]\\ &= f\mathcal{L}_X\omega(Y) \Rightarrow \mathcal{L}_X\omega \in \Omega^1 M\end{aligned}$$

مشتق لی ۱ـفرمی ω در مختصات موضعی

فرض کنیم (x,U) یک کارت روی M باشد داریم

$$\omega \underset{U}{=} \sum_\alpha \omega_\alpha dx^\alpha \Rightarrow \omega(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \sum_\alpha \omega_\alpha dx^\alpha(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \omega_j$$

$$X \underset{U}{=} \sum_i X^i\frac{\partial}{\partial x^i} \quad , \quad Y \underset{U}{=} \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

حال در معادله اصلی قرار می‌دهیم

$$(\mathcal{L}_X\omega)(Y) \underset{U}{=} (\mathcal{L}_X\omega)(\sum_j Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}) = \sum_j Y^j(\mathcal{L}_X\omega)(\frac{\partial}{\partial x^j})$$

بنابراین کافی است $\mathcal{L}_X\omega(\frac{\partial}{\partial x^j})$ را محاسبه نمائیم

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X\omega)(\frac{\partial}{\partial x^j}) &= X\cdot\omega(\frac{\partial}{\partial x_j}) - \omega([X,\frac{\partial}{\partial x^j}])\\ &= \sum_i X^i\frac{\partial\omega_j}{\partial x^i} - \omega([\sum_i X^i\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}])\\ &= \sum_i X^i\frac{\partial\omega_j}{\partial x^i} - \omega(-\sum_i\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_i X^i[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}])\end{aligned}$$

بنابراین با توجه به صفر بودن مقدار کروشه در رابطه بالا داریم

$$(\mathcal{L}_X\omega)\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_i (X^i\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} + \omega_i\frac{\partial X^i}{\partial x^j})$$

در نتیجه

$$\boxed{\mathcal{L}_X\omega \underset{U}{=} \sum_{i,j=1}^{n} (X^i\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} + \omega_i\frac{\partial X^i}{\partial x^j})dx^j}$$

۳.۵ § تصویر معکوس یک pـفرمی

دیدیم که اگر $f: M \to N$ یک نگاشت C^∞ و $X \in \mathcal{X}(M)$، تنها در صورتی می‌توان $f_*X \in \mathcal{X}(N)$ را تعریف نمود که f دو سویی باشد. در این صورت قرار می‌دادیم

$$(f_*X)_q = (f_*)_{f^{-1}(q)}X_{f^{-1}(q)}$$

اما در اینجا اگر $\omega \in \Omega^p N$ باشد f همواره یک فرم تولید می‌نماید که آنرا با $f^*\omega$ نشان می‌دهیم این فرم متعلق به $\Omega^p M$ است. (لازم نیست f دوسویی باشد)

تعریف: فرض کنیم $f : M \to N$ یک نگاشت C^∞ باشد. نگاشت f^* را می‌توان به‌صورت زیر تعریف نمود.

$$f^* : \Omega^p(N) \to \Omega^p(M)$$

بطوریکه:

ـاگر $g \in \Omega^0(N) = C^\infty(N)$ قرار می‌دهیم

$$f^*g = g \circ f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$$

ـاگر $\omega \in \Omega^p(N)$ آنگاه $f^*\omega \in \Omega^p(M)$ را توسط رابطه زیر تعریف می‌کنیم

$$(f^*\omega)_m(X_1, \cdots, X_p) = \omega_{f(m)}((f_*)_m X_1, \cdots, (f_*)_m X_p)$$

که درآن $X_1, \cdots, X_p \in T_m M$ و $m \in M$

$f^*\omega$ را تصویر معکوس ω توسط f و f^* را نگاشت **دوگان یا عقب‌کش** نامیدیم.[۱]

خواص $f^*\omega$:

براحتی می‌توان خواص زیررا تحقیق نمود.

الف) $\forall \alpha, \beta \in \Omega^p N$ $\qquad f^*(\alpha+\beta) = f^*(\alpha) + f^*(\beta)$

ب) اگر $\beta \in \Omega^q N, \alpha \in \Omega^p N$ $\qquad f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*(\alpha) \wedge f^*(\beta)$

ج) اگر $f : N \to P$ و $g : M \to N$ آنگاه $\qquad (f \circ g)^* = g^* \circ f^*$

د) اگر $g \in C^\infty(N)$ $\qquad f^*dg = d(g \circ f) \equiv d(f^*g)$

ه) اگر $g \in C^\infty(N)$ $\qquad f^*(g\omega) = f^*g f^*\omega$

اثبات: در اینجا درستی (الف) را تحقیق نموده و بقیه را به عنوان تمرین واگذار می‌نمائیم.

فرض کنیم $\beta \in \Omega^q N, \alpha \in \Omega^p N$

$$\begin{aligned}
&(f^*(\alpha+\beta))_m(X_1, \cdots, X_p, Y_1, \cdots, Y_q) \\
&= (\alpha+\beta)_{f(m)}((f_*)_m X_1, \cdots, (f_*)_m X_p, (f_*)_m Y_1, \cdots, (f_*)_m Y_q) \\
&= \alpha_{f(m)}((f_*)_m X_1, \cdots, (f_*)_m X_p) + \beta_{f(m)}((f_*)_m Y_1, \cdots, (f_*)_m Y_q) \\
&= (f^*\alpha)_m(X_1, \cdots, X_p) + (f^*\beta)_m(Y_1, \cdots Y_q) \\
&= (f^*\alpha)_m + (f^*\beta)_m(X_1, \cdots, X_p, Y_1, \cdots, Y_q)
\end{aligned}$$

□

تمرین:

درستی روابط (ب)، (ج)، (د) و (ه) را تحقیق نمایید.

مثال ۱:

اگر $f : M \to N$ از کلاس C^1 و ω یک میدان ۱ـفرمی روی N باشد، می‌خواهیم $f^*\omega$ را بطور موضعی بنویسیم. فرض کنیم (x, U) و (y, V) دو دستگاه مختصات در

---

[۱] *Pullback function* در فصل ۲ بخش ۶.۲§ حالت خاصی از این نگاشت را دیدیم.

همسایگی $p \in M$ و $f(p) \in N$ باشند و در این دستگاه مختصات داشته باشیم

$$y \circ f \circ x^{-1} \quad : I\!R^m \to I\!R^n \quad (x^1, \cdots, x^m) \to \begin{cases} y^1 & = f^1(x^1, \cdots, x^m) \\ \vdots & \vdots \\ y^n & = f^n(x^1, \cdots, x^m) \end{cases}$$

اگر $\omega \underset{V}{=} \sum \omega_i dy^i$، برای محاسبه $(f^*\omega)$ با فرض اینکه $U = f^{-1}(V)$ و بنابر خواص f^* داریم

$$\begin{aligned} f^*\omega & \underset{U}{=} f^*(\sum_i \omega_i dy^i) = \sum_i f^*(\omega_i) f^*(dy^i) \\ & = \sum_i \omega_i \circ f \ \ d(y^i \circ f) \qquad y^i \circ f = f^i \ \text{بافرض} \end{aligned}$$

$$\boxed{(f^*\omega)_{(x)} \underset{U}{=} \sum_i \omega_i(f^1(x), \cdots, f^n(x)) df^i}$$

این مثال را در قضیه بعد برای pـفرمی‌ها تعمیم می دهیم.

$f^*\omega$ در مختصات موضعی

قضیه ۱: فرض کنیم $f : M \to N$ نگاشتی C^∞ و کارت‌های (y, V) و (x, U) دو دستگاه مختصات موضعی در همسایگی نقطه $f(q) \in N$ و $q \in M$ باشند. فرض کنیم $U = f^{-1}(V)$ و

$$y \circ f \circ x^{-1} : I\!R^m \to I\!R^n$$

$$(x^1, \cdots, x^m) \to (y^1 = f^1(x^1, \cdots, x^m), \cdots, y^n = f^n(x^1, \cdots, x^m))$$

اگر $\omega \in \Omega^p N$ و $\omega \underset{V}{=} \sum \omega_{i_1 \cdots i_p} dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_p}$ آنگاه

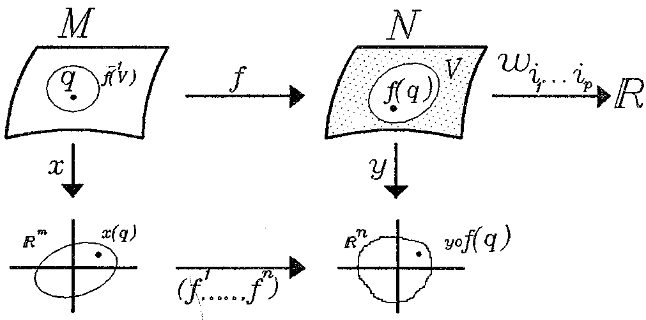
$$\boxed{f^*\omega \underset{U}{=} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \omega_{i_1 \cdots i_p}(f) df^{i_1} \wedge \cdots \wedge df^{i_p}}$$

اثبات: با استفاده از خواص f^* داریم

$$f^*\omega \underset{U}{=} \sum f^*(\omega_{i_1 \cdots i_p})(f^* dy^{i_1}) \wedge \cdots \wedge (f^* dy^{i_p})$$

چون به ازاء هر تابع g تعریف نمودیم $f^*g = g \circ f$ داریم

$$f^*\omega \underset{U}{=} \sum(\omega_{i_۱\cdots i_p}) \circ f \;\; d(y^{i_۱} \circ f) \wedge \cdots \wedge d(y^{i_p} \circ f)$$
$$\underset{U}{=} \sum(\omega_{i_۱\cdots i_p})(f^۱, \cdots, f^n) df^{i_۱} \wedge \cdots \wedge df^{i_p}$$



شکل ۱.۵: مولفه pـفرمی‌ها روی N توابع حقیقی روی N هستند

در اینجا فرض کرده‌ایم $y^i \circ f = f^i$ $\square$

مثال ۲: فرض کنیم $M = \mathbb{R}^۲$، $N = \mathbb{R}^۳$، $f : M \to N$ و $\omega \in \Omega^۱ N$، بطوریکه
$f : (u, v) \to (x = uv, y = u + v, z = u - v)$
اگر $\omega = (x + ۱)dx + y^۲ z dy + (۲x + z)dz$ مطلوب است محاسبه $f^*\omega$.
حل: بنابر قضیه قبل $(f^*\omega)_{(u,v)} = \sum\limits_{i=۱}^{۳} \omega_i(f(u, v))df^i$
در اینجا $f^۱(u, v) = uv$, $\omega_۱(f(u, v)) = uv + ۱$ و ... لذا داریم

$$\begin{aligned}(f^*\omega)_{(u,v)} &= (uv + ۱)d(uv) + (u + v)^۲(u - v)d(u + v)\\ &\quad + (۲uv + u - v)d(u - v)\\ &= [(uv + ۱)v + (u + v)^۲(u - v) + (۲uv + u - v)]du\\ &\quad + [(uv + ۱)u + (u + v)^۲(u - v) - (۲uv + u - v)]dv\end{aligned}$$

بنابراین $f^*\omega$ یک ۱ـفرمی روی $M = \mathbb{R}^۲$ است.

مثال ۳: فرض کنیم f به‌صورت زیر تعریف شود.

$$\begin{aligned} f \quad &: I\!R^2 \to I\!R^2 \\ &(\rho,\theta) \to (x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta) \end{aligned}$$

مطلوب است محاسبه

الف ـ $f^*((x^2+y^2)dx\wedge dy)$ ب ـ $f_*(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\partial}{\partial\theta})$

حل الف: f^* یک ۲ـفرمی در مختصات اقلیدسی را به ۲ـفرمی در مختصات قطبی بر می‌گرداند.

راه اول: مستقیما" از خواص f^* استفاده می‌کنیم. (بدون استفاده از قضیه بالا)

$$\begin{aligned} &f^*((x^2+y^2)dx\wedge dy) = f^*(x^2+y^2)f^*dx\wedge f^*dy \\ &= (x^2+y^2)\circ f df^*x\wedge df^*y = \rho^2 d(x\circ f)\wedge d(y\circ f) \end{aligned} \qquad (I)$$

درستی آخرین تساوی ناشی از خاصیتی است که به شرح آن می‌پردازیم.

برای محاسبه $x\circ f$ ، $y\circ f$ توابع y, x را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned} &I\!R^2 \to I\!R \\ x: \quad &(x,y)\to x(\rho,\theta) \\ y: \quad &(x,y)\to y(\rho,\theta) \end{aligned}$$

بنابراین $x\circ f : I\!R^2 \to I\!R$ و $y\circ f : I\!R^2\to I\!R$ بطوریکه

$$\begin{aligned} x\circ f : (\rho,\theta) &\to x(\rho,\theta) = \rho\cos\theta \\ y\circ f : (\rho,\theta) &\to y(\rho,\theta) = \rho\sin\theta \end{aligned}$$

به این صورت $x^2\circ f = \rho^2\cos^2\theta$ و $y^2\circ f = \rho^2\sin^2\theta$ حال دنباله رابطه I به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} \rho^2 d(\rho\cos\theta)\wedge d(\rho\sin\theta) &= \rho^2(\cos\theta d\rho - \rho\sin\theta d\theta)\wedge \\ &\qquad (\sin\theta d\rho + \rho\cos\theta d\theta) \\ &= (\rho^3\cos^2\theta + \rho^3\sin^2\theta)d\rho\wedge d\theta \\ &= \rho^3 d\rho\wedge d\theta \end{aligned}$$

به این صورت یک ۲ – فرمی در مختصات قطبی بدست آمد.

راه دوم: با استفاده از قضیه قبل $f^*\omega$ را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}(f^*\omega)_{(\rho,\theta)} &= \omega(f(\rho,\theta))df^{۱} \wedge df^{۲}\\ &= (\rho^{۲}\cos^{۲}\theta + \rho^{۲}\sin^{۲}\theta)d(\rho\cos\theta) \wedge d(\rho\sin\theta)\\ &= \cdots = \rho^{۳} d\rho \wedge d\theta\end{aligned}$$

مشاهده می‌شد که استفاده از قضیه فوق موجب کوتاه شدن حل مسئله گردید.

حل ب: ابتدا ماتریس ژاکوبین f را محاسبه می نمائیم

$$f_* = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}f_*(\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial}{\partial\theta}) &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho \\ ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta - \rho\sin\theta \\ \rho\sin\theta + \rho\cos\theta \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} x - y \\ y + x \end{pmatrix} = (x-y)\frac{\partial}{\partial x} + (x+y)\frac{\partial}{\partial y}\end{aligned}$$

۴.۵ § مشتق‌گیری از جبرخارجی $\Omega(M)$[۱]

فرض می‌کنیم $\Omega(M) = \{\Omega^p(M)\}_{p\in I\!N}$ ومطابق گذشته اگر برای $p \leq ۰$ داشته باشیم $\Omega^p M = \{۰\}$ آنگاه $\Omega(M)$ را جبر خارجی روی M می‌نامیم. (به عبارت دقیقتر $\Omega(M)$ را "جمع مستقیم " $\Omega^p(M)$ نیز می‌نامند)

تعریف: یک مشتق‌گیری از درجه π عبارت است از نگاشت

$$\mathcal{D} : \Omega(M) \to \Omega(M)$$

[۱] *Derivation of exterior Algebra*

بطوریکه در شرایط زیر صدق کند

الف) $\mathcal{D}\Omega^p(M) \subset \Omega^{p+\pi}(M)$

ب) به ازاء هر تابع ثابت k داشته باشیم $\mathcal{D}k = ۰$

ج) $\mathcal{D}(\omega_۱ + \omega_۲) = \mathcal{D}\omega_۱ + \mathcal{D}\omega_۲$

د) $\mathcal{D}(\omega_۱ \wedge \omega_۲) = \mathcal{D}\omega_۱ \wedge \omega_۲ + (-۱)^{\pi p_۱}\omega_۱ \wedge \mathcal{D}\omega_۲$

در اینجا $p_۱$ درجه $\omega_۱$ فرض شده است.

اگر U همسایگی یک نقطه از M باشد قضیه زیر را داریم:

قضیه ۱: مشتق گیری $\mathcal{D}$ یک عملگر موضعی است. یعنی اگر $\alpha, \beta \in \Omega^p(M)$ و داشته باشیم $\alpha|_U = \beta|_U$ آنگاه $(\mathcal{D}\alpha)|_U = (\mathcal{D}\beta)|_U$

اثبات: کافی است نشان دهیم که اگر $\alpha|_U = ۰$ آنگاه $\mathcal{D}\alpha|_U = ۰$ (چون می‌توان این نتیجه را برای $\alpha - \beta$ بکاربرد)

فرض کنیم $x_۰ \in U$ و $f \in C^\infty(M)$ به طوری که $f(x_۰) = ۰$ و $f|_{CU} = ۱$ (می‌دانیم که چنین تابعی وجود دارد).[1] بنابراین داریم $\alpha = f\alpha$

$$(\mathcal{D}\alpha)_{x_۰} = (\mathcal{D}(f\alpha))_{x_۰} = (\mathcal{D}f)_{x_۰}\alpha_{x_۰} + f(x_۰)(\mathcal{D}\alpha)_{x_۰} = ۰ \quad \square$$

چند مثال برای مشتق‌گیری می‌آوریم که مهمترین آنها عملگر مشتق‌گیری خارجی "d" است. این عملگر نقش مهمی در هندسه دیفرانسیل ایفا می‌نماید.

الف) دیفرانسیل خارجی[2]

تعریف: دیفرانسیل خارجی عبارت است از یک مشتق‌گیری از درجه یک از $\Omega(M)$ که توسط روابط زیر تعریف شده وآنرا با "d" نمایش می‌دهیم.

$$(df)(X) = X \cdot f \qquad f \in C^\infty(M), \omega \in \Omega^۱(M)$$

$$(d\omega)(X,Y) = X \cdot \omega(Y) - Y \cdot \omega(X) - \omega([X,Y])$$

---

[1] به پیوست I در انتهای فصل دوم مراجعه شود.

[2] *Exterior differential*

وجود یک مشتق‌گیری با خواص بالا در معادله ذاتی $d\omega$ در صفحات بعد دیده خواهد شد. در اینجا براحتی می‌توان بررسی نمود که $d\omega \in \Omega^{2}(M)$ کافی است نشان دهیم $d\omega$ متناوب (پاد متقارن) و $C^{\infty}(M)$ـدوخطی است.

ـپاد متقارن بودن $d\omega$ واضح است $d\omega(X,Y) = -d\omega(Y,X)$

ـبرای دو خطی بودن نشان می‌دهیم $(d\omega)(fX,Y) = (fd\omega)(X,Y)$

رابطه دیگر بطور مشابه بررسی می‌شود.

$$\begin{aligned} d\omega(fX,Y) &= fX\cdot\omega(Y) - Y\cdot\omega(fX) - \omega([fX,Y]) \\ &= fX\cdot\omega(Y) - Y\cdot(f\omega(X)) - \omega(f[X,Y] - (Y\cdot f)X) \\ &= fX\cdot\omega(Y) - (Y\cdot f)\omega(X) - fY\cdot\omega(X) \\ &\quad\ -f\omega[X,Y] + (Y\cdot f)\omega(X) \\ &= f(X\cdot\omega(Y) - Y\cdot\omega(X) - \omega[X,Y]) = fd\omega(X,Y) \end{aligned}$$

قضیه ۲:

الف) اگر d دیفرانسیل خارجی باشد آنگاه برای هر فرم دیفرانسیل پذیر داریم

$$d^{2}\omega = 0$$

ب) دیفرانسیل خارجی d تنها مشتق‌گیری از درجه یک است بطوریکه

$$\begin{cases} d^{2} = 0 & \\ (df)(X) = X\cdot f & \text{به ازاء هر } f \in C^{\infty}(M) \end{cases}$$

اثبات: الف) فرض کنیم $f \in C^{\infty}(M)$ ابتدا نشان می‌دهیم $d^{2}f = 0$

$$d^{2}f = d(df) \in \Omega^{2}M$$

$$\begin{aligned} d^{2}f(X,Y) &= (d(df))(X,Y) = X\cdot\underbrace{(df(Y))}_{Y\cdot f} - Y\cdot\underbrace{(df(X))}_{X\cdot f} - df([X,Y]) \\ &= X\cdot(Y\cdot f) - Y\cdot(X\cdot f) - [X,Y]\cdot f = 0 \end{aligned}$$

حال فرض کنیم $\omega \in \Omega^p M$ و $\omega \underset{U}{=} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_p\le n} a_{i_1\cdots i_p} dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$
نشان می‌دهیم $d^2\omega = 0$

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_p\le n} \Big(da_{i_1\cdots i_p}\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p} \\ &\qquad \underbrace{+\sum_{j=i_1}^{i_p}(-1)^{j+1} a_{i_1\cdots i_p} dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge ddx^j\wedge\cdots\Big)}_{0} \\ &= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_p\le n} da_{i_1\cdots i_p}\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p} \\ d^2\omega = dd\omega &= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_p\le n} \underbrace{dd}_{0}\, a_{i_1\cdots i_p}\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p} \\ &\qquad + \sum_{j=i_1}^{i_p} da_{i_1\cdots i_p} dx^{i_1}\wedge\cdots\underbrace{\wedge d^2x^j}_{0}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}\end{aligned}$$

بنابراین به ازاء هر $\omega \in \Omega(U)$ و در نتیجه به ازاء هر $\omega \in \Omega(M)$ داریم $d^2\omega = 0$
در اثبات فوق شکل موضعی "d" را بدست آوردیم. به عبارت دیگر

اگر	$\omega \underset{U}{=} \sum_{1\le i_1<\cdots i_p\le n} a_{i_1\cdots i_p} dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$
آنگاه	$d\omega \underset{U}{=} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_p\le n} da_{i_1\cdots i_p}\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$

در اینجا ضریب $a_{i_1\cdots i_p}$ توابع حقیقی C^k روی U هستند.

اثبات ب)

حال فرض کنیم $\mathcal{D}$ یک مشتق گیری از درجه ۱ باشد که در فرض قضیه صدق کند بطوریکه به ازاء هر $f \in C^\infty(M)$

$$\begin{cases} \mathcal{D}^2 &= 0 \\ \mathcal{D}f &= df \end{cases}$$

می‌توان نوشت $dx^i = \mathcal{D}x^i$ ازآنجا

$$\mathcal{D}dx^i = \mathcal{D}^2x^i = 0$$

بنابراین اگر $\omega = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_p\leq n} a_{i_1\cdots i_p} dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$ داریم:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\omega &= \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_p\leq n} (da_{i_1\cdots i_p}\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}\\ &\quad +\sum_j a_{i_1\cdots i_p} dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge\underbrace{\mathcal{D}dx^j}_{0}\wedge\cdots)\\ &= \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_p\leq n} da_{i_1\cdots i_p}\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p} = d\omega\end{aligned}$$

بنابراین تنها یک مشتق خارجی از درجه یک وجود دارد. □

مثال ۱: فرض کنیم

$$\boxed{M = I\!R^3}$$

ـ اگر $f\in\Omega^0 I\!R^3$ یا $f\in C^\infty(M)$ آنگاه

$$df(X) = X\cdot f = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

ـ اگر $\omega\in\Omega^1(I\!R^3)$ یعنی $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ داریم

$$\begin{aligned}d\omega &= dP\wedge dx + dQ\wedge dy + dR\wedge dz\\ &= (\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz)\wedge dx\\ &\quad +(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz)\wedge dy\\ &\quad +(\frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz)\wedge dz\\ &= (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dy\wedge dz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dz\wedge dx\\ &\quad +(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dx\wedge dy\end{aligned}$$

ـ اگر $\omega\in\Omega^2(I\!R^3)$ داریم $\omega = Ady\wedge dz + Bdz\wedge dx + Cdx\wedge dy$ و به همین صورت نشان می‌دهیم $d\omega = (\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z})dx\wedge dy\wedge dz$

ـ اگر $\omega \in \Omega^{۳}(I\!R^{۳})$

$$d\omega \in \Omega^{۴}(I\!R^{۳}) = ۰$$

همینطور که در حالت $M = I\!R^{۳}$ ملاحظه نمودیم می‌توان مقادیر گرادیان و دیورژانس که در فرمولهای استوکس، گرین، استروگرادسکی و غیره مشاهده می‌شود را با استفاده از فرمها بیان نمود. در حقیقت هر یک از این عبارات حالت خاصی از مشتق گیری خارجی می‌باشد. به عنوان مثال به تمرینات این فصل مراجعه شود.

مثال ۲: فرض کنیم

$$\boxed{M = I\!R^{۴}}$$

اگر $\omega = (۲x + ۱)ydx + (y^{۲} - z)dy + xzdz + dt$ یک ۱ـفرمی در $I\!R^{۴}$ باشد نشان دهید $d\omega$ دوفرمی زیر است.

$$d\omega = (۲x + ۱)dy \wedge dx + zdx \wedge dz + dy \wedge dz$$

معادله ذاتی $d\omega$

اگر $\omega \in \Omega^{p}(M)$ یک pـفرمی روی M باشد آنگاه می‌توان $d\omega$ را به‌صورت زیر نیز تعریف نمود.[۱]

$$\boxed{\begin{aligned} d\omega(X_{۱}, \cdots, X_{p+۱}) &= \sum_{i=۱}^{p+۱} (-۱)^{i+۱} X_i \cdot \omega(X_{۱}, \cdots, \widehat{X_i}, \cdots X_{p+۱}) \\ &+ \sum_{۱ \leq i < j \leq p} (-۱)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_{۱}, \cdots \widehat{X_i} \cdots \widehat{X_j} \cdots X_{p+۱}) \end{aligned}}$$

در اینجا علامت $\widehat{}$ بیانگر آن است که بردار زیر این علامت حذف شده است. از معادله ذاتی $d\omega$ معلوم می‌شود که تعریف d بستگی به مختصات موضعی ندارد.

در حالت خاص $p = ۱$ داریم

[۱] برای توضیح بیشتر در مورد این تعریف می‌توان به I، [۲۸] فصل ۷ قضیه ۱۳ مراجعه نمود.

$$d\omega(X,Y) = X\cdot\omega(Y) - Y\cdot\omega(X) - \omega([X,Y])$$

در حالت $p = ۲$ داریم

$$\begin{aligned} d\omega(X,Y,Z) &= X\cdot\omega(Y,Z) + Y\cdot\omega(Z,X) + Z\cdot\omega(X,Y) \\ &\quad -\omega([X,Y],Z) + \omega([Y,Z],X) - \omega([Z,X],Y) \end{aligned}$$

توجه می‌کنید که در اینجا از فرمول بالا استفاده شده است منتهی جای Z, X در سطر اول تعویض و علامت منفی به مثبت تبدیل شده است.

قضیه ۳: اگر N, M دو منیفلد دیفرانسیل‌پذیر بوده، $f : M \to N$ دیفرانسیل‌پذیر و $\omega \in \Omega^p N$، آنگاه

$$f^* d\omega = d(f^*\omega)$$

اثبات: فرض کنید $m \in M$ و (y, V) یک دستگاه مختصات موضعی در همسایگی $f(m)$ باشد. کافی است قضیه را برای فرم‌های به شکل زیر ثابت کنیم.

$$\begin{aligned} \omega &= g\,dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_p} \\ f^*\omega &= (f^*g) f^*dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge f^*dy^{i_p} \\ &= (f^*g) d(f^*y^{i_1}) \wedge \cdots \wedge d(f^*y^{i_p}) \end{aligned}$$

بنابراین

$$d(f^*\omega) = d(f^*g) \wedge d(f^*y^1) \wedge \cdots \wedge d(f^*y^p)$$

حال از طرف دیگر داریم

$$d\omega = dg \wedge dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^p$$

با تأثیر f^* داریم

$$\begin{aligned} f^*d\omega &= f^*dg \wedge f^*dy^1 \wedge \cdots \wedge f^*dy^p \\ &= df^*g \wedge df^*y^1 \wedge \cdots \wedge df^*y^p \end{aligned}$$

لذا داریم $f^*d\omega = d(f^*\omega)$. $\square$

قضیه کارتان:[1] فرض کنیم E یک فضای برداری به بعد n و $\{\theta^1, \cdots, \theta^k\}$ یک مجموعه مستقل خطی از اعضای E^* باشد. اگر $\omega_1, \cdots, \omega_k \in E^*$ بطوریکه

$$\omega_1 \wedge \theta^1 + \cdots + \omega_k \wedge \theta^k = 0$$

آنگاه داریم.

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} \theta^j$$

اثبات : پایه فوق را کامل می‌نمائیم $\{\theta^1, \cdots, \theta^k, \theta^{k+1}, \cdots, \theta^n\}$ می‌توان نوشت

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij}\theta^j + \sum_{\alpha=k+1}^{n} \lambda_{i\alpha}\theta^\alpha$$

نشان می دهیم $\lambda_{i\alpha} = 0, \lambda_{ij} = \lambda_{ji}$

$$\begin{aligned} j &= 1, \cdots, k \\ i &= 1, \cdots, k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} \omega_i \wedge \theta^i &= \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{i=1}^{k} \lambda_{ij}\theta^j \wedge \theta^i + \sum_{\alpha=k+1}^{n} \lambda_{i\alpha}\theta^\alpha \wedge \theta^i \Big) \\ &= \lambda_{11}\theta^1 \wedge \theta^1 + \lambda_{12}\theta^2 \wedge \theta^1 + \lambda_{21}\theta^1 \wedge \theta^2 + \cdots \end{aligned}$$

چون $\theta^1 \wedge \theta^1 = 0$ داریم

$$= (\lambda_{21} - \lambda_{12})\theta^1 \wedge \theta^2 + \cdots$$

$$= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{k} (\lambda_{ji} - \lambda_{ij})\theta^i \wedge \theta^j + \sum_{i=1}^{k} \sum_{\alpha=k+1}^{n} \lambda_{i\alpha}\theta^\alpha \wedge \theta^i$$

با توجه به فرض چون $\{\theta^i \wedge \theta^j\}_{i<j}$ و $\{\theta^\alpha \wedge \theta^i\}_{i<\alpha}$ مستقل خطی هستند.

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ji} \qquad \text{و} \qquad \lambda_{i\alpha} = 0 \quad \square$$

---

[1] *Cartan Theorem* (*Elie Joseph Cartan* ریاضیدان فرانسوی ۱۹۵۱ـ۱۸۶۹)

ب ـ ضرب درونی[1]

مشتق‌گیری از درجه یک را دیدیم حال به مثالی از یک مشتق‌گیری از درجه منفی یک می‌پردازیم.

تعریف: فرض کنیم $X \in \mathcal{X}(M)$. **ضرب درونی** X یک مشتق‌گیری از درجه (-1) می‌باشد که آنرا توسط i_X نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می نمائیم.

$$i_X : \Omega^p(M) \to \Omega^{p-1}(M)$$

ـ اگر $f \in \Omega^0(M)$ آنگاه $\quad i_X f = 0$

ـ اگر $\omega \in \Omega^1(M)$ آنگاه $\quad i_X\omega = \omega(X)$

بنابراین داریم $i_X\omega \in \Omega^0(M)$. واضح است که با استفاده از دو خاصیت فوق می‌توان اثر i_X روی p-فرمی‌ها را نیز مشخص نمود.

مثال ۱: فرض کنیم $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$، $\omega \in \Omega^1 I\!R^3$

$$i_X\omega = \underbrace{i_X P}_{0}\, dx + Pi_X dx + i_X Q dy + Q i_X dy + i_X R dz + R i_X dz$$
$$= Pdx(X) + Qdy(X) + Rdz(X)$$

چون $dx^i(X) = X^i$ داریم $\quad i_X\omega = PX^1 + QX^2 + RX^3$

مثال ۲: اگر $\omega \in \Omega^2 I\!R^3$

$$\omega = Adx \wedge dy + Bdy \wedge dz + Cdz \wedge dx$$

$$i_X\omega = A(i_X dx)dy - Adx(i_X dy) + B(i_X dy)dz$$
$$- Bdy(i_X dz) + C((i_X dz)dx - Cdz(i_X dx)$$
$$= AX^1 dy - AX^2 dx + BX^2 dz - BX^3 dy + CX^3 dx - CX^1 dz$$

$$i_X\omega = (CX^3 - AX^2)dx + (AX^1 - BX^3)dy + (BX^2 - CX^1)dz$$

---

[1] *Interior Product (Produit intérieur)*

در اینجا ملاحظه می‌شود که $i_X\omega \in \Omega^1 I\!R^3$

بنابراین اگر داشته باشیم $\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^p$ آنگاه

$$\begin{aligned} i_X\omega &= f(dx^1)(X)dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^p - f dx^1 \wedge dx^2(X)dx^3 \wedge \cdots \wedge dx^p \\ &\quad + \cdots + (-1)^{p-1} f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{p-1} dx^p(X) \\ i_X\omega &= fX^1 dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^p - fX^2 dx^1 \wedge dx^3 \wedge \cdots \wedge dx^p + \cdots \\ &\quad +(-1)^{p-1} f X^p dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{p-1} \end{aligned}$$

بطور کلی گزاره زیر را داریم. از این گزاره به عنوان تعریف i_X نیز می‌توان استفاده نمود.

گزاره: اگر $\omega \in \Omega^p(M)$ و $Y_1, \cdots Y_{p-1} \in \mathcal{X}(M)$ آنگاه همواره داریم

$i_X\omega \in \Omega^{p-1}(M)$ و $(i_X\omega)(Y_1 \cdots Y_{p-1}) = \omega(X, Y_1, \cdots, Y_{p-1})$

اثبات: پس از توضیح بالا واضح است. کافی است گزاره را در دستگاه مختصات موضعی (x, U) ابتدا روی فرم های $\omega \underset{U}{=} f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^p$ ثابت نمود. در این صورت

$$\begin{aligned} (i_X\omega)(Y_1 \cdots Y_{p-1}) &= \sum_i (-1)^{i-1} X^i f dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx}^i \wedge \cdots \wedge dx^p \\ &= \omega(X, Y_1, \cdots, Y_{p-1}) \end{aligned}$$

□

مشتق گیری از درجات یک و منفی یک را دیدیم حال به مثالی از یک مشتق‌گیری از درجه صفر می‌پردازیم.

ج ـمشتق لی فرم‌ها[1]

ترکیب دو مشتق‌گیری $\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$ یعنی $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_2$ یک مشتق‌گیری نیست. (زیرا آخرین شرط مشتق‌گیری برقرار نمی‌باشد). اما از طرف دیگر گزاره زیر را داریم.

گزاره: اگر $\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$ دو مشتق‌گیری از درجه‌های π_1 و π_2 باشند آنگاه کروشه

[1] *Lie derivative of $p-$ forms*

$$[\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2] = \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_2 - (-1)^{\pi_1\pi_2}\mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1$$

یک مشتق‌گیری از درجه $\pi_1 + \pi_2$ است.

اثبات: تحقیق شرایط مشتق‌گیری به‌عنوان تمرین واگذار می‌شود. □

تعریف: فرض کنیم $X \in \mathcal{X}(M)$. **مشتق لی p- فرمی ω** روی M را با $\mathcal{L}_X$ نمایش داده توسط رابطه $\mathcal{L}_X = [i_X, d]$ تعریف می‌نمائیم. لذا داریم

$$\mathcal{L}_X\omega = i_X d\omega + d i_X\omega$$

بنابر گزاره فوق مشتق لی یک مشتق‌گیری از درجه صفر است.

تعبیر هندسی $\mathcal{L}_X$ را بعد خواهیم دید اما می‌توان به‌طور خلاصه گفت که مشتق لی ω عبارت است از مشتق ω در طول منحنی انتگرال میدان برداری X.

خواص مشتق لی فرم‌ها

۱)اگر $f \in C^\infty(M)$ آنگاه $\mathcal{L}_X f = X \cdot f$

۲) به ازاء هر $\omega \in \Omega^1 M$ $(\mathcal{L}_X\omega)(Y) = X \cdot \omega(Y) - \omega([X,Y])$

۳)اگر $\omega \in \Omega^p M$ آنگاه

$$(\mathcal{L}_X\omega)(Y_1, \cdots, Y_p) = X \cdot \omega(Y_1, \cdots, Y_p) - \sum_{i=1}^{p}\omega(Y_1, \cdots, [X, Y_i], \cdots Y_p)$$

۴) $\mathcal{L}_X d = d\mathcal{L}_X$

مثال: اگر

$\omega \in \Omega^2 I\!R^3$ و $\omega = (x^2 + 1)dx \wedge dy - yzdz \wedge dx$

$$X = X^1\frac{\partial}{\partial x} + X^2\frac{\partial}{\partial y} + X^3\frac{\partial}{\partial z}$$

مشتق لی ω را نسبت به میدان X بدست می‌آوریم.

$$\mathcal{L}_X\omega = \mathcal{L}_X(x^2 + 1)dx \wedge dy$$
$$+(x^2 + 1)d(\mathcal{L}_X x) \wedge dy + (x^2 + 1)dx \wedge d(\mathcal{L}_X y)$$

$$
\begin{aligned}
&-\mathcal{L}_X(yz)dz\wedge dx - yzd(\mathcal{L}_X z)\wedge dx - yzdz\wedge d(\mathcal{L}_X x)\\
&= ۲xX^۱dx\wedge dy + (x^۲+۱)dX^۱\wedge dy + (x^۲+۱)dx\wedge dX^۲\\
&-(X^۲z+yX^۳)dz\wedge dx - yzdX^۳\wedge dx - yzdz\wedge dX^۱\\
&= ۲X^۱xdx\wedge dy + (x^۲+۱)(\frac{\partial X^۱}{\partial x}dx + \frac{\partial X^۱}{\partial y}dy + \frac{\partial X^۱}{\partial z}dz)\wedge dy\\
&+\cdots
\end{aligned}
$$

بطور کلی اگر $\omega \underset{U}{=} \sum a_i dx^i$ داریم

$$\boxed{\mathcal{L}_X\omega \underset{U}{=} \sum_{i,k}(X^k\frac{\partial a_i}{\partial x^k} + a_k\frac{\partial X^k}{\partial x^i})dx^i}$$

به مثالی که در بخش قبل در مورد مشتق لی آورده شد مراجعه شود.

تمرین

۱ـ فرض کنیم $M = I\!R^۲$

اگر $\omega = Pdx + Qdy$ و $X = A\frac{\partial}{\partial x} + B\frac{\partial}{\partial y}$ مطلوب است محاسبه مقادیر $d\omega$ و $i_X d\omega$ و $\mathcal{L}_X\omega$.

۲ـ اگر $\omega = ydx + xdy$ اولاً مطلوب است محاسبه $d\omega$ ثانیاً میدان برداری X را طوری پیدا کنید که $\mathcal{L}_X\omega = ۰$.

۳ـ اگر $\omega = ydx + xdy$، تابع $f(x,y)$ را طوری تعیین نمائید که $f\omega$ بسته باشد. (یعنی در اینجا، $d(f\omega) = ۰$)

۴ـ فرض کنیم M یک منیفلد از کلاس C^∞ به بعد n باشد.

اولاً نشان دهید برای هر $\omega \in \Omega^۱(M)$ و به ازاء هر $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ داریم

$$[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = \mathcal{L}_{[X,Y]} \qquad \text{و} \qquad [\mathcal{L}_X, i_Y] = i_{[X,Y]}$$

ثانیاً: روابط فوق را برای هر $\omega \in \Omega^k(M)$ ثابت نمایید.

ثالثاً: نشان دهید $i_{X+Y} = i_X + i_Y$

رابعاً: نشان دهید اگر $\omega \in \Omega^p M$ آنگاه

$$i_Y(i_X\omega) = -i_X(i_Y\omega)$$

۵ـ اگر $f \in C^\infty(M)$، به ازاء هر $Y \in \mathcal{X}(M)$ و X نشان دهید

الف ـ $\mathcal{L}_X(df) = d\mathcal{L}_X(f)$

ب ـ $\mathcal{L}_X(f\omega) = \mathcal{L}_X(f)\omega + f\mathcal{L}_X(\omega)$

ج ـ $\mathcal{L}_X(\omega(Y)) = (\mathcal{L}_X\omega)(Y) + \omega(\mathcal{L}_X(Y))$

۶ـ خواص مشتق لی آورده شده در این بخش را ثابت کنید.

۵.۵ § منیفلدهای جهت‌پذیر[۱]

قبل از ارائه تعریف جهت‌پذیری روی منیفلدها ابتدا به یادآوری تعریف جهت‌پذیری روی رویه‌ها و روی فضاهای برداری می‌پردازیم.

یادآوری هندسه دیفرانسیل

در هندسه دیفرانسیل مقدماتی با تعریف یک بردار قائم بر سطح رویه یک جهت برای آن رویه تعریف می‌کردیم. چون در هر نقطه رویه دوبردار عمود بر سطح رویه ولی مختلف الجهت وجود دارد لازم بود یکی از این دو بردار را به عنوان جهت انتخاب نماییم. برای این کار از دو بردار مماس بر رویه در آن نقطه که صفحه مماس را تشکیل می‌دادند استفاده می‌کردیم. به عبارت دیگر بردار قائم بر رویه در هر نقطه توسط حاصلضرب خارجی دوبردار مماس تعریف می‌شد. جهت این بردار قائم نیز بنابر قواعد ضرب خارجی از قاعده انگشتان دست راست پیروی می‌نمود. لذا در هندسه دیفرانسیل جهت این بردار قائم را جهت رویه تعریف می‌کنیم. انتخاب جهت را می‌توان در همسایگی‌های باندازه کافی کوچک یک نقطه به طور پیوسته ادامه داد اما این کار همیشه برای کل رویه امکان‌پذیر نیست. اگر این انتخاب

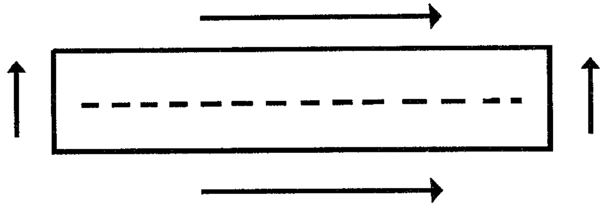
---

[۱] *Orientable manifolds*

جهت برای کل رویه امکان پذیر باشد رویه را **جهت‌پذیر**[۱] می‌نامیم در غیر این صورت رویه را **جهت‌ناپذیر**[۲] می‌گوییم.

به عنوان مثال کره، استوانه و چنبره رویه‌های جهت‌پذیر هستند. از رویه‌های جهت ناپذیر در اینجا به **نوار موبیوس** [۳] و **بطری کلاین**[۴] به شرح زیر اشاره می‌کنیم.

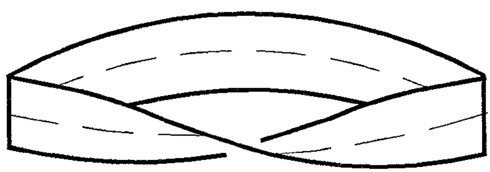
یک نوار مستطیل شکل کاغذی در نظر گرفته روی لبه‌های آن به شکل زیر یک جهت معین می‌کنیم. با چسباندن لبه‌های این مستطیل به یکدیگر و با توجه به جهات مختلف، می‌توان چهار رویه به صورت زیر ساخت.



شکل ۵.۲ : نوار مستطیل کاغذی با لبه جهت‌دار

الف ـ از اتصال لبه‌های چپ و راست با حفظ جهت استوانه تشکیل می‌شود.

ب ـ از اتصال لبه‌های چپ و راست با تغییر جهت **نوار موبیوس** تشکیل می‌شود.



شکل ۵.۳ : نوار موبیوس

با توجه به شکل در روی خط نقطه‌چین یک بردار قائم بر رویه در نظر گرفته آنرا در طول

---

[۱] *orientable*

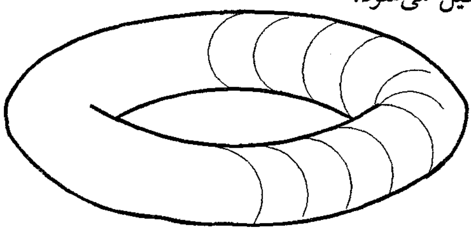
[۲] *non − orientable*

[۳] *Mobius bond* (*August Ferdinand Mobius* ریاضیدان و منجم آلمانی ۱۸۶۸ـ۱۷۹۰)

[۴] *Klein bottle* (*Felix Klein* ریاضیدان آلمانی که هندسه رامتحوّل نمود ۱۹۲۵ـ۱۸۴۹)

این خط بطور پیوسته حرکت می‌دهیم. پس از طی یک دور کامل ۳۶۰ درجه‌ای به نقطه شروع خواهیم رسید امّا با جهت مخالف. از اینجا نتیجه می‌گیریم که روی نوار موبیوس نمی‌توان بطور پیوسته یک جهت به دست آورد. لذا نوار موبیوس جهت ناپذیر است. این موضوع را می‌توان بطور تحلیلی نیز ثابت نمود. نظر به اینکه اثبات جهت‌ناپذیر بودن نوار موبیوس بطور تحلیلی در هندسه دیفرانسیل مقدماتی ممکن است ذکر نشده باشد، در ادامه این بخش به آن اشاره می‌کنیم.

ج ـ از اتصال لبه‌های بالا و پایین با حفظ جهت و سپس اتصال لبه‌های چپ و راست با حفظ جهت، **چنبره** تشکیل می‌شود.

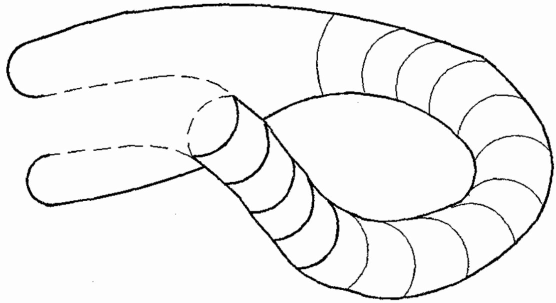


شکل ۵.۴: چنبره

د ـ از اتصال لبه‌های بالا و پایین با حفظ جهت و سپس اتصال لبه‌های چپ و راست با تغییر جهت **بطری کلاین** تشکیل می‌شود. شکل زیر را ببینید.

در هندسه دیفرانسیل مقدماتی دیدیم که تعبیر هندسی جهت‌پذیری یک رویه را می‌توان به راحتی به صورت تحلیلی بیان نمود. برای این کار معادله بردار قائم بر رویه را در دو دستگاه مختصات متفاوت نوشته دترمینان ماتریس نگاشت تغییر مختصات J (ژاکوبین تغییر مختصات) را به دست می‌آوردیم. اگر N و N' دو بردار قائم بر رویه در دو مختصات متفاوت باشند با یک محاسبه ساده رابطه زیر به دست می‌آید.

$$N' = JN$$



شکل ۵.۵: بطری کلاین

برای اثبات این رابطه می‌توانید به کتب مقدماتی هندسه دیفرانسیل مراجعه نمائید.

لذا رویه را جهت‌پذیر گوییم اگر ژاکوبین تغییر مختصات در تمام نقاط رویه دارای علامت مثبت باشد.

همانطوریکه ملاحظه می‌شود این تعریف براحتی قابل تعمیم برای منیفلدهاست[1]. قبل از اینکه به این کار بپردازیم لازم است مختصری نیز به تعریف فضای برداری جهت‌دار در جبر خطی اشاره کرده ببینیم تعریف هندسی جهت‌پذیری و تعریف جبری آن چه ارتباطی با یکدیگر دارند.

یادآوری جبر خطی

فرض کنیم E یک فضای برداری به بعد متناهی n باشد. اگر $\mathcal{B} = \{e_i\}$ و $\mathcal{B}' = \{e'_i\}$ دوپایه برای E باشند. ماتریس زیر را *ماتریس تغییرپایه* از $\mathcal{B}$ به $\mathcal{B}'$ می‌گوئیم

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = ||e'_۱, \cdots, e'_n||_{e_i}$$

(یعنی ماتریسی که ستونهای آن از مولفه‌های بردارهای e'_i در پایه $\{e_i\}$ تشکیل شده است) می‌توان دید $\det \mathcal{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \neq ۰$.

تعریف: *روی مجموعه پایه‌های E رابطه هم‌ارزی زیر را در نظر می‌گیریم*

$$\mathcal{B} \sim \mathcal{B}' \Leftrightarrow det\mathcal{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} > ۰$$

[1] به تعریف منیفلد جهت‌پذیر در ادامه این بخش مراجعه کنید.

این رابطه هم‌ارزی مجموعه اعضای پایه E را به دوکلاس تقسیم می‌کند. هر کلاس را کلاس جهت‌پذیری می‌نامیم. می‌گوئیم **فضای برداری E جهت‌دار** *است اگر یک کلاس جهت‌پذیری در آن انتخاب نمائیم.*

تذکر: **انتخاب یک پایه یک جهت برای E تعیین می‌کند.**

مثلاً $I\!R^n$ دارای یک جهت کانونی است. (یعنی جهتی که وابسته به پایه کانونی $I\!R^n$ است در نظر می‌گیریم.)

حال فرض کنیم E دارای بعد n بوده و $\omega \in \Omega^n E$. می‌دانیم که اگر $\{e_1, \cdots, e_n\}$ یک پایه E بوده و $(\vartheta_1, \cdots, \vartheta_n)$ بردارهایی از E باشند داریم (بنابر قضیه ۳ در بخش ۲)

$$(I) \qquad \omega(\vartheta_1, \cdots, \vartheta_n) = \det ||\vartheta_1, \cdots, \vartheta_n||_{e_i} \omega(e_1, \cdots, e_n)$$

از آن نتیجه می‌شود اگر $\{\vartheta_i\}$ و $\{e_i\}$ دو پایه برای E باشند آنگاه هر دو در یک کلاس جهت‌پذیری قرار دارند اگر وتنها اگر ω روی هر دو پایه دارای یک علامت باشد. به عبارت دیگر از این بحث گزاره زیر را نتیجه می‌گیریم.

گزاره: **فرض کنیم E یک فضای برداری به بعد n باشد و $\omega \in \Omega^n E$ بطوریکه $\omega \neq 0$ آنگاه یک و تنها یک کلاس جهت‌پذیری $\mathcal{M}$ برای E وجود دارد بطوریکه**

$$\{\vartheta_1, \cdots, \vartheta_n\} \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \omega(\vartheta_1, \cdots, \vartheta_n) > 0$$

به عبارت دیگر ارائه یک n−فرم $\omega \in \Omega^n E$ بطوریکه $\omega \neq 0$ یک جهت برای E تعیین می‌کند.

نتیجه: *انتخاب یک جهت برای E به یکی از دو صورت زیر انجام می‌گیرید.*

الف) با انتخاب یک پایه

ب) با انتخاب یک nـفرم غیر صفر

تعریف جهت روی منیفلدها

حال موضوع فوق را برای منیفلدها تعمیم می‌دهیم. بطور کلی می‌توان گفت جهت دادن به یک منیفلد جهت دادن به فضای مماس در هر نقطه می‌باشد به این صورت که در همسایگی

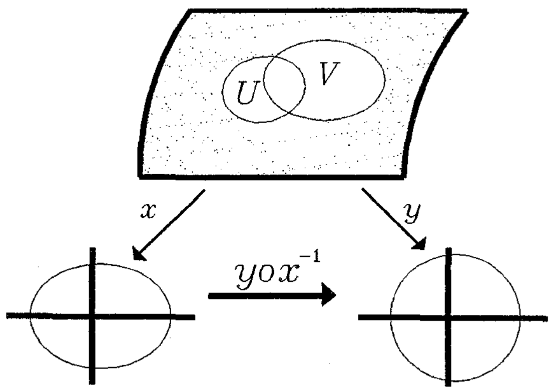
p از M کارت (x,U) را انتخاب می‌کنیم. این کارت یک پایه $\{(\frac{\partial}{\partial x^1})_q,\cdots,(\frac{\partial}{\partial x^n})_q\}$ برای T_qM تعریف می‌کند $q \in U$. می‌توان به عنوان جهت برای T_qM جهتی را که این پایه تعریف می نماید در نظر گرفت [1] بنابراین برای اینکه این تعریف بامعنی باشد باید به انتخاب کارت ها بستگی نداشته باشد. لذا تعریف زیر را می‌آوریم.

تعریف: *فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر باشد. می‌گوئیم که M **جهت‌پذیر** است، اگر بتوان M را توسط یک اطلس $\mathcal{A}$ طوری پوشانید که به ازاء هر کارت (x,U) و (y,V) از $\mathcal{A}$ روی $U \cap V \neq \emptyset$ داشته باشیم*

$$\det(y \circ x^{-1})_* > 0$$

باتوجه به نماد گذاری فصول قبل رابطه فوق روی $U \cap V \neq \phi$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\det||\frac{\partial y^i}{\partial x^j}|| > 0$$



شکل ۵.۶: نگاشت تغییر کارت روی M

رابطه فوق بدین معنی است که می‌توان روی فضای مماس در هر نقطه یک جهت تعریف نمود. یعنی اگر (x,U) یک کارت از $\mathcal{A}$ بوده و $\mathcal{M}_p$ یک جهت که توسط

[1] بطور دقیقتر اگر $\{(e_1)_{x(q)},\cdots,(e_n)_{x(q)}\}$ پایه کانونی $T_{x(q)}U$ باشد، به عنوان جهت برای T_qM جهتی را که توسط $\{(x_*)_q^{-1}(e_1)_{x(q)},\cdots,(x_*)_q^{-1}(e_n)_{x(q)}\}$ تعریف می شود در نظر گرفته‌ایم.

$\{(\frac{\partial}{\partial x^1})_p, \cdots, (\frac{\partial}{\partial x^n})_p\}$ تعریف می‌شود، آنگاه اگر (y, V) کارت دیگری از $\mathcal{A}$ در همسایگی p باشد، داریم

$$\frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^i}$$

در نتیجه p ماتریس تغییر پایه برابر است با

$$\mathcal{P}_{(\frac{\partial}{\partial y^i})_p \to (\frac{\partial}{\partial x^j})_p} = ||\frac{\partial y^i}{\partial x^j}||$$

بنابراین چون $\det ||\frac{\partial y^i}{\partial x^j}|| > 0$ دو پایه $\{\frac{\partial}{\partial x^j}\}$ و $\{\frac{\partial}{\partial y^i}\}$ در یک کلاس جهت پذیری قرار دارند.

براحتی می‌توان شرط لازم برای جهت‌پذیری یک منیفلد را به شرح زیر ارائه نمود.

شرط لازم جهت‌پذیری

اگر (x, U) و (y, V) دو کارت از یک منیفلد جهت‌پذیر بوده بطوریکه U و V همبند باشند آنگاه $\det ||\frac{\partial y^i}{\partial x^j}||$ روی $U \cap V$ دارای یک علامت ثابت است.

در اینجا برای پرهیز از به دراز کشاندن سخن جزئیات اثبات آورده نمی‌شود. خواننده می‌تواند در صورت لزوم به کتاب *Brickell & Clark* صفحه ۱۲۱ مراجعه نماید.

حال به یک مثال در این مورد اشاره می‌کنیم.

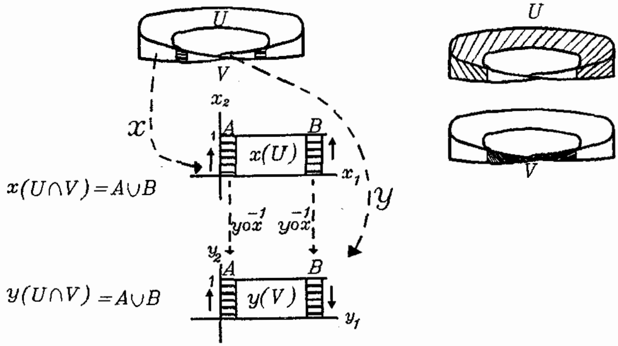
مثال:

نوار موبیوس جهت‌پذیرنیست. در اینجا به روش ساده وبا استفاده از کارت‌ها، جهت ناپذیری نوار موبیوس را ثابت می‌نمائیم. فرض کنیم عرض نوار موبیوس برابر یک باشد.

مطابق با شکل زیر یک اطلس که از دو کارت به صورت زیر تشکیل می‌شود را درنظر می‌گیریم.

کارت (x, U) روی نقاط هاشورخورده از نوار تعریف می‌گردد و آنرا عیناً بروی $\mathbb{R}^2$

منتقل می‌نماید.



شکل ۵.۷: نگاشت تغییر کارت روی نوار موبیوس

کارت (y, V) روی نقاط سیاه شده از نوار تعریف می‌گردد و آنرا پس از رفع پیچیدگی بروی $I\!R^۲$ منتقل می‌نماید. با توجه به شکل $U \cap V$ از دو قطعه تشکیل می‌شود که تصاویر آنها توسط کارت x را A و B می‌نامیم. باید نگاشت تغییر کارت را بدست آورده ژاکوبین آن را محاسبه کنیم.

با کمی دقت می‌توان مشاهده کرد که اگر فرض کنیم که $x(U \cap V) = A \cup B$ داریم

$$y \circ x^{-۱} : x(U \cap V) \to y(U \cap V)$$

این تابع با ضابطه زیر تعریف می‌شود

$$y \circ x^{-۱} : \begin{cases} (x_۱, x_۲) & \to (y_۱ = x_۱, y_۲ = x_۲) \quad \text{روی}\, A \\ (x_۱, x_۲) & \to (y_۱ = x_۱, y_۲ = ۱ - x_۲) \quad \text{روی}\, B \end{cases}$$

(چون نقطه بالا را به نقطه پائین می‌برد و بر عکس)

بنابراین می‌بینیم که $(y \circ x^{-۱})_*$ روی A دارای دترمینان یک و روی B دارای دترمینان منفی یک می‌باشد. پس دترمینان علامت ثابتی روی $x(U \cap V) = A \cup B$ ندارد. در نتیجه نوار موبیوس شرط لازم جهت پذیری را نداشته لذا جهت‌ناپذیر است.

همانطور که در یادآوری جبر خطی بیان شد جهت روی یک منیفلد را با انتخاب یک nـفرم غیرصفر نیز می‌توان تعریف نمود. برای اینکار از قضیه زیر استفاده می‌کنیم.

قضیه ۱: منیفلد M به بعد n جهت پذیر است اگر وتنها اگر یک n_فرم $\omega \in \Omega^n M$ موجود بوده بطوریکه ω در تمام نقاط M مخالف صفر باشد.

اثبات: فرض کنیم روی M یک n_فرم ω موجود باشد که در تمام نقاط داشته باشیم $\omega \neq ۰$. برای تحقیق جهت‌پذیری M کافی است کارت‌هایی مانند (x, U) را به‌گونه‌ای انتخاب کنیم که $\omega = f dx^۱ \wedge \cdots \wedge dx^n \neq ۰$ در شرط $f > ۰$ صدق کند، (چنین کارت‌هایی حول هر نقطه از M موجود است) این کارت‌ها یک اطلس تشکیل می‌دهند که شرط جهت‌پذیری M را برقرار می‌کند.

برعکس فرض کنیم M جهت‌پذیر بوده دارای جهت μ باشد. یک افراز واحد[۱] روی M تحت آن اطلسی که در تعریف جهت‌پذیری آمده است درنظر گرفته آن را با $\delta(x, U, \varphi_U)$ نمایش می‌دهیم. روی (x, U)، n_فرم ω_U را به‌صورت $\omega_U = dx^۱ \wedge \cdots \wedge dx^n$ انتخاب می‌کنیم. از شرط جهت‌پذیری نتیجه می‌شود که برای دو کارت (x, U) و (y, V) در این اطلس اگر $U \cap V$ ناتهی باشد، ω_U و ω_V روی $U \cap V$ مضرب مثبتی از یکدیگرند.

قرار می‌دهیم

$$\omega = \sum_{U \in \delta} \varphi_U \omega_U \quad \omega \in \Omega^n M$$

در هر نقطه p از M، ω_Uها مضرب مثبتی از یکدیگرند و در $\omega = \sum \varphi_U \omega_U$ چون φ_U نیز مثبت است (چون $\sum \varphi_U(p) = ۱$ حداقل یکی از φ_Uها در هر نقطه p اکیداً مثبت است $(\varphi_U(p) > ۰)$ لذا مجموع فوق ناصفر است. □

مثال:

فرض کنیم $\omega = \frac{-y}{x^۲ + y^۲} dx + \frac{x}{x^۲ + y^۲} dy$ یک ۱_فرمی روی $I\!R^۲ - \{(۰, ۰)\}$ باشد. نشان می‌دهیم ω روی دایره $x = \cos ۲\pi t$ و $y = \sin ۲\pi t$ همواره مخالف صفر است. کافی است مقادیر y, x را در ω قرار دهیم. در این صورت مقدار $۲\pi dt \neq ۰$ حاصل می‌گردد که از آن بنابر قضیه بالا نتیجه می‌شود $S^۱$ جهت‌پذیر است.

البته راههای مختلف دیگری نیز برای بررسی جهت‌پذیری یک منیفلد وجود دارد که می‌توان

[۱] فرض شده است که M دارای پایه شمارا است، لذا افراز واحد همواره وجود دارد.

از آن جمله به گزاره زیر اشاره کرد.

گزاره ۱: اگر منیفلد M را بتوان توسط حوزه تعریف دو کارت V, U طوری پوشانید که $U \cap V$ همبند باشد آنگاه M جهت‌پذیر است.

اثبات: فرض کنیم M را بتوان توسط حوزه تعریف دو کارت V, U پوشانید بطوریکه $U \cap V$ همبند باشد. می‌دانیم دترمینان مشتق نگاشت تغییر مختصات مخالف صفر است و از طرفی چون $x(U \cap V)$ همبند است علامت دترمینان نمی‌تواند تغییر کند. حال اگر علامت دترمینان در نقطه‌ای از $x(U \cap V)$ منفی باشد می‌توان با تغییر علامت یکی از مختصات مقدار دترمینان را مثبت نمود به این صورت در کل $x(U \cap V)$ علامت مثبت می‌شود لذا بنابر تعریف M جهت‌پذیر می‌باشد. $\square$

تذکر: با استفاده از روش استریوگرافیک نسبت به دو قطب شمال $N = (\circ, \cdots, \circ, 1)$ و جنوب $S = (\circ, \cdots, \circ, -1)$ و گزاره بالا می‌توان نتیجه گرفت که کره S^n در $I\!R^{n+1}$ جهت‌پذیر است.

تمرین

۱ـ ثابت کنید کره S^2 جهت‌پذیر است.

راهنمایی: روش اول: یک ۲ـفرمی مخالف صفر در $I\!R^3$ طوری تعریف کنید که مقدار آن در روی S^2 مخالف صفر شود و از قضیه بالا استفاده کنید. روش دوم: از تصویر استریوگرافیک و گزاره بالا استفاده کنید.

۲ـ الف) فرض کنیم M یک منیفلد از کلاس C^∞ باشد. نشان دهید TM جهت‌پذیر است حتی اگر M جهت پذیر نباشد. راهنمایی: ماتریس تغییر مختصات TM را بدست آورید.

ب) در مورد جهت‌پذیر بودن T^*M چه می‌توان گفت؟ راهنمایی: به تمرین ۱ در بخش ۵.۲ § فضای دوگان مماس مراجعه کنید.

۳ـ نشان دهید هر منفیلد دیفرانسیل‌پذیر که با اطلس تک کارتی تعریف شود جهت‌پذیر است.

۴ـ آیا $T^2 = S^1 \times S^1$ جهت‌پذیر است؟ (راهنمایی: از منیفلد حاصلضرب بخش ۲.۱ § استفاده کنید).

۵ـ ثابت کنید حاصلضرب دو منیفلد جهت‌پذیر یک منیفلد جهت‌پذیر است.

۶.۵ § لم پوانکاره[۱]

pـفرمی های دیفرانسیل پذیر روی منیفلد M را در نظر می‌گیریم.

تعریف: pـفرمی ω را **بسته**[۲] گوئیم اگر $d\omega = 0$ وآنرا **کامل**[۳] گوئیم اگر یک $(p-1)$ـفرمی π روی M موجود باشد بطوریکه $\omega = d\pi$.

می دانیم اگر بعد منیفلد M را با n نشان دهیم هر nـفرمی روی M بسته است زیرا

$$\forall \omega \in \Omega^n(M) \qquad\qquad d\omega \in \Omega^{n+1}(M) = \{0\}$$

از طرف دیگر اگر pـفرمی ω کامل باشد (یعنی $\omega = d\pi$ باشد) بسته نیز هست زیرا $d\omega = d^2\pi = 0$ بنابراین ω بسته است. به عبارت دیگر شرط $d\omega = 0$ برای حل معادله زیر لازم است

$$\boxed{\omega = d\pi}$$

(π در اینجا مجهول است.)

پوانکاره ثابت می‌کند که شرطِ فوق «بطور موضعی» کافی است، بدین معنی که اگر $d\omega = 0$ برای هر نقطه $m \in M$ یک همسایگی U از m و $\pi \in \Omega^{p-1}U$ وجود دارد بطوریکه

$$\omega|_U = d\pi$$

قبل از اینکه این موضوع را ثابت کنیم به ذکر چند مثال می‌پردازیم.

مثال ۱: فرض کنیم $M = I\!R^3$ و $\omega = Pdx + Qdy + Rdz \quad \in \Omega^1(M)$. سؤالی که مطرح می‌شود این است که آیا تابعی مانند f روی M وجود دارد بطوریکه $\omega = df$.

---

[۱] *Poincaré*

[۲] *closed (fermé)*

[۳] *exact (exacte)*

$$f \in \Omega^{\circ}(M) = C^{\infty}(M)$$

به عبارت دیگر :

$$Pdx + Qdy + Rdz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

بنابراین باید دستگاه معادلات زیر را حل نمود .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P \ , \ \frac{\partial f}{\partial y} = Q \ , \ \frac{\partial f}{\partial z} = R$$

در ریاضیات عمومی دیدیم که شرط لازم وکافی برای آنکه دستگاه معادلات بالا دارای جواب باشد آن است که:

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = \circ, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = \circ, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \circ$$

(یعنی $d\omega = \circ$)

لذا اگر تابع f در شرط بالا صدق کند می‌توان نوشت $\omega = df$

(در ریاضیات عمومی یک میدان برداری $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ که در شرایط فوق صدق کند را میدان برداری گرادیان نامیدیم $\vec{F} = grad \ \ f$)

مثال ۲: فرض کنیم $\omega \in \Omega^{2} I\!R^{3}$.

$$\omega = Ady \wedge dz + Bdz \wedge dx + Cdx \wedge dy$$

حال مجدداً سؤال قبل را مطرح می‌کنیم، یعنی می‌گوییم آیا یک ۱ـفرمی $\pi \in \Omega^{1} R$ وجود دارد بطوریکه $\omega = d\pi$

اگر فرض کنیم $\pi = Pdx + Qdy + Rdz$ آنگاه باید دستگاه زیر را حل کنیم

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = A \ , \ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = B \ , \ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = C$$

شرط لازم برای اینکه دستگاه بالا دارای جواب باشد آنستکه $\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = \circ$ (یعنی $d\omega = \circ$). در این مثال نیز می‌توان نشان داد که شرط بالا بطور موضعی کافی نیز

می‌باشد. به عبارت دیگر لم اساسی زیر در هندسه دیفرانسیل مطرح می‌گردد.

لم پوانکاره[1] فرض کنیم $\omega \in \Omega^p(M)$، $(p \geq ۱)$ بطوریکه $d\omega = \circ$ آنگاه برای هر نقطه $m \in M$ یک همسایگی U در M و یک $(p-۱)$-فرمی π روی U موجود است بطوریکه

$$\omega|_U = d\pi$$

برای اثبات لم بالا تعریف زیر را می‌آوریم.

تعریف: منیفلد M را **انقباض‌پذیر**[2] در نقطه $p_\circ$ از M گوئیم اگر نگاشت C^∞ زیر موجود باشد

$$h : M \times [\circ, ۱] \to M$$

بطوریکه $\forall p \in M$

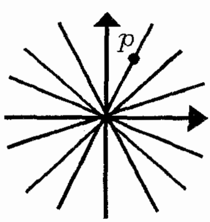
$$h(p, ۱) = p$$

$$h(p, \circ) = p_\circ$$

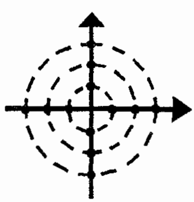
به عنوان مثال $I\!R^n$ انقباض پذیر در نقطه $\circ \in I\!R^n$ می‌باشد، زیرا می‌توانیم تابع h را به‌صورت زیر تعریف کنیم.

$$\begin{array}{rcl} h : I\!R^n \times [\circ, ۱] & \to & I\!R^n \\ (p, t) & \to & tp \end{array}$$

(شکل ۵.۸ (الف) را ببینید)



(الف)


(ب)

شکل ۵.۸: $I\!R^n$ و دیسک انقباض پذیرند

[1] هانری پوانکاره $Henri Ponicare'$ ریاضیدان و فیلسوف فرانسوی ۱۹۱۲_۱۸۵۴ عضو آکادمی علوم فرانسه

[2] $Contractible$

به همین صورت دیسک $D = \{(x, y) \in I\!R^{۲} | x^{۲} + y^{۲} < r\}$ انقباض‌پذیر در نقطه ۰ می‌باشد. کافی است تابع h را به‌صورت زیر در نظر بگیریم. (شکل ۵.۸ (ب) را ببینید)

$$h : D \times [\circ, ۱] \to D$$
$$(x, y, t) \;\to\; (tx, ty)$$

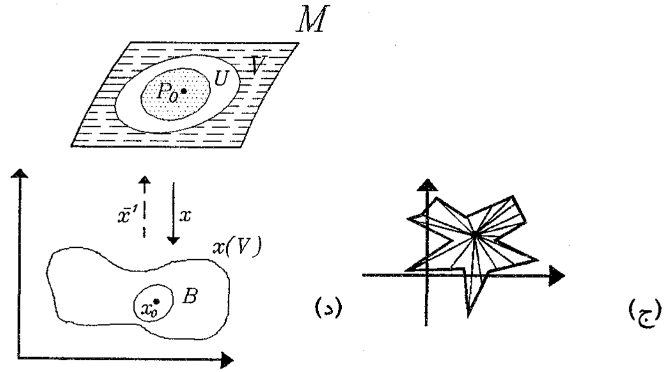
(در اینجا دوتایی (tx, ty) متعلق به دیسکی به شعاع $Rt^{۲}$ است.)

بطور کلی اگر U یک باز **ستاره گون**[1] باشد آنگاه U انقباض‌پذیر است. مجموعه ستاره گون را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد

$$\exists p_\circ \forall p \in U \;\forall t \in [\circ, ۱] \; p_\circ + t(p - p_\circ) \in U$$

برای خاصیت انقباض پذیری تابع h را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم. (شکل ۵.۹ (ج) را ببینید)

$$\begin{aligned} h : U \times [\circ, ۱] &\to U \\ (p, t) &\to p_\circ + t(p - p_\circ) \end{aligned}$$



شکل ۵.۹: باز ستاره‌گون و منیفلد موضعاً انقباض‌پذیر

گزاره ۱: برای هرنقطه $p_\circ$ از M یک همسایگی U شامل $p_\circ$ در M موجود است بطوریکه U انقباض پذیر در $p_\circ$ باشد.

---
[1] *Star shaped (Etoile')*

اثبات: کارت (x, V) را در همسایگی نقطه $p_\circ$ در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $B_{x(p_\circ)}$ یک گوی به مرکز $x_\circ = x(p_\circ)$ در $x(V)$ باشد. همسایگی U شامل $P_\circ$ را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$U = x^{-1}(B_{x\circ})$$

(شکل ۵.۹ (د) را ببینید.)

واضح است که U انقباض پذیر در $p_\circ$ می‌باشد زیرا $B_{x\circ}$ ستاره‌گون بوده و داریم

$$\forall x \in Bx_\circ, \exists t \; x = x_\circ + t(x - x_\circ)$$

حال اگر قرار دهیم

$$\begin{aligned} h \quad &: U \times [0, 1] \to U \\ &(p, t) \to x^{-1}(x_\circ + t(x(p) - x_\circ)) \end{aligned}$$

اثبات گزاره کامل می‌شود. □

حال به اثبات قضیه زیر که *لم پوانکاره* نتیجه‌ای از آن می‌باشد می‌پردازیم. این قضیه را قضیه پوانکاره[1] نیز می‌نامند.

قضیه ۱: اگر M انقباض‌پذیر در یک نقطه باشد آنگاه هر فرم بسته روی M کامل است.

برای اثبات این قضیه از لم‌های زیر استفاده می‌کنیم.

لم ۱: فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر بوده و نگاشت J_t به‌صورت زیر تعریف شود

$$\begin{aligned} J_t \quad &: M \to M \times I\!R \\ &p \to (p, t) \end{aligned}$$

اگر میدان برداری $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$ را روی منیفلد حاصلضرب $M \times I\!R$ درنظر بگیریم (t مختصات $I\!R$) و $\omega \in \Omega^p(M \times I\!R)$ آنگاه داریم

$$\frac{d}{dt}(J_t^*\omega) = J_t^*(\mathcal{L}_\xi \omega)$$

---

[1] *Poincare′ theorem*

در اینجا $\mathcal{L}$ اپراتور مشتق لی است.

اثبات: کافی است که لم را بطور موضعی و برای فرم‌های به‌صورت زیر ثابت کنیم.

$$\omega = f(x,t)dx^{۱} \wedge \cdots \wedge dx^{p} \quad ,\omega' = f(x,t)dt \wedge dx^{۱} \wedge \cdots \wedge dx^{p-۱}$$

(در اینجا $x^{۱},\cdots,x^{p}$ مختصات روی M و t مختصات روی $I\!R$ می‌باشد)

$$J_t^*\omega = f(x,t)dx^{۱} \wedge \cdots \wedge dx^{p}$$

(به ازاء هر t ثابت رابطه اخیر معرف آن است که ω یک فرم روی M نسبت به پارامتر t می‌باشد). از اینجا داریم

$$\frac{d}{dt}(J_t^*\omega) = \frac{\partial f}{\partial t}dx^{۱} \wedge \cdots \wedge dx^{p}$$
$$\mathcal{L}_\xi\omega = \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx^{۱} \wedge \cdots \wedge dx^{p}$$
$$J_t^*(\mathcal{L}_\xi\omega) = \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx^{۱} \wedge \cdots \wedge dx^{p}$$

لذا داریم

$$\frac{d}{dt}(J_t^*\omega) = J_t^*(\mathcal{L}_\xi\omega)$$

به همین صورت تساوی را برای فرم ω' تحقیق می‌نماییم. $\square$

لم ۲: **فرض کنیم** $\begin{array}{rl} J_t : M & \longrightarrow M \times [\circ,۱] \\ p & \mapsto (p,t) \end{array}$ **آنگاه نگاشتی $I\!R$ـخطی مانند H موجود است**

$$H : \Omega^p(M \times [\circ,۱]) \to \Omega^{p-۱}(M)$$

بطوریکه داشته باشیم $\quad d \circ H + H \circ d = J_۱^* - J_\circ^*$

اثبات: فرض کنیم $\omega \in \Omega^p(M \times [\circ,۱])$ آنگاه بنابر خواص انتگرال معین داریم

$$J_۱^*\omega - J_\circ^*\omega = \int_\circ^۱ \frac{d}{dt}(J_t^*\omega)dt, \text{ بنابر لم ۱ } = \int_\circ^۱ J_t^*(\mathcal{L}_\xi\omega)dt =$$

در اینجا $\xi = \frac{\partial}{\partial t} \in \mathcal{X}(M \times [\circ, \backslash])$ و بنابر تعریف مشتق لی داریم

$$= \int_{\circ}^{\backslash} J_t^*(i_\xi d\omega)dt + \int_{\circ}^{\backslash} (J_t^* d i_\xi \omega)dt$$

حال قرار می‌دهیم

$$H(\omega) = \int_{\circ}^{\backslash} J_t^*(i_\xi \omega)dt$$

با توجه به اینکه $J_t^* \circ d = d \circ J_t^*$ براحتی می‌توان بررسی نمود که رابطه زیر برقرار است.

$$d \circ H + H \circ d = J_\backslash^* - J_\circ^* \quad \square$$

لم ۳: اگر M انقباض‌پذیر باشد، یک نگاشت $I\!R$ـخطی مانند k موجود است بطوریکه

$$k : \Omega^p M \to \Omega^{p-\backslash} M$$

$$\boxed{k \circ d + d \circ k = Id}$$

اثبات: چون M انقباض پذیر است بنابر تعریف نگاشت h, C^∞ وجود دارد بطوریکه

$$\begin{aligned} h \quad &: M \times [\circ, \backslash] \longrightarrow M \\ h(p, \backslash) &= p \qquad h(p, \circ) = p_\circ \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} h \circ J_\backslash : M \quad &\longrightarrow M & \qquad h \circ J_\circ : M \quad &\longrightarrow M \\ p \quad &\mapsto h(p, \backslash) = p & p \quad &\mapsto h(p, \circ) = p_\circ \end{aligned}$$

در نتیجه $h \circ J_\circ$ نگاشت ثابت بوده و همچنین $h \circ J_\backslash = Id_M$ نگاشت همانی می‌باشد

به همین صورت برای هر فرم ω روی M داریم

$$\begin{aligned} \omega \quad &= (h \circ J_\backslash)^* \omega = J_\backslash^* \circ h^* \omega \\ \circ \quad &= (h \circ J_\circ)^* \omega = J_\circ^* \circ h^* \omega \end{aligned}$$

با استفاده از اثر نگاشت H در لم ۲ بر روی فرم $h^*\omega$ خواهیم داشت:

$$\omega = J_\backslash^* \circ h^*\omega - J_\circ^* \circ h^*\omega = H \circ dh^*\omega + dH \circ h^*\omega$$

حال کافی است قرار دهیم $k = H \circ h^*$ به این صورت لم ۳ ثابت می‌شود. □

با استفاده از لم ۳ اثبات قضیه فوق براحتی روشن می‌شود زیرا اگر $d\omega = 0$ داریم

$$\omega = kd\omega + dk\omega = d(k\omega)$$

و لذا ω کامل است. □

تمرین[1]

۱ـالف) اگر $f : I\!R^n \to I\!R$، میدان برداری گرادیان را با $grad\ f$ نشان داده روی $I\!R^n$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$grad\ \ f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{n} D_i f \frac{\partial}{\partial x^i}$$

همچنین اگر قرار دهیم $\nabla = \sum_{i=1}^{n} D_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ می‌توان گرادیان f را به‌صورت زیر نوشت.

$$grad\ \ f = \nabla f$$

اگر $grad\ f(p) = W_p$ آنگاه نشان دهید

$$D_V f(p) = < V, W >$$

(در اینجا $D_V f(p)$ همان مشتق جهت‌دار در جهت بردار V در نقطه p است که آنرا با $X_p f$ یا $V_p f$ نیز نمایش می‌دادیم.)

سپس از آن نتیجه بگیرید $\nabla f(p)$ جهتی است که در آن جهت f در نقطه p حداکثر تغییرات را دارد.

ب) اگر $X = \sum_i a^i \partial / \partial x^i$ یک میدان برداری روی $I\!R^n$ باشد دیورژانس X را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$divX = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a^i}{\partial x^i}$$

می‌توان دیورژانس را به‌صورت زیر نیز نوشت.

$$divX = < \nabla, X >$$

---

[1] این تمرینات از کتاب $Spivak$ جلد اول اقتباس گردیده است.

اگر $n = 3$، کرل X را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم $CurlX = \nabla \times X$ که در آن $\times$، همان ضرب خارجی دو بردار است. حال اگر فرض کنیم

$$\begin{aligned} \omega_X &= a^1 dx + a^2 dy + a^3 dz \\ \eta_X &= a^1 dy \wedge dz + a^2 dz \wedge dx + a^3 dx \wedge dy \end{aligned}$$

نشان دهید

$$\begin{aligned} (I) &\quad df = \omega_{gradf} \\ (II) &\quad d(\omega_X) = \eta_{curlX} \\ (III) &\quad d(\eta_X) = (divX) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

ج) از آن نتیجه بگیرید

$$\begin{aligned} Curl \quad grad \quad f &= 0 \\ div \quad curl \quad X &= 0 \end{aligned}$$

د) اگر X یک میدان برداری روی مجموعه باز ستاره‌گون $U \subset I\!R^n$ بوده و $CurlX = 0$ آنگاه نشان دهید تابعی مانند $f : U \to I\!R$ موجود است بطوریکه $X = gradf$. به همین صورت نشان دهید اگر $divX = 0$ آنگاه یک میدان برداری مانند Y روی U وجود دارد بطوریکه $X = CurlY$ باشد.

۲ـ فرض کنیم M و N منیفلدهای دیفرانسیل‌پذیر C^∞ به بعد n بوده و تابع $f : M \to N$ از کلاس C^∞ باشد. اگر (x, U) و (y, V) به ترتیب دو کارت موضعی در حول p و $f(p)$ باشند آنگاه نشان دهید

$$f^*(g dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n) = (g \circ f) \cdot \det \left[\frac{\partial (y^i \circ f)}{\partial x^j} \right] dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

در اینجا $g : V \to I\!R$ یک تابع حقیقی در همسایگی $f(p)$ است.

راهنمایی: قضیه ۱ از بخش ۳ و قضیه ۳ از بخش ۱ را در این فصل ببینید.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

فصل ۶: معادلات دیفرانسیل و منیفلد انتگرال[۱]

مقدمه

این فصل به مطالعه نظریه معادلات دیفرانسیل روی منیفلدها اختصاص دارد. یکی از اهداف ما در اینجا به دست آوردن شرط لازم و کافی برای وجود جواب در یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی روی منیفلدهاست.

در ابتدای فصل در بخش ۱§ میدان‌های برداری را از دیدگاه معادلات دیفرانسیل مورد بررسی قرار می‌دهیم. به این منظور لازم است اطلاعاتی هرچند مختصر از نظریه معادلات دیفرانسیل و قضایای اساسی آن داشته باشیم. این قضایا در بخش ۲§ یادآوری شده‌اند.

نظر به اینکه از این قضایا تنها در اثبات قضیه شار استفاده خواهد شد، خوانندگانی که با این موضوع کمتر آشنایی دارند می‌توانند این بخش را در نگرش‌های بعدی خود مطالعه کنند.

در بخش ۳§ میدان‌های برداری را به عنوان گروه موضعی یک پارامتری در $I\!R^n$ معرفی نموده مثال‌های متنوعی آورده‌ایم. بخش ۴§ تعمیم بخش ۳§ برای منیفلدها است.

---

[۱] *Integral manifold (Variété integrale)*

بخش §۵ مربوط به قضیه بازسازی میدان‌های برداری است که کاربردهای فراوانی در هندسه دارد. این قضیه را از لحاظ اهمیت قضیه اساسی نظریه معادلات دیفرانسیل نیز می‌گویند.

در بخش §۶ به تعریف مشتق لی از میدان‌های برداری پرداخته با استفاده از قضیه بازسازی تعبیر هندسی آن را با اثبات یک قضیه بیان می‌کنیم. از مزایای این قضیه آن است که یک روش جالب برای تعریف مشتق لی از آن نتیجه می‌شود که براحتی قابل تعمیم برای فرم‌ها و یا تانسورها است. بطور مشابه این کار را برای فرم‌ها انجام می‌دهیم. این بخش برای دانشجویان رشته فیزیک نظری مفید بوده دقت در جزئیات آن را به آنها توصیه می‌کنیم.

بخش §۷ مربوط به قضیه بازسازی چند میدان برداری بطور همزمان است. این قضیه در اثبات قضیه فروبنیوس نقش اساسی دارد.

عنوان بخش §۸ منیفلد انتگرال است. منیفلد انتگرال در حقیقت تعمیم منحنی انتگرال میدان‌های برداری است. بخش §۹ به قضیه فروبنیوس اختصاص دارد، در این راستا به بیان مفهوم برگ‌سازی یا لایه‌سازی نیز اشاره شده است.

در بخش §۱۰ که آخرین بخش این فصل است با استفاده از قضیه فروبنیوس شرط لازم و کافی برای وجود جواب در یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی را بیان می‌نماییم.

لازم به یادآوری است که حذف بخش‌های ۲، ۵، ۷، ۸، ۹، ۱۰ از این فصل لطمه‌ای به پیوستگی مطالب در فصول آینده نمی‌زند و خواننده می‌تواند مباحث فوق را در نگرش‌های بعدی خود مورد مطالعه قرار دهد.

۱.۶ § یادآوری میدان‌های برداری به عنوان معادلات دیفرانسیل

قبلاً دیدیم که یک میدان برداری مانند X روی منیفلد M توسط یک مشتق‌گیری تعریف می‌شود. فرض کنیم (x, U) یک کارت روی M و نگاشت $f : M \to I\!R$ دیفرانسیل‌پذیر

باشد. آنگاه معادله

$$Xf = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0$$

یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی روی منیفلد M است که توسط میدان برداری X بیان می‌گردد. در اینجا X^i ها مولفه‌های میدان برداری X هستند. حال خواهیم دید که این میدان برداری یک معادله دیفرانسیل معمولی درجه اول روی M تعریف می‌نماید.

فرض کنیم C یک منحنی دیفرانسیل‌پذیر روی M باشد و برای کارت (x, U) داشته باشیم

$$\begin{aligned} C &: I \to M \\ x \circ C(t) &= (C^1(t), \cdots, C^n(t)) \end{aligned}$$

(شکل ۲.۴ را ببینید)

اگر t کارت همانی روی I بوده و $\frac{\partial}{\partial t}$ میدان برداری مربوط به آن باشد، نمودار زیر را داریم

$$\begin{array}{ccccc} & I & \xrightarrow{C} & M & \\ \frac{\partial}{\partial t} & \downarrow & \overset{\dot{C}}{\searrow} & \downarrow & X \\ & TI & \xrightarrow{C_*} & TM & \end{array}$$

در اینجا فرض کرده‌ایم

$$\dot{C} = \frac{dC}{dt} = C_* \circ \frac{\partial}{\partial t}$$

$\dot{C}$ یک منحنی روی TM است که آنرا **ترفیع منحنی** C[1] می‌نامند.

در اینجا میدان برداری X یک معادله دیفرانسیل معمولی[2] روی M را به شرح زیر تعریف می‌نماید. خم C را یک جواب این معادله گوئیم هرگاه

---

[1] *Lift Curve (Courbe élevée)*

[2] *ordinary differential equation*

$$\dot{C} = X \circ C$$

به عبارت دیگر

$$\frac{dC}{dt} = X(C^۱, \cdots, C^n) \quad , \quad C^i = x^i \circ C(t)$$

این معادله دارای n مولفه است که به‌صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$\frac{dC^i}{dt} = X^i(C^۱, \cdots, C^n)$$

در اینجا X^iها مولفه‌های X در پایه $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ هستند. **منحنی** C را **منحنی انتگرال**[۱] میدان X می‌نامند. با این مفهوم قبلاً نیز در بخش میدان‌های برداری آشنا شده‌ایم. در این فصل با تعمیم مفهوم منحنی انتگرال، منیفلد انتگرال را تعریف خواهیم کرد.

مثال:

میدان برداری X در $I\!R^۲$ را به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌خواهیم منحنی‌های انتگرال آنرا بدست آوریم.

$$X = x^۱ \frac{\partial}{\partial x^۱} + x^۲ \frac{\partial}{\partial x^۲}$$

فرض کنیم $C : I \to I\!R^۲$ یک منحنی در $I\!R^۲$ با مولفه‌های $C(t) = (C^۱, C^۲)$ باشد. برای آنکه C منحنی انتگرال میدان X باشد لازم و کافی است که مولفه‌های آن در رابطه زیر صدق کنند

$$\frac{dC^i}{dt} = X^i(C^۱, C^۲)$$

چون در اینجا فرض کردیم مولفه‌های میدان X، $X^i = x^i$ توابع مولفه iـام هستند داریم

$$\frac{dC^۱}{dt} = x^۱(C^۱, C^۲) = C^۱$$

$$\frac{dC^۲}{dt} = x^۲(C^۱, C^۲) = C^۲$$

---

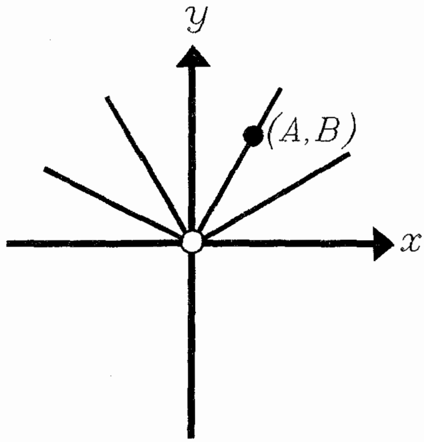
[۱] *Integral curve*

می‌دانیم جواب معادلات $C^{۱} = \frac{dC^{۱}}{dt}$ و $C^{۲} = \frac{dC^{۲}}{dt}$ عبارت است از

$$C^{۱} = Ae^t \qquad C^{۲} = Be^t$$

لذا معادله منحنی انتگرال عبارت است از $C = (Ae^t, Be^t)$

نمودار این منحنی خطوط راستی است گذرنده از مبدأ و نقاطی به مختصات (A, B) که معادله آن با حذف e^t در صفحه به‌صورت $y = \frac{B}{A}x$ نوشته می‌شود.



شکل ۶.۱: خطوط راست منحنی‌های انتگرال میدان X هستند

منحنی انتگرالی که از مبدأ شروع شود ثابت است زیرا میدان برداری X در مبدأ برابر $(۰, ۰)$ می‌باشد. در بخش‌های ۳§ و ۴§ به بررسی دقیق‌تر این مطالب می‌پردازیم.

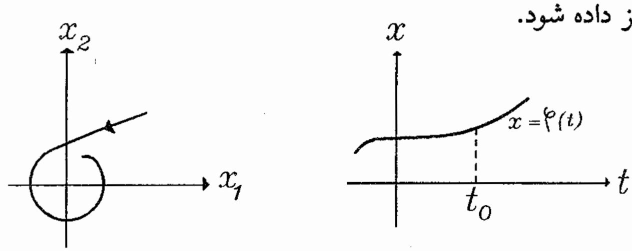
۲.۶ § یادآوری قضایای اساسی معادلات دیفرانسیل در $\mathbb{R}^n$

یک دستگاه معادلات دیفرانسیل در $\mathbb{R}^n$ را در نظر می‌گیریم

$$\dot{x} = X(t, x)$$

در اینجا $x = (x^{۱}, \cdots, x^n)$ ،$X = (X^{۱}, \cdots, X^n)$ ،$X^i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ و $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ فرض شده است. گاهی اوقات ممکن است معادله دیفرانسیل به شکل ساده‌تر

$\dot{x} = X(x)$ نیز داده شود.



شکل ۶.۲: *فضای فاز و فضای فاز توسعه یافته*

(الف) منحنی در فضای فاز توسعه یافته   (ب) مسیر در فضای فاز

فضای $(x^1, \cdots, x^n)$ از $I\!R^n$ را **فضای فاز**[1] و فضای $(t, x^1, \cdots, x^n)$ از $I\!R \times I\!R^n$ را **فضای فاز توسعه یافته**[2] می‌نامیم.

اگر $x = \varphi(t)$ یک جواب معادله باشد می‌توان یک منحنی و یک مسیر به شکل فوق در نظر گرفت.

از فضای فازها معمولاً برای معادلاتی به شکل $\dot{x} = X(x)$ استفاده می‌کنیم. حال به یادآوری چند گزاره و قضیه اساسی در نظریه معادلات دیفرانسیل می‌پردازیم.

گزاره: یک دستگاه معادلات دیفرانسیل به‌صورت $\dot{x} = X(x)$ در نظر می‌گیریم.

۱ـ اگر $x = \varphi(t)$ یک جواب معادله باشد آنگاه $\tilde{x} = \varphi(t + c)$ نیز $(\forall c \in I\!R)$ یک جواب معادله است.

۲ـ برای این دستگاه معادلات ، دو مسیر در فضای فاز ها یکدیگر را قطع نمی‌کنند یا اگر یکدیگر را قطع کنند بر هم منطبق می‌شوند.

۳ـ اگر γ یک مسیر از فضا باشد که خود را قطع می‌کند آنگاه یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد.

الف) γ به یک نقطه کاهش پیدا می‌کند.

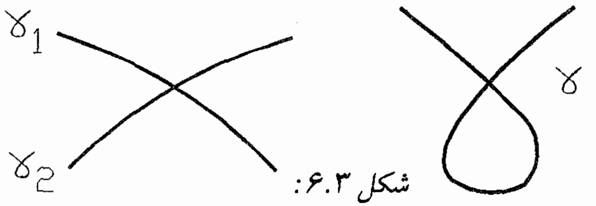
ب) γ یک منحنی بسته است. (یعنی مسیر یک جواب متناوب است.)

---

[1] *Phase space (Espace des phases)*

[2] *Large Phase space (Espace des phases elargi)*

بنابراین در یک دستگاه معادلات به شکل $\dot{x} = X(t)$ در فضای فازها حالات تقاطع دو مسیر یا قطع یک مسیر توسط خودش رخ نمی‌دهد.



شکل ۶.۳:

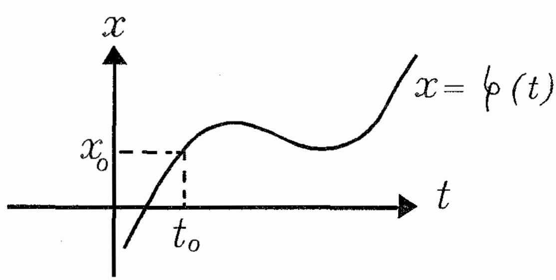
حال قضیه وجود و یکتایی جواب در معادلات دیفرانسیل را می‌آوریم.

۱ـ قضیه وجود و یکتایی

فرض کنیم $\dot{x} = X(t,x)$ یک دستگاه معادلات دیفرانسیل در $I\!R^n$ باشد. اگر توابع X^i و $\dfrac{\partial X^i}{\partial x^j}$ روی Δ بازی از $I\!R \times I\!R^n$ پیوسته باشند. آنگاه برای هر $(t_\circ, x_\circ) \in \Delta$ یک و تنها یک جواب ماکزیمال (یعنی غیر قابل توسعه) وجود دارد که روی بازه I شامل $t_\circ$ تعریف شده باشد بطوریکه

$$x(t_\circ) = x_\circ$$

لذا بنابر این قضیه از هر نقطه فضای توسعه یافته یک وتنها یک جواب ماکزیمال می‌گذرد.



شکل ۶.۴: وجود و یکتایی جواب در هر نقطه

نتیجه: فرض کنیم $\dot{x} = X(x)$ یک دستگاه معادلات دیفرانسیل باشد. اگر $x = \varphi(t, x_\circ)$ جوابی باشد که به ازاء $t = \circ$ مقدار $x_\circ$ را بدست دهد آنگاه

$$\boldsymbol{\varphi(t, \varphi(s, x_\circ)) = \varphi(t + s, x_\circ)}$$

اثبات: فرض کنیم s نقطه ثابتی متعلق به حوزه تعریف $x = \varphi(t, x_\circ)$ بوده و همچنین $x_۱ = \varphi(s, x_\circ)$ باشد. جواب زیر را در نظر می‌گیریم

$$\varphi_۱(t) = \varphi(t, x_۱) = \varphi(t, \varphi(s, x_\circ))$$

چون $\varphi(t, x_\circ)$ جواب معادله است $\varphi_۲(t) = \varphi(t + s, x_\circ)$ نیز جواب معادله می‌باشد. در نتیجه داریم

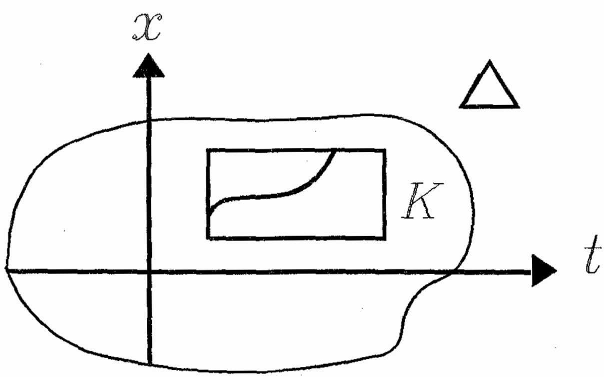
$$\varphi_۱(\circ) = \varphi(\circ, x_۱) = x_۱ = \varphi(s, x_\circ)$$
$$\varphi_۲(\circ) = \varphi(s, x_\circ)$$

لذا $\varphi_۱$ و $\varphi_۲$ در شرایط اولیه مشابه با یکدیگر برابرند و در نتیجه بر یکدیگر منطبق می‌گردند.

□

حال به قضیه وجود جواب کلی و توسعه جواب تا مرز یک زیر مجموعه فشرده می‌پردازیم.

قضیه ۲ـ وجود جواب کلی: فرض کنیم $\dot{x} = X(t, x)$ یک معادله دیفرانسیل در $I\!R^n$ باشد بطوریکه X^i و $\dfrac{\partial X^i}{\partial x^j}$ در روی Δ بازی از $I\!R \times I\!R^n$ پیوسته باشند. اگر $(t_\circ, x_\circ) \in \Delta$ و K یک زیر مجموعه فشرده از Δ شامل $(t_\circ, x_\circ)$ باشد، آنگاه جوابی که در نقطه $x(t_\circ) = x_\circ$ صدق می‌کند را می‌توان تا مرز K توسعه داد.



شکل ۶.۵: توسعه جواب در زیرمجموعه‌های فشرده

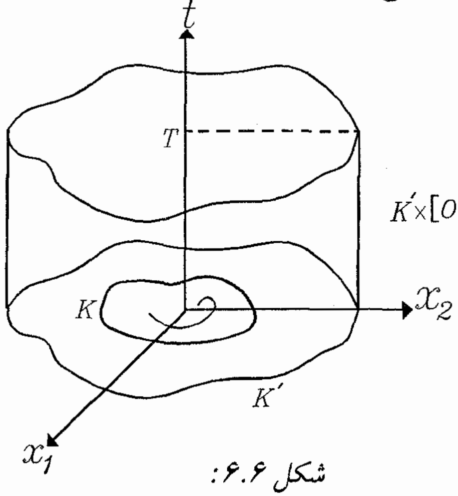
حال قضیه فوق را برای دستگاه معادلات $\dot{x} = X(x)$ بررسی می‌نماییم.

نتیجه: **فرض کنیم $\dot{x} = X(x)$ یک دستگاه معادلات دیفرانسیل بوده، X^i و $\dfrac{\partial X^i}{\partial x^j}$ روی Δ بازی از $I\!R^n$، C^k باشند. اگر مسیر γ از یک جواب $x = \varphi(t)$ در یک زیر مجموعه فشرده از فضای فازها قرار داشته باشد آنگاه جواب $x = \varphi(t)$ را می‌توان روی تمام $I\!R$ توسعه داد. (یعنی $\forall t \in I\!R$ تعریف شود)**

اثبات: فرض کنیم $\gamma \subset K$، K فشرده و K' زیر مجموعه فشرده دیگری از فضای فازها شامل K باشد. حال فضای فشرده فازهای توسعه یافته را در نظر می‌گیریم

$$K_۱ = K' \times [\circ, T]$$

جواب در داخل K' قرار داشته و در نتیجه می‌توان آنرا تا مرز K' توسعه داد. چون به مرز جانبی نمی‌رسد (زیرا در غیر اینصورت مسیر از K خارج می‌شود) به مرز فوقانی خواهد رسید. (برای روشن شدن موضوع به شکل زیر مراجعه شود.)



شکل ۶.۶:

لذا جواب را می‌توان تا $t = T$ توسعه داد و چون T مقدار دلخواهی می‌باشد جواب را می‌توان برای هر $t > \circ$ توسعه داد.

به همین صورت می‌توان برای هر $t < \circ$ نیز جواب را توسعه داد. بنابراین جواب بر روی

تمام $I\!R$ قابل توسعه است. □

قضیه ۳ـپیوستگی جواب نسبت به شرایط اولیه:

دستگاه معادلات $\dot{x} = X(t,x)$ را با فرض اینکه X و $\frac{\partial X^i}{\partial x^j}$ هر دو روی باز $\Delta \subseteq I\!R \times I\!R^n$ از کلاس C^k باشند، در نظر می‌گیریم. اگر جوابی را که در لحظه t_0 از نقطه x_0 می‌گذرد با $x = \varphi(t, t_0, x_0)$ نشان دهیم و فرض کنیم

$$U = \{(t,\tau,\eta) \in I\!R \times I\!R \times I\!R^n | \varphi(t,\tau,\eta) \text{تعریف شود}\}$$

آنگاه اولاً: U باز است.

ثانیاً: $\varphi(t,\tau,\eta)$ روی U از کلاس C^k است.

در قضیه فوق بازبودن U نتیجه مهمی است که در ادامه بحث مورد استفاده قرار خواهد گرفت. حال کمی بیشتر به تحلیل این خاصیت می‌پردازیم. بنابر قضیه وجود و یکتایی جواب داریم

$$\forall (t_1, x_1) \in \Delta, \exists \xi > 0, \exists! \text{ جواب یکتا } x = \varphi(t, t_1, x_1)$$

که برای $|t - t_1| < \xi$ تعریف می‌شود.

بازبودن U به این معنی است که اگر $x = \varphi(t, t_1, x_1)$ تعریف شده باشد (یعنی اگر $(t_1, x_1) \in \Delta$ و $|t - t_1| < \xi$) آنگاه $x = \varphi(t, t_0, x_0)$ برای مقادیر زیر تعریف می‌شود

t_0 به اندازه کافی نزدیک به t_1

x_0 به اندازه کافی نزدیک به x_1

$t - t_0$ به اندازه کافی کوچک

به عبارت دقیقتر مطالب فوق به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\forall (t_1, x_1) \in \Delta, \exists \xi > 0, \exists \eta > 0, \exists \delta > 0$$

$$\exists! \text{جواب یکتا} x = \varphi(t, t_0, x_0)$$

که برای $|t-t_0| < \xi$ و $|t_0 - t_1| < \eta$ و $|x_0 - x_1| < \delta$ تعریف می‌شود. از جمع‌بندی قضایای ۱ و ۳ قضیه زیر نتیجه می‌شود.

قضیه ۴ـ فرض کنیم $\dot{x} = X(t,x)$ یک دستگاه معادلات دیفرانسیل بوده X و $\dfrac{\partial X^i}{\partial x^j}$ روی باز $\Delta \subset I\!R \times I\!R^n$ از کلاس C^k باشند. آنگاه

$$\forall (t_1, x_1) \in \Delta \quad \text{و} \quad \exists \xi > 0, \exists (t_1,x_1) \text{ از } U \text{همسایگی} \quad : \quad U \subset \Delta$$

بطوریکه برای هر $(t_0, x_0) \in U$ یک جواب یکتای $x = \varphi(t)$ بافرض $x_0 = \varphi(t_0)$ وجود دارد که به ازاء هر t با شرط $|t-t_0| < \xi$ تعریف می‌شود.

به‌علاوه اگر $x_0 = \varphi(t_0)$ را با $x = \varphi(t,t_0,x_0)$ نشان دهیم آنگاه $\varphi(t_0,x_0)$از کلاس C^k می‌باشد.

در حالت خاص معادلات دیفرانسیل به شکل $\dot{x} = X(x)$ (بافرض $t_0 = 0$) قضیه فوق به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

قضیه ۵ـ فرض کنیم $\dot{x} = X(x)$ یک دستگاه معادلات دیفرانسیل بوده و x روی باز $\Delta \subset I\!R^n$ از کلاس C^k و $k \geq 1$ باشد. آنگاه

$$\forall x_1 \in \Delta \ , \ \exists \xi > 0, \exists \ \ x_1 \text{ از } U \text{ همسایگی} \ , U \subset \Delta$$

بطوریکه برای هر $x_0 \in U$ یک جواب یکتای $x = \varphi(t)$ با فرض $x_0 = \varphi(0)$ وجود دارد که به ازاء هر t به شرط $|t| < \xi$ تعریف می‌شود. به‌علاوه اگر $x_0 = \varphi(0)$ را توسط عبارت $x = \varphi(t,x_0)$ نشان دهیم آنگاه $x = \varphi(t,x_0)$ از کلاس C^k می‌باشد.

۳.۶ § گروه موضعی یک پارامتری از دیفئومورفیسم‌های موضعی وابسته به یک میدان برداری در $I\!R^n$[۱]

در این بخش ابتدا به قضیه‌ای موسوم به قضیه شار موضعی[۲] می‌پردازیم که برای اثبات آن از

---

۱ *one parameter local group of diffeomorphismes associated to (groupe local á un parametre)*

۲ *local flow (flot local)*

نتایج بخش قبل استفاده می‌نمائیم. سپس با استفاده از این قضیه گروه موضعی یک پارامتری در $I\!R^n$ را که نقش مهمی در هندسه ایفا می‌نماید تعریف نموده آنرا برای منیفلدها تعمیم می‌دهیم. در ادامه بحث خواهیم‌دید که هر گروه موضعی روی منیفلد M یک میدان برداری روی M تعریف می‌کند و برعکس هر میدان برداری روی M یک گروه موضعی روی M تولید می‌نماید.

قضیه شار موضعی روی $I\!R^n$

فرض کنیم X یک میدان برداری از کلاس $C^k(k \geq ۱)$ روی Δ بازی از $I\!R^n$ باشد آنگاه به ازاء هر $x_۰$ از Δ عددی مثبت مانند ξ، بازی حول $x_۰$ مانند U در Δ و یک خانواده یکتا از دیفئومورفیسم‌های C^k مانند $\{\varphi_t\}$ وجود دارد بطوریکه

$$\varphi_t : U \to \varphi_t(U) \subset \Delta$$

و φ_t به ازاء $|t| < \xi$ در شرایط زیر صدق می‌کند.

۱ـ نگاشت φ از کلاس C^k است.

$$\begin{aligned} \varphi :]-\xi, \xi[\times U &\longrightarrow \Delta \\ (t, x) &\mapsto \varphi_t(x) \end{aligned}$$

۲ـ
$$\begin{cases} \varphi_۰ &= Id \\ \varphi_{s+t} &= \varphi_s \circ \varphi_t \end{cases}$$

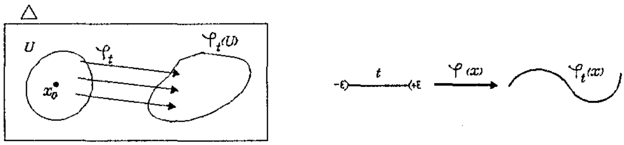
(به شرط آنکه $|t| < \xi$ و $|s| < \xi$ و $|s+t| < \xi$)

۳ـ اگر $x \in U$ آنگاه $X(x)$ بردار سرعت منحنی زیر است.

$$\varphi_{(x)} : t \to \varphi_t(x)$$

$$X_{(x)} = \frac{d}{dt}\varphi_t(x)|_{t=۰}$$

به نمودار زیر توجه کنید.



شکل ۶.۷: دامنه و برد توابع $\varphi(x)$ و φ_t

اثبات: قضیه ۵ در بخش یادآوری معادلات دیفرانسیل را برای دستگاه معادلات $\dot{x} = X(x)$ بکار می‌بریم. با استفاده از نمادگذاری های این قضیه قرار می‌دهیم.

$$\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$$

(x_1 در قضیه فوق را در اینجا با x_0 نشان می‌دهیم)

شرایط ۱ و ۳ براحتی بررسی می‌شود (شرط ۱ مستقیماً برقرار است و شرط ۳ چون $\varphi_t(x)$ جواب معادله $\frac{dx}{dt} = X(x)$ می‌باشد برقرار است.)

شرط ۲ را بررسی می‌کنیم

$$\varphi_s \circ \varphi_t(x) = \varphi_s(\varphi_t(x)) = \varphi_s(\varphi(t, x)) = \varphi(s, \varphi(t, x))$$

با استفاده از نتیجه قضیه وجود و یکتایی جواب معادلات دیفرانسیل در بخش قبل داریم

$$\varphi(s, \varphi(t, x)) = \varphi(s + t, x) = \varphi_{s+t}(x)$$

لذا $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}$ که از اینجا نتیجه می شود $\varphi_0(\varphi_t) = \varphi_t(\varphi_0) = \varphi_t$ بنابراین $\varphi_0 = Id$ از طرف دیگر اگر $|t| < \xi$ باشد از رابطه فوق نتیجه می‌شود

$$\varphi_t \circ \varphi_{-t} = \varphi_0 = Id = \varphi_{-t} \circ \varphi_t$$

و در نتیجه $(\varphi_t)^{-1} = (\varphi_{-t})$ لذا φ_t دوسویی است. □

حال با استفاده از مفروضات قضیه فوق تعریف زیر را می‌آوریم.

تعریف: *خانواده $\{\varphi_t\}$ از دیفئومورفیسم‌های موضعی را **گروه موضعی یک پارامتری** تولید شده توسط میدان برداری X می‌نامیم. نگاشت φ*

$$\varphi :]-\xi, \xi[\times U \to \Delta$$

را شار موضعی[۱] میدان X می‌گویند. اگر x_1 نقطه ثابتی از U باشد منحنی $t \to \varphi_t(x_1)$، را مدار[۲] x_1 می‌نامیم.

در تعریف فوق کلمه "موضعی" اشاره به دو موضوع دارد. اول اینکه دیفئومورفیسم‌های φ_t فقط برای tهای متعلق به بازه کوچک $(-\xi, \xi)$ تعریف می‌شوند. دوم اینکه دیفئومورفیسم‌های فوق بطور موضعی در روی باز $U \subset \Delta$ تعریف می‌گردند.

در این تعریف عبارت "گروه یک پارامتری" دلالت بر این موضوع دارد که نگاشت‌های $t \to \varphi_t$ با توجه به شرط ۲ قسمتی از گروه جمعی حقیقی با دیفئومورفیسم‌های موضعی روی Δ را نمایش می‌دهند.

موضوع دیگری که از شرط ۲ باید بخاطر داشت آن است که برای هر $x \in U$ داریم،

$$\varphi_0(x) = x$$

تعریف: *میدان برداری X را* **مولد بینهایت کوچک**[۳] *گروه $\{\varphi_t\}$ یا* **تبدیل بینهایت کوچک**[۴] *می‌نامند. اگر دیفئومورفیسم‌های این گروه موضعی نگاشت‌های همدیس باشند آنگاه میدان برداری X را* **تبدیل بینهایت کوچک همدیس**[۵] *یا* **میدان برداری همدیس**[۶] *می‌گوئیم.*

شرط ۳ در قضیه فوق بیان می‌دارد که X_{x_1} بر مدار x_1 (در نقطه x_1) مماس می‌باشد. اما می‌توان این خاصیت را به‌صورت کامل‌تری نیز بیان کرد.

---

[۱] *local flow*

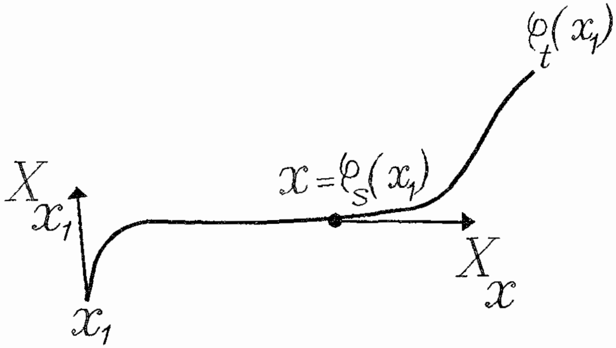
[۲] *Orbite*

[۳] *Infinitesimal generator*

[۴] *Infinitesimal transformations*

[۵] *Infinitesimal Conformal transformation*

[۶] *Conformal vector field (Champs de vecteurs conforme)*



شکل ۶.۸: میدان برداری X در هر نقطه بر مدار x_1 مماس است.

گزاره: فرض کنیم $x_۱ \in U$ آنگاه میدان‌برداری X در تمام نقاط بر مدار $x_۱$ مماس است. به عبارت دیگر

$$X_{\varphi_s(x_۱)} = \frac{d}{dt}\varphi_t(x_۱)|_{t=s}$$

اثبات: فرض کنیم $x = \varphi_s(x_۱)$ داریم

$$X_{\varphi_s(x_۱)} = \frac{d}{dt}\varphi_t \circ \varphi_s(x_۱)|_{t=۰} = \frac{d}{dt}\varphi_{t+s}(x_۱)|_{t=۰}$$

با فرض $u = t + s$ داریم

$$= \frac{d}{du}\varphi_u(x_۱)|_{u=s}$$

که با جایگذاری t بجای u داریم

$$X_{\varphi_s(x_۱)} = \frac{d}{dt}\varphi_t(x_۱)|_{t=s}$$

لذا حکم ثابت می‌شود. □

نتیجه: مدارهای شار عبارتند از منحنی‌های انتگرال میدان X.

(یعنی منحنی‌هایی که در هر نقطه بردار سرعت آنها برابر X است)

مثال ۱: فرض کنیم $\dot{x} = Ax$ که در آن A یک عدد حقیقی است، یک دستگاه معادلات خطی با ضرایب ثابت باشد.

جواب معادله فوق عبارت است از $\varphi_t(x_\circ) = e^{At}(x_\circ)$ که یک گروه موضعی یک پارامتری از دیفئومورفیسم‌ها می‌باشد که مدارهای آن خطوط راست گذرنده از مرکز هستند. زیرا اگر قرار دهیم

$$\varphi_t(x_\circ^1, \cdots, x_\circ^n) = (e^{At}x_\circ^1, \cdots, e^{At}x_\circ^n)$$

با فرض

$$(e^{At}x_\circ^1, \cdots, e^{At}x_\circ^n) = (x^1, \cdots, x^n)$$

و با حذف e^{At} از n رابطه اخیر داریم : $\dfrac{x^1}{x_\circ^1} = \cdots = \dfrac{x^n}{x_\circ^n}$ که معادله یک خط راست، مار بر مرکز، در $\mathbb{R}^n$ می‌باشد.

تذکر: دیدیم یک گروه موضعی یک پارامتری $\{\varphi_t\}$ از دیفئومورفیسم‌ها به ازاء $|t| < \xi$ و در روی یک همسایگی $x_\circ$ تعریف می‌شود. اگر $\{\varphi_t\}$ به ازاء هر $x_\circ \in \mathbb{R}^n$ و هر $t \in \mathbb{R}$ تعریف شود آنگاه آنرا **گروه سرتاسری یک پارامتری**[1] نیز می‌گوئیم.

مثال ۲ : مختصات (x, y) را روی $\mathbb{R}^2$ در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $X = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$ یک میدان برداری روی $\mathbb{R}^2$ باشد. گروه موضعی یک پارامتری و مدار آنرا تعیین می‌کنیم. برای مشخص نمودن φ_t باید یک دستگاه معادلات دیفرانسیل بدست آورده جوابهای آن را محاسبه نمود. مشابه مثال مذکور در 1§ از همین فصل معادله دیفرانسیل $\dfrac{d}{dt} = X$ را در نظر می‌گیریم بنابراین معادله دیفرانسیل زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = x \\ \dfrac{dy}{dt} & = y \end{cases}$$

جوابهای معادله عبارتند از $x = Ae^t \quad , \quad y = Be^t$

جواب مربوط به شرط اولیه $t = \circ$ را $(x_\circ, y_\circ)$ می‌نامیم. داریم $x = x_\circ e^t$ و $y = y_\circ e^t$

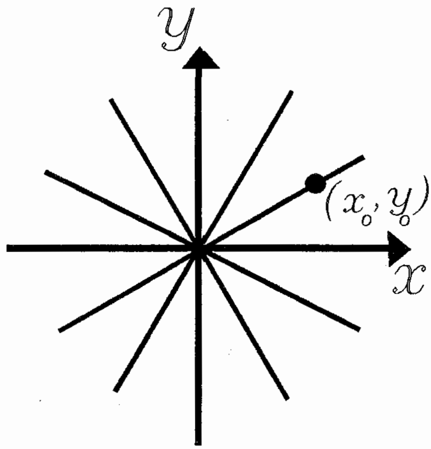
بنابراین گروه موضعی یک پارامتری آن عبارت است از

$$\varphi_t((x_\circ, y_\circ)) = (x_\circ e^t, y_\circ e^t) \qquad \varphi_t(x, y) = e^t(x, y)$$

---

[1] *one parameter global group*

مدار $(x_\circ, y_\circ)$ عبارت است از نیم-خطی که از نقطه $(x_\circ, y_\circ)$ و مبداء می گذرد.
(نگاشت $t \to \varphi_t(x_\circ, y_\circ)$ در نقطه $(x_\circ, y_\circ)$ یک خط راست است زیرا اگر $x = x_\circ e^t$ و $y = y_\circ e^t$ باشد با حذف e^t داریم $y = \frac{y_\circ}{x_\circ}x$ که معادله خط راستی است که از $(x_\circ, y_\circ)$ ومبداء می‌گذرد)



شکل ۶.۹: مدارهای میدان برداری X

مثال ۳: فرض کنیم روی $I\!R^۲$، $X = -y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$ یک میدان برداری باشد. برای بدست آوردن φ_t، گروه موضعی یک پارامتری وابسته به آن باید دستگاه زیر را حل نمائیم

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

جواب در شرایط اولیه

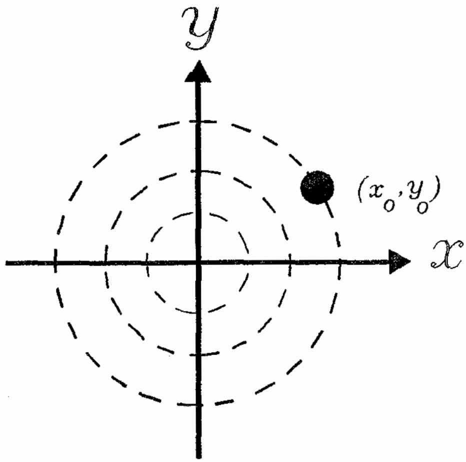
$$\begin{cases} x(\circ) = x_\circ \\ y(\circ) = y_\circ \end{cases}$$

عبارت است از

$$\begin{cases} x = x_\circ \cos t - y_\circ \sin t \\ y = x_\circ \sin t + y_\circ \cos t \end{cases}$$

یا $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\circ \\ y_\circ \end{pmatrix}$ در نتیجه $\varphi_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ که ماتریس دوران به اندازه زاویه t می‌باشد، گروه موضعی یک پارامتری وابسته به میدان برداری X است.

مدارهای مربوط به این میدان برداری عبارت است از دوایری حول مبداء مختصات.



شکل ۶.۱۰: مدارهای میدان برداری X

توجه: در هر سه مثال بالا φ_t به ازاء هر t در روی تمام نقاط $x \in I\!R^n$ تعریف می‌شود. بنابراین در هر مثال یک گروه یک پارامتری سرتاسری تعریف شد. اما باید توجه داشت که در حالت کلی $\{\varphi_t\}$ یک گروه موضعی از دیفئومورفیسم‌های موضعی می‌باشد. (یعنی φ_t به ازاء هر t تعریف نمی‌شود و به‌علاوه روی تمام $I\!R^n$ عمل نمی‌کند بلکه در روی بازهای کوچک عمل می‌کند.)

مثال ۴: روی $I\!R^۲$ مختصات (x, y) و میدان برداری $X = \frac{۱}{e^x}\frac{\partial}{\partial x}$ را در نظر می‌گیریم برای بدست آوردن φ_t دستگاه زیر را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{۱}{e^x} \\ \dfrac{dy}{dt} = \circ \end{cases}$$

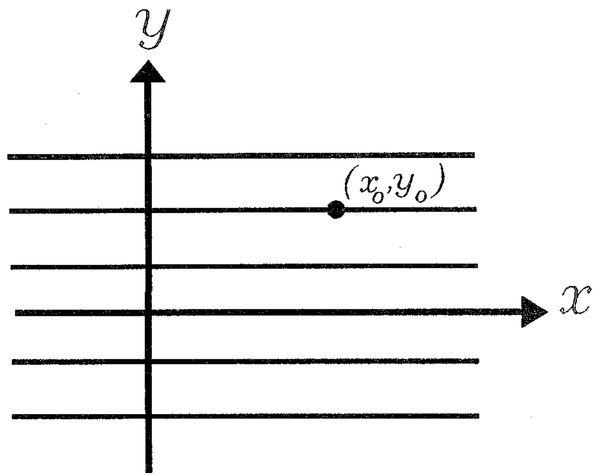
با فرض شرایط اولیه $\begin{cases} x(\circ) = x_\circ \\ y(\circ) = y_\circ \end{cases}$ که فقط به ازاء $t > -e^{x_\circ}$ تعریف می‌شود،

جواب‌ها به‌صورت زیر می‌باشند.

$$\begin{cases} x = \ln(t + e^{x_\circ}) \\ y = y_\circ \end{cases}$$

مدارهای مربوط به این میدان عبارتند از خطوط موازی محور xهاو مدار $(x_\circ, y_\circ)$ خطی است که ازاین نقطه می‌گذرد.

$$\varphi_t(x_\circ, y_\circ) = (\ln(t + e^{x_\circ}), y_\circ)$$



شکل ۶.۱۱: مدارهای میدان X

تعریف: میدان برداری X را کامل[۱] گوئیم اگر گروه یک پارامتری وابسته به آن به ازاء هر $t \in I\!R$ تعریف شود.

از قضیه ۲ بخش قبل (قضیه وجود جواب کلی و توسعه جوابهایی که مسیر آنها در یک مجموعه فشرده قرار دارند) براحتی می‌توان گزاره زیر را نتیجه گرفت.

گزاره: اگر $suppX$ فشرده باشد میدان برداری X کامل است. در اینجا

$$Supp\ X = \overline{\{x \in I\!R^n | X_x \neq \circ\}}$$

---

[۱] *Complet vector field (Champ des vecteurs complet)*

اثبات: اگر x_0 نقطه‌ای باشد که در آن نقطه X صفر شود مداری که از آن می‌گذرد به نقطه x_0 کاهش پیدا می‌کند. (اگر $X_{x_0} = 0$ باشد جواب $x(t) = x_0$ است) به این صورت همه مدارها در زیر مجموعه‌های فشرده قرار می گیرند. حال با استفاده از نتیجه قضیه ۲ در بخش قبل جواب معادله را می‌توان روی تمام $I\!R$ توسعه داد. لذا بنابر تعریف میدان X کامل است. □

تعریف: نقطه $x_0 \in I\!R^n$ را **نقطه تکین**[1] میدان X گوئیم اگر $X_{x_0} = 0$ (توجه کنید که این مفهوم با مفهوم نقطه منفرد در مشتق گیری و غیره متفاوت است. در اینجا X از کلاس C^1 است)

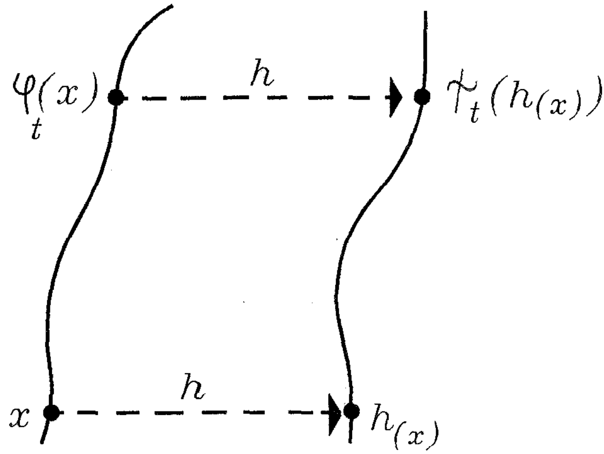
همانطوریکه متذکر شدیم: x_0 یک نقطه منفرد X است $\Leftrightarrow$ $\{x_0\}$ یک مسیر است (یا یک نقطه شار می‌باشد) در مثال‌های ۱ و ۲ مبداء مختصات یک نقطه منفرد X است. (این دلیلی است بر اینکه چرا در مثال ۱ از مبداء تعداد زیادی مسیر می‌گذرد اگر چه می‌دانیم که هرگز مسیرها نباید یکدیگر را قطع کنند. در حقیقت مبداء یک مسیر است وهر نیم‌ـخط نیز یک مسیر می‌باشد)

در خاتمه یادآور می‌شویم که بنابر یکتایی شار، **ارائه یک میدان X معادل ارائه یک شار می‌باشد.** بنابراین با ارائه یک گروه موضعی از دیفئومورفیسم‌های موضعی (که در شرایط ۱ و ۲ قضیه شار صدق می کند) **یک و تنها یک میدان برداری X وابسته به این گروه وجود دارد** که این میدان برداری توسط شرط ۳ قضیه شار تعریف می‌شود.

تعریف: فرض کنیم X, Y دو میدان برداری به ترتیب روی بازهای U و V از $I\!R^n$ باشند می‌گوئیم X, Y ـC^∞**هم ارز** هستند اگر دیفئومورفیسمی مانند $h : U \to V$ موجود باشد که شارها را تعویض نماید. به عبارت دیگر اگر φ_t و ψ_t شارهای X و Y باشند داشته باشیم

$$ho\varphi_t = \psi_t oh$$

[1] *Singular point (Point sinqulier)*



شکل ۶.۱۲: منحنی‌های انتگرال دو میدان هم‌ارز

یا بطور معادل h منحنی‌های انتگرال X را به منحنی‌های انتگرال Y ببرد.

گزاره: فرض کنیم $X \in \mathcal{X}(U)$ و $Y \in \mathcal{X}(V)$. آنگاه Y, X ‏C^∞ـ‌هم‌ارز می‌باشند اگر وتنها اگر یک دیفئومورفیسم C^∞، $h : U \to V$ موجود باشد بطوریکه

$$h_* X = Y$$

اثبات: یادآوری می‌کنیم که اگر h یک دیفئومورفیسم از U در V باشد آنگاه بنابر تعریف داریم

$$h_* : \mathcal{X}(U) \to \mathcal{X}(V)$$

$$(h_* X)_y = (h_*)_{h^{-1}(y)} X_{h^{-1}(y)}$$

حال برای شارها داریم

$$(h_*)_x X_x = \frac{d}{dt}(h \circ \varphi_t)(x)|_{t=0}$$

$$(h_* X)_y = \frac{d}{dt}(h \circ \varphi_t \circ h^{-1}(y))|_{t=0}$$

اگر ψ_t شار وابسته به Y باشد داریم

$$Y_y = \frac{d}{dt}\psi_t(y)|_{t=\circ}$$

با توجه به روابط بالا داریم.

$$h \circ \varphi_t \circ h^{-۱} = \psi_t \Rightarrow h_* X = Y$$

□

تذکر: بیان آنکه X_q بردار سرعت منحنی $t \to \varphi_t(q)$ (برای $t = \circ$)است به آن معنی است که می‌توان نوشت

$$X_q = [\frac{d\varphi_t(q)}{dt}]_{t=\circ}$$

یا به عبارت دیگر اگر f تابعی حقیقی روی M باشد رابطه بالا به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\boxed{(X \cdot f)_q = \lim_{t\to\circ} \tfrac{۱}{t}[f \circ \varphi_t(q) - f(q)]}$$

تمرین

۱ ـ نشان دهید روی $I\!R^۲$ ، $\varphi_t(x,y) = (\frac{x}{۱-tx}, \frac{y}{۱-tx})$ یک گروه موضعی یک پارامتری است و میدان برداری وابسته به آن عبارت است از

$$X = x^۲\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}$$

آیا X کامل است؟

۲ ـ اگر در دستگاه معادلات $\dot{x} = Ax$، A یک ماتریس حقیقی $n \times n$ باشد گروه موضعی یک پارامتری و مدارهای آنرا تعیین کنید. آیا این گروه سرتاسری نیز هست؟

راهنمایی: برای A ماتریس حقیقی $n \times n$ تعریف می‌کنیم:

$$e^{At} = I + tA + \frac{t^۲A^۲}{۲!} + \frac{t^۳A^۳}{۳!} + \cdots$$

۴.۶ § گروه موضعی یک پارامتری وابسته به یک میدان برداری روی یک منیفلد

نتایج بخش قبل روی $I\!R^n$ را می‌توان براحتی بر روی یک منیفلد انتقال داد. یادآوری می‌کنیم که منحنی $C(t)$ از کلاس C^k روی منیفلد M عبارت است از نگاشت C^k زیر

$$C : I \to M$$

در اینجا I فاصله بازی از $I\!R$ است که می‌توان فرض نمود $I =]-\xi, \xi[$، C' بردار سرعت منحنی C را می‌توان با استفاده از نمودار زیر تعریف نمود

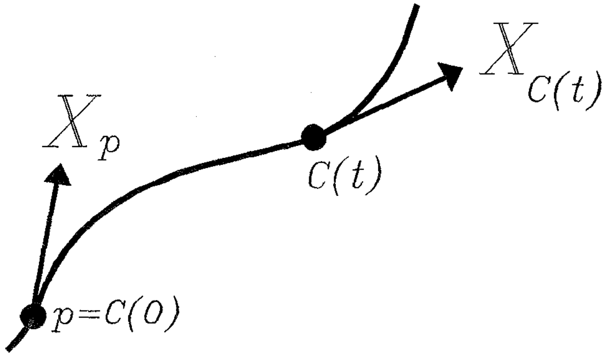
$$\begin{array}{cccc} & TI & \xrightarrow{C_*} & TM \\ \frac{d}{dt} & \uparrow & \overset{C'}{\nearrow} & \uparrow X \\ & I & \xrightarrow{C} & M \end{array} \qquad \begin{array}{l} C' : I \to TM \\ C' = C_* \circ \dfrac{d}{dt} \end{array}$$

C' را توسط $\dot{C}$ یا $\dfrac{dC}{dt}$ نیز نمایش می‌دهیم.

قبلاً دیدیم که اگر X یک میدان برداری روی M باشد، منحنی انتگرال میدان برداری X، گذرنده از نقطه p عبارت است از منحنی C روی M بطوریکه

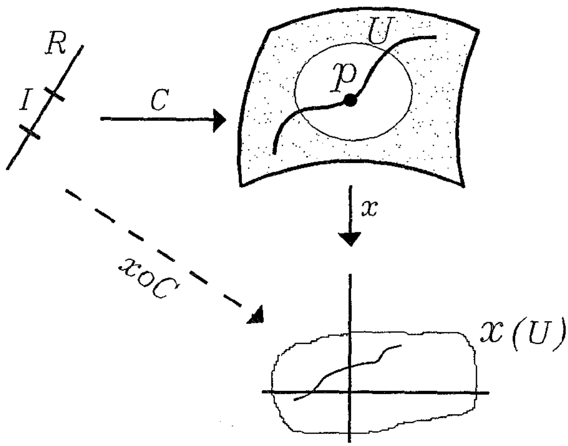
$$\begin{cases} \dfrac{dC}{dt} = X_{C(t)} \\ C(\circ) = p \end{cases}$$

(به عبارت دیگر X عبارت است از سرعت منحنی C در هر نقطه و در نتیجه، در هر نقطه بر منحنی C مماس است.) شکل ۶.۱۳ الف را ببینید.



(الف)

شکل ۶.۱۳: منحنی انتگرال میدان برداری X



(ب)

شکل ۶.۱۴: تصویر منحنی انتگرال میدان X توسط کارت X

با استفاده از یک کارت موضعی (x, U) در همسایگی p داریم (شکل ۶.۱۴ (ب) را ببینید)

$$x \circ C : I \to x(U) \subset I\!R^n$$

که یک منحنی در $I\!R^n$ است.

$$(x \circ C)(t) = (C^{۱}(t), \cdots, C^n(t))$$

داریم

$$(\frac{dC}{dt})_{t=s} = \sum_i (\frac{dC^i}{dt})_{t=s} (\frac{\partial}{\partial x^i})_{C(s)}$$

اگر داشته باشیم $X \underset{U}{=} \sum X^i(x^1, \cdots, x^n)\frac{\partial}{\partial x^i}$ معادله $X_{c(s)} = \frac{dC}{ds}$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$(\frac{dC^i}{dt})_{t=s} = X^i(C^1(s), \cdots, C^n(s))$$

بنابراین منحنی‌های انتگرال X (که تصویر آن در یک کارت قرار دارد) با حل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل درجه اول بدست می‌آید.

با توجه به توضیحات بالا قضیه شار موضعی روی $I\!R^n$ براحتی بر روی منیفلدها قابل تعمیم است.

قضیه شار موضعی روی منیفلدها

فرض کنیم $X \in \mathcal{X}(M)$ از کلاس C^k و $k \geq 1$ باشد. آنگاه برای هر $p \in M$، یک باز U شامل p، یک $\xi > 0$ و یک مجموعه یکتا از دیفئومورفیسم‌ها $\{\varphi_t\}$

$$\varphi_t : U \to \varphi_t(U) \subset M$$

که به ازاء $|t| < \xi$ تعریف می‌شود وجود دارد که در شرایط زیرصدق می‌کند.

$$\begin{aligned} \varphi :]-\xi, \xi[\times U &\to M \\ (t, x) &\to \varphi_t(x) \end{aligned}$$

$I)$ φ از کلاس C^k باشد.

$II)$ اگر $|t| < \xi$ و $|s| < \xi$ و $|t+s| < \xi$

$$\begin{cases} \varphi_0 &= Id \\ \varphi_{t+s} &= \varphi_t \circ \varphi_s \end{cases}$$

$III)$ اگر $q \in U$، $X_q = [\frac{d}{dt}\varphi_t(q)]_{t=0}$.

خانواده $\{\varphi_t\}$ را گروه موضعی یک پارامتری وابسته به X می‌نامیم.

اثبات: فرض کنیم $p \in M$ و (x, U) یک دستگاه مختصات موضعی در همسایگی p باشد با تحدید به U می‌توان فرض نمود که $x(U)$ یک باز از $I\!R^n$ باشد و سپس از قضیه شار موضعی در $I\!R^n$ استفاده نمود.

$$x(U) \subset \Delta$$

بنابراین یک گروه موضعی یک پارامتری $\{\psi_t\}$ موجود است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\psi :]-\xi, \xi[\times x(U) \to I\!R^n$$

با فرض $\varphi_t = x^{-1} \circ \psi_t \circ x$ یک خانواده از دیفئومورفیسم های موضعی روی M بدست می‌آید. به این صورت نتایج بدست آمده روی $I\!R^n$ براحتی قابل تعمیم روی M است. □

تعاریف ونتایج بیان شده روی $I\!R^n$ براحتی قابل انتقال روی M است.

۱ـ اگر $x_0 \in M$، منحنی $t \to \varphi_t(x_0)$ را مدار x_0 برای شار φ می‌نامیم.

۲ـ مدارهای شار عبارتند از منحنی‌های انتگرال میدان X روی M.

$$X_{x_0} = 0 \Leftrightarrow \{x_0\} \text{ یک مدار باشد (یعنی نقطه ثابت شار باشد)}$$

۳ـ یک میدان برداری روی M را کامل[1] گوئیم اگر شار آن به ازاء هر $t \in I\!R$ تعریف شود.

۴ـ اگر $suppX$ فشرده باشد میدان برداری X روی M کامل است.

۵ـ هر میدان برداری روی M مبین یک گروه موضعی یک پارامتری روی M است و برعکس.

با استفاده از قضایای بالا می توان نشان داد .

۶ـ اگر M فشرده باشد هر گروه موضعی روی M یک گروه سرتاسری تعریف می‌نماید.

به عبارت دیگر گزاره زیر را داریم.

گزاره:[2] **اگر منیفلد M فشرده باشد، هر میدان برداری X روی آن کامل است.**

---

[1] *Complet vector field (Champ des vecteurs complet)*

[2] (*Kobayashi&Nomizu* جلد اول صفحه ۱۴ یا جلد اول *Spivak* صفحه ۲۰۵)

اثبات: البته این گزاره از (۴) است امّا اثبات مستقیم آنِ نیز به شکل زیر است. به ازاء هر نقطه $p \in M$، فرض کنیم $U(p)$ یک همسایگی p و $\xi(p)$ یک عدد مثبت و I_ξ بازه باز $]-\xi, \xi[$ باشد. میدان برداری X یک گروه موضعی یک پارامتری از تبدیلات موضعی φ_t روی $I_{\xi(p)} \times U_{(p)}$ تولید می‌کند. چون M فشرده است، پوشش باز $\{U_{(p)}; p \in M\}$ دارای یک زیر پوشش متناهی $\{U_{(p_i)}; i = 1, \cdots, k\}$ می‌باشد. فرض کنیم

$$\xi = min\{\xi(p_1), \cdots, \xi(p_k)\}$$

به وضوح مشاهده می‌شود که $\varphi_t(p)$ در روی $I_\xi \times M$ تعریف شده و می‌توان آنرا روی $\mathbb{R} \times M$ توسعه داد. (برای توضیحات بیشتر به دومین مرجع فوق‌الذکر در پاورقی مراجعه کنید.) لذا بنابر تعریف X کامل است. $\square$

۵.۶ § قضیه باز سازی یک میدان برداری[1]

قضیه‌ای که در اینجا می‌آوریم را می‌توان به عنوان **قضیه اساسی نظریه معادلات دیفرانسیل درجه اول** در نظر گرفت. این قضیه اظهار می‌دارد که در همسایگی تمام نقاط غیر منفرد X می‌توان یک دستگاه مختصات موضعی مانند (x, U) روی M طوری پیدا نمود که در آن مختصات، دستگاه معادلات دیفرانسیل درجه اول موردنظر به‌صورت زیر نوشته شود.

$$\dot{x}_1 = 1, \quad \dot{x}_2 = 0, \cdots, \dot{x}_n = 0$$

یعنی در همسایگی U داریم $X \underset{U}{=} \dfrac{\partial}{\partial x_1}$

کاربرد این قضیه واضح است:

هر قضیه موضعی یا ذاتی (ذاتی یعنی صورت قضیه به انتخاب دستگاه مختصات بستگی نداشته باشد) در مورد یک دستگاه معادلات دیفرانسیل را می‌توان با استفاده از مختصات فوق براحتی اثبات نمود. در چنین حالتی غالباً اثبات قضایا بسیار ساده می‌شوند.

قضیه باز سازی: (قضیه اساسی نظریه معادلات دیفرانسیل درجه اول) فرض کنیم X یک

---

[1] *Theorem of redressing a vector field(Theorem de redressement d'un champ de vecteurs)*

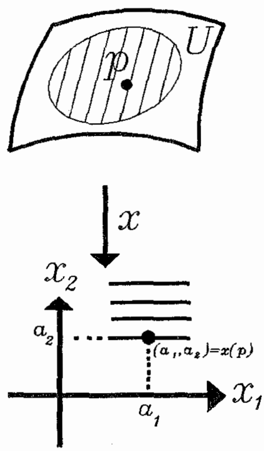
میدان برداری C^k روی M بوده $(k \geq 1)$ و $p \in M$ یک نقطه غیرمنفرد برای X باشد (یعنی $X_p \neq 0$). آنگاه یک دستگاه مختصات موضعی (x, U) در همسایگی p وجود دارد بطوریکه

$$X \underset{U}{=} \frac{\partial}{\partial x_1}$$

تعبیر قضیه: تعبیر این قضیه آن است که در این دستگاه مختصات موضعی شار X از حل دستگاه زیر حاصل می‌شود $\dot{x}_1 = 1, \dot{x}_2 = 0, \cdots, \dot{x}_n = 0$.

بنابراین توسط رابطه زیر شار X بدست می‌آید. (مدار گذرنده از نقطه $(a_1, \cdots, a_n)$)

$$\begin{cases} x_1 &= t + a_1 \\ x_2 &= a_2 \\ &\vdots \\ x_n &= a_n \end{cases}$$



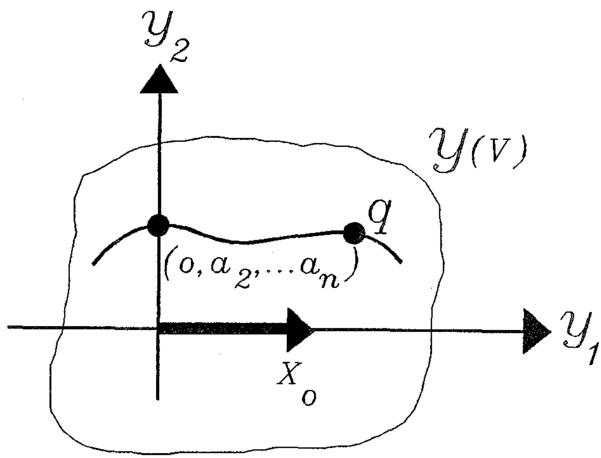
شکل ۶.۱۵:

اثبات قضیه بازسازی: ابتدا کارت (y, V) را در همسایگی p طوری اختیار می‌کنیم که $y(p) = 0$ و تعریف می‌کنیم $X_0 \underset{V}{=} (\frac{\partial}{\partial y_1})_0$. حال مختصات جدیدی به‌صورت زیر می‌سازیم. نقطه $(0, a_2, \cdots, a_n) \in y(V)$ را در نظر می‌گیریم. از این نقطه یک منحنی یکتای انتگرال میدان X_V می‌گذرد. (به شکل زیر توجه فرمائید). اگر q به این منحنی تعلق داشته باشد به عنوان مختصات جدید q مختصات $(t, a_2, \cdots, a_n)$ را در نظر می‌گیریم در اینجا t فاصله لازم روی منحنی انتگرال میدان X گذرنده از q، از نقطه $(0, a_2, \cdots, a_n)$ تا q می‌باشد. به عبارت دیگر φ_t شار میدان X_V را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم

$$\begin{aligned} \tilde{h} : y(V) &\to \mathbb{R}^n \\ (a_1, \cdots, a_n) &\to \varphi_{a_1}(0, a_2, \cdots, a_n) \end{aligned}$$

($\tilde{h}$ نگاشت معکوس نگاشت تغییر کارت است). ابتدا نشان می‌دهیم $(\tilde{h}_*)_\circ = Id$ برای اینکار ژاکوبین $(\frac{\partial \tilde{h}^i}{\partial y^j})_\circ$ را محاسبه می‌کنیم. برای $j > ۱$ داریم

$$(\frac{\partial \tilde{h}^i}{\partial y^j})_\circ = \lim_{\xi \to \circ} \frac{\tilde{h}^i(\circ, \cdots, \xi, \cdots, \circ) - \tilde{h}^i(\circ, \cdots \circ)}{\xi}$$
$$= \lim_{\xi \to \circ} \frac{\varphi^i_\circ(\circ, \cdots, \xi, \cdots, \circ) - \varphi^i_\circ(\circ, \cdots, \circ)}{\xi}$$



شکل ۶.۱۶:

در اینجا ξ مولفه jام می‌باشد. بنابراین $\varphi_\circ = Id$ در نتیجه

$$\varphi^i_\circ(\circ, \cdots, \xi, \cdots \circ) = (\circ \cdots, \xi, \cdots \circ)^i = \delta^i_j \xi$$

پس برای $j > ۱$ داریم

$$(\frac{\partial \tilde{h}^i}{\partial y^j})_\circ = \lim_{\xi \to \circ} \frac{\delta^i_j \xi - \circ}{\xi} = \delta^i_j$$

برای $j = ۱$ داریم

$$(\frac{\partial \tilde{h}^i}{\partial y^۱})_\circ = \lim_{\xi \to \circ} \frac{\tilde{h}^i(\xi, \circ, \cdots, \circ) - \tilde{h}^i(\circ, \cdots, \circ)}{\xi}$$
$$= \lim_{\xi \to \circ} \frac{\varphi^i_\xi(\circ)}{\xi} = [\frac{d}{dt} \varphi^i_t(\circ)]_{t=\circ} \qquad = (X^i)_\circ = \delta^i_۱$$

در نتیجه

$$(\tilde{h}_*)_\circ = Id$$

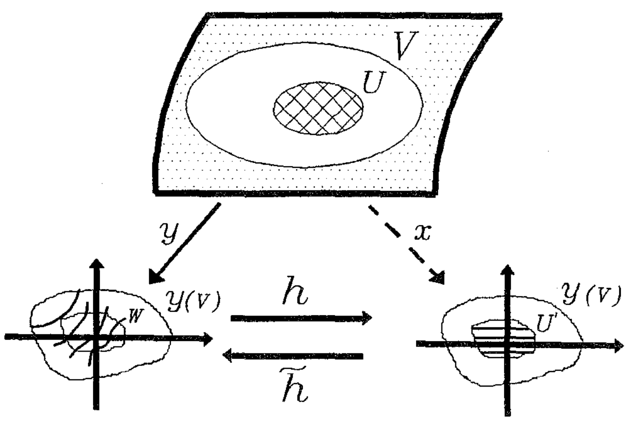
در نتیجه $\tilde{h}$ در همسایگی صفر معکوس پذیراست. بنابراین یک همسایگی U' از صفر وجود دارد $U' \subset y(V)$ که روی آن $\tilde{h}$ معکوس پذیر است. لذا نگاشت زیر یک دیفئومورفیسم می‌باشد.

$$\tilde{h}|_{U'} : U' \to W$$

(W همسایگی صفر در $y(V)$ است)

قرار می‌دهیم $h = (\tilde{h}|_{U'})^{-۱}$ و $h : W \to U'$ حال h_*X را محاسبه می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned}(h_*X)_b &= \frac{d}{dt}(h \circ \varphi_t \circ h^{-۱})(b)|_{t=\circ} \\ &= \frac{d}{dt}(h \circ \varphi_t \circ \tilde{h})(b_۱ \cdots b_n)|_{t=\circ} = \frac{d}{dt} h \circ \varphi_t \circ \varphi_{b_۱}(\circ, b_۲, \cdots, b_n)|_{t=} \\ &= \frac{d}{dt}(h \circ \tilde{h}(t + b_۱, b_۲, \cdots, b_n)|_{t=\circ} = \frac{d}{dt}(t + b_۱, b_۲, \cdots, b_n)|_{t=\circ} \\ &= (۱, \circ, \cdots, \circ)\end{aligned}$$



شکل ۶.۱۷:

از اینجا نتیجه می‌شود که اگر ما دستگاه مختصات جدید (x, U) را با فرض $U = y^{-۱}(W)$ و $x = h \circ y$ اختیار کنیم میدان برداری X در این دستگاه مختصات دارای مختصات

$(1, 0, \cdots, 0)$ است و در نتیجه

$$X \underset{U}{=} \frac{\partial}{\partial x_1} \qquad \square$$

۶.۶ § تعریف مشتق لی با استفاده از شار و تعبیر هندسی آن

در بخش ۴§ از فصل پنجم مشتق لی را برای فرم‌ها به عنوان مثالی از یک مشتق‌گیری از درجه صفر بیان نمودیم. در این بخش ابتدا مشتق لی را برای میدان‌های برداری توسط کروشه لی که در بخش ۳§ از فصل دوم با آن آشنا شده‌ایم تعریف می‌کنیم. سپس با استفاده از قضیه بازسازی تعبیر هندسی آنرا بیان نموده تعریف معادل دیگری از مشتق لی میدانهای برداری ذکر خواهیم کرد. در ادامه این بخش بطور مشابه با استفاده مجدد از قضیه بازسازی تعبیر هندسی مشتق لی فرم‌ها را بیان نموده تعریف معادل آن را ارائه می‌نماییم.

تعریف اوّل: *اگر $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ باشد* **مشتق لی میدان برداری** *Y را توسط کروشه دو میدان برداری به صورت زیر تعریف می‌کنیم.*

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$$

از این تعریف نتیجه می‌شود که مشتق لی یک میدان برداری، یک میدان برداری است.

قضیه بازسازی به ما کمک می‌نماید که خواص مهمی از میدان‌های برداری را که قبلا" از راههای پیچده‌تری اثبات شده است براحتی ثابت نمائیم. به عنوان مثال قضیه زیر را می‌آوریم.

قضیه: فرض کنیم $Y \in \mathcal{X}(M)$ و X و φ_t گروه یک پارامتری تولید شده توسط X باشد. آنگاه به ازاء هر نقطه p از M داریم

$$(\mathcal{L}_X Y)_p = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(Y_p - (\varphi_{t*} Y)_p) \overset{\text{تعریف}}{\equiv} -(\frac{d}{dt}(\varphi_{t*} Y)_p)_{t=0}$$

در اینجا فرض شده است

$$(\varphi_{t*} Y)_p = \varphi_{t*} Y_{\varphi_{-t}(p)}$$

اثبات: برای اثبات تساوی فوق (که خاصیت موضعی و ذاتی است) می‌توانیم از قضیه بازسازی استفاده نمائیم. می‌دانیم که در یک دستگاه مختصات موضعی (x, U) کروشه

به‌صورت زیر نوشته می‌شود. (بخش ۳§ از فصل دوم)

$$(I) \qquad [X,Y] = \sum_{i,j=1}^{n} \left(X^i(x) \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i(x) \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

ابتدا فرض کنیم که Y, X هر دو با هم در p صفر نباشند. فرض کنیم $X_p \neq 0$، دستگاه مختصات (x, U) در همسایگی p را طوری در نظر می‌گیریم که شرایط قضیه بازسازی میدان X برقرار گردد.

در این دستگاه فرمول فوق به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$[X,Y]_p = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^1} \right)_p \frac{\partial}{\partial x^j}$$

حال طرف دوم رابطه حکم را محاسبه می نمائیم. بنابر آنچه در تعبیر قضیه بازسازی بیان نمودیم داریم:

$$\varphi_t(x_1, \cdots, x_n) = (t + x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

بنابراین مشتق (ماتریس ژاکوبین) آن عبارت است از $(\varphi_t)_* = I$ داریم

$$(\varphi_{t*}Y)_p^j = (\varphi_{t*})Y^j_{\varphi_{-t}(p)} = Y^j_{\varphi_{-t}(p)} = Y^j_{(p_1 - t, p_2, \cdots, p_n)}$$

از آنجا

چون $\left(\frac{dY^j}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} \right)$ داریم $\frac{d}{dt}(\varphi_{t*}Y)_p^j = - \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^1} \right)_p$

بنابراین

$$\frac{d}{dt}(\varphi_{t*}Y)_p = - \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^1} \right)_p \frac{\partial}{\partial x^j}$$

و در نتیجه با توجه به طرف اول تساوی حکم ثابت می‌شود.

$$(\mathcal{L}_X Y)_p = [X,Y]_p = -[\frac{d}{dt}(\varphi_{t*}Y)_p]_{t=0}$$

حال فرض کنیم $X_p = Y_p = 0$ از رابطه (I) داریم

$$[X, Y]_p = 0$$

از طرف دیگر چون $X_p = 0$، مدار جوابی که از p می‌گذرد به p کاهش می‌یابد. یعنی

$$\varphi_t(p) = p$$

$$(\varphi_{t*}Y)_p = (\varphi_t)_{*p} Y_p = (\varphi_t)_{*p} 0 = 0$$

از آنجا $\quad \frac{d}{dt}(\varphi_{t*}Y)_p = 0$ و اثبات قضیه کامل می‌شود. $\square$

تعبیر هندسی مشتق لی $\mathcal{L}_X Y$

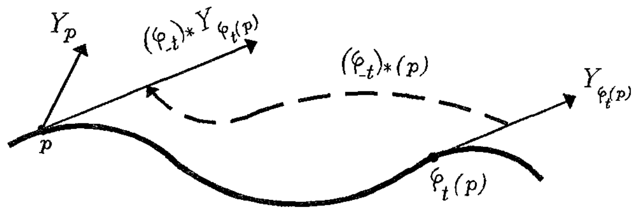
فرض کنیم می‌خواهیم تغییرات میدان برداری Y را در طول منحنی انتگرال میدان برداری X ارزیابی کنیم. برای انجام این کار لازم است که میدان برداری Y را در دو نقطه متفاوت از این منحنی مثلاً p و $\phi_t(p)$ با یکدیگر مقایسه نماییم. اما این کار عملی نیست زیرا Y_p و $Y_{\phi_t(p)}$ به ترتیب متعلق به T_pM و $T_{\phi_t(p)}M$ هستند و ما نمی‌توانیم دو بردار از دو فضای برداری متفاوت را با یکدیگر مقایسه نماییم. لذا برای اینکه بتوانیم مشتق قابل تعریفی ارائه نماییم لازم است ابتدا $Y_{\phi_t(p)}$ را توسط $(\phi_{-t})_*$ به T_pM برگردانده سپس آن را با Y_p مقایسه نماییم. به عبارت دیگر با توجه به اینکه $\phi_{-t} = (\phi_t)^{-1}$ داریم:

$$\begin{aligned} \phi_{-t} \quad &: M \longrightarrow M \\ &\phi_t(p) \mapsto p \end{aligned}$$

از آنجا نگاشت $(\phi_{-t})_*$ عبارت است از:

$$\begin{aligned} (\phi_{-t})_* : \quad & T_{\phi_t(p)}M \longrightarrow T_pM \\ & Y_{\phi_t(p)} \longrightarrow (\phi_{-t})_* Y_{\phi_t(p)} \end{aligned}$$

به شکل توجه فرمایید.



شکل ۶.۱۸: تغییرات Y در طول منحنی انتگرال X

بنابراین بطور طبیعی می‌خواهیم حد تغییرات زیر را محاسبه نماییم.

$$\lim_{t\to 0}\frac{(\phi_{-t})_* Y_{\phi_t(p)} - Y_p}{t}$$

با تبدیل t به $-t$ حد فوق به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\lim_{t\to 0}\frac{Y_p - \phi_{t*}Y_{\phi-t(p)}}{t}$$

اگر قرار دهیم $(\phi_{t*}Y)_p = \phi_{t*}Y_{\phi_{-t}(p)}$ آنگاه با استفاده از قضیه بالا می‌توان مشتق لی یک میدان برداری را به صورت زیر تعریف نمود.

تعریف: *اگر $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ و ϕ_t گروه موضعی یک پارامتری وابسته به میدان X باشد، آنگاه* **مشتق لی میدان برداری** *Y در جهت میدان برداری X در نقطه $p \in M$ به صورت زیر تعریف می‌شود.*

$$\boxed{(\mathcal{L}_X Y)_p = \lim_{t\to 0}\frac{Y_p - (\phi_{t*}Y)_p}{t}}$$

در اینجا قرار داده‌ایم

$$(\phi_{t*}Y)_p = \phi_{t*}Y_{\phi_{-t}(p)}$$

از رابطه I در قضیه قبل همچنین نتیجه می‌شود که اگر X و Y از کلاس C^1 باشند حد فوق همواره موجود است. لذا مشتق لی در تمام نقاط p از منیفلد دیفرانسیل‌پذیر M وجود

دارد.

قضیه زیر را می‌توان به عنوان نتیجه‌ای از قضیه فوق بیان نمود.

قضیه: فرض کنیم $Y \in \mathcal{X}(M)$ و X، φ_t و ψ_s شارهای X و Y باشند آنگاه روابط زیر معادلند

(الف)
$$\mathcal{L}_X Y = 0$$

(ب)
$$\varphi_{t*} Y = Y$$

(ج)
$$\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$$

اثبات: ابتدا نشان می‌دهیم که (ب) $\Leftrightarrow$ (ج)

$$(\varphi_{t*} Y)_p = (\frac{d}{dt}(\varphi_t \circ \psi_s \circ \varphi_{-t})(p))_{t=0}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که گروه موضعی یک پارامتری تولید شده توسط $\varphi_{t*} Y$ عبارت است از $\varphi_t \circ \psi_s \circ \varphi_{-t}$ بنابراین $\varphi_{t*} Y = Y \Leftrightarrow$ این دو میدان دارای یک گروه موضعی می‌باشند اگر و تنها اگر

$$\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t \Leftrightarrow \varphi_t \circ \psi_s \circ \varphi_{-t} = \psi_s$$

حال (ب) $\Leftarrow$ (الف) به وضوح از قضیه قبل نتیجه می‌شود اما برای (الف) $\Leftarrow$ (ب)فرض کنیم $[X, Y] = 0$ اگر در نقطه p، $X_p = Y_p = 0$ همانطوری که در بالا دیدیم داریم $(\varphi_{t*} Y)_p = 0$ لذا $(\varphi_{t*} Y)_p = Y_p$ اگر در نقطه p، X و Y هر دو با هم صفر نباشند می‌توان فرض کرد $X_p \neq 0$ (در غیر اینصورت جای Y, X را عوض می‌کنیم). یک دستگاه مختصات که X را بازسازی می نماید در نظر می‌گیریم بنابر رابطه‌ای که در اثبات قضیه قبل بدست آوردیم

$$(\varphi_{t*} Y)_p = Y_{(p_1 - t, p_2, \cdots, p_n)}$$

بنابراین در این دستگاه مختصات با فرض $x^1 = p_1 - t$ داریم

$$[X, Y] = \frac{\partial Y^j}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

چون $[X,Y]=0$ مختصات Y به متغیر x^1 بستگی ندارد بنابراین $(\varphi_{t*}Y)_p$ به t بستگی ندارد به این صورت داریم $(\varphi_{t*}Y)_p=(\varphi_{0*}Y)_p=Y_p$ لذا در تمام نقاط $\varphi_{t*}Y=Y$ به این صورت اثبات قضیه کامل می‌گردد. $\square$

اگر یک میدان برداری در شرط (ب) از قضیه بالا صدق کند (یعنی $\varphi_* X = X$) می‌گوئیم X نسبت به φ پایا[1] است.

مثال دیگری از کاربرد قضیه بازسازی را در اینجا می‌آوریم.

قضیه: فرض کنیم $\omega\in\Omega^1(M)$ ، $X\in\mathcal{X}(M)$ و $\mathcal{L}_X\omega\in\Omega^1(M)$ که توسط رابطه زیر تعریف می‌شود

$$(\mathcal{L}_X\omega)(Y)=X\cdot\omega(Y)-\omega([X,Y])$$

اگر $\{\varphi_t\}$ گروه موضعی یک پارامتری وابسته به X باشد آنگاه

$$\mathcal{L}_X\omega=\left[\frac{d}{dt}(\varphi_t^*\omega)\right]_{t=0}$$

اثبات: فرض کنیم $X_p\neq 0$. در همسایگی p از M یک دستگاه مختصات موضعی طوری اختیار می‌کنیم که شرایط قضیه بازسازی برقرار شود یعنی

$$X\underset{U}{=}\frac{\partial}{\partial x^1}\quad,\quad \varphi_t(x_1,\cdots,x_n)=(t+x_1,\cdots,x_n)$$

در نتیجه $(\varphi_t)_*=I$ در این دستگاه مختصات داریم (مراجعه شود به فرمول موضعی مشتق لی در انتهای بخش ۲ فصل ۵)

$$\mathcal{L}_X\omega=\sum_j\frac{\partial\omega_j}{\partial x^1}dx^j$$

از طرف دیگر همواره در این دستگاه مختصات

$$(\varphi_t^*\omega)_p=\omega_{(p_1+t,p_2,\cdots,p_n)}\circ I=\omega_{(p_1+t,p_2,\cdots,p_n)}$$

---

[1] *Invariant vector field (Champ de vecteur invariant)*

بنابراین

$$[\frac{d}{dt}(\varphi_t^*\omega)_p]_{t=0} = \sum_j \frac{\partial \omega_j}{\partial x^1} dx^j = (\mathcal{L}_X\omega)_p$$

حال فرض کنیم $X_p = 0$ باشد

$$(\mathcal{L}_X\omega)_p Y = X_p\omega(Y) - \omega_p[X,Y] = -\omega_p([X,Y])$$

چون ω_p به t بستگی ندارد داریم

$$= \omega_p\left([\frac{d}{dt}(\varphi_{t*}Y)]_{t=0}\right) = \frac{d}{dt}[\omega_p(\varphi_{t*}Y)]_{t=0}$$

چون $X_p = 0$ بنابراین $\varphi_t(p) = p$ و داریم

$$(\mathcal{L}_X\omega)_p(Y) = [\frac{d}{dt}\omega_{\varphi_t(p)}(\varphi_{t*}Y)]_{t=0} = [\frac{d}{dt}(\varphi_t^*\omega)_p]_{t=0}(Y)$$

لذا اثبات قضیه کامل می‌شود. □

قضیه فوق برای kـفرمی‌ها نیز قابل تعمیم است.

قضیه: **اگر** $\omega \in \Omega^k M$، $X \in \mathcal{X}(M)$ **و** $\{\varphi_t\}$ **گروه موضعی ۱ـپارامتری وابسته به** X**باشد آنگاه**

$$\mathcal{L}_X\omega = \left[\frac{d}{dt}\varphi_t^*\omega\right]_{t=0}$$

اثبات با استفاده از تعریف مشتق لی برای kـفرمی‌ها مشابه قضیه بالا بوده که از تکرار آن خودداری می‌شود.

تعبیر هندسی مشتق لی $\mathcal{L}_X\omega$

مشابه بحثی که در مورد تعبیر هندسی مشتق لی میدان‌های برداری داشتیم فرض کنیم **می‌خواهیم تغییرات میدان ۱ـ فرمی ω در طول منحنی انتگرال میدان برداری X را ارزیابی نماییم.** برای این کار مقدار ω را در دو نقطه p و $\phi_t(p)$ از این منحنی محاسبه می‌کنیم. اما چون $\omega_p \in T_p^*M$ و $\omega_{\phi_t(p)} \in T^*_{\phi_t(p)}M$ لازم است ابتدا $\omega_{\phi_t(p)}$ را توسط نگاشت

کتانژانت ϕ_t^* به T_p^*M برگردانده سپس آن را با ω_p مقایسه نماییم.

$$\begin{aligned} \phi_t : M &\longrightarrow M \\ p &\longrightarrow \phi_t(p) \end{aligned}$$

از آنجا که نگاشت ϕ_t^* عبارت است از:

$$\begin{aligned} \phi_t^* : T_{\phi_t(p)}^*M &\longrightarrow T_p^*M \\ \omega_{\phi_t(p)} &\longrightarrow \phi_t^*\omega_{\phi_t(p)} \end{aligned}$$

حال می‌توانیم تغییرات ω در طول منحنی انتگرال میدان برداری X را به صورت زیر ارزیابی نموده، با توجه به قضیه ماقبل آخر آنرا **مشتق لی** ω **نسبت به میدان برداری** X بنامیم.

$$(\mathcal{L}_X\omega)_p = \lim_{t\to \circ} \frac{\phi_t^*\omega_{\phi_t(p)} - \omega_p}{t}$$

از شکل موضعی $\mathcal{L}_X\omega$ که در بخش ۲§ از فصل پنجم ملاحظه کردیم نتیجه می‌شود که اگر ω و X از کلاس C^1 باشند آنگاه حد فوق همواره موجود است. لذا مشتق لی ω در تمام نقاط p از منیفلد M وجود دارد. حال از قضیه قبل می‌توان استفاده نموده این تعریف را برای k ـ فرمی‌ها تعمیم داد.

در بخش ۴§ از فصل پنجم مشتق لی k ـ فرمی‌ها را به عنوان یک مثال از مشتق‌گیری درجه صفر بیان کردیم. حال با توجه به قضیه بالا می‌توان مشتق لی k ـ فرمی‌ها را به صورت زیر تعریف کرد.

تعریف: *اگر ω یک میدان k ـ فرمی و X یک میدان برداری روی M باشد آنگاه* **مشتق لی** ω **نسبت به میدان** X *یک میدان k ـ فرمی است که به صورت زیر تعریف می‌شود.*

$$\boxed{(\mathcal{L}_X\omega)_p = \lim_{t\to \circ} \frac{\phi_t^*\omega_{\phi_t(p)} - \omega_p}{t}}$$

در اینجا ϕ_t شار وابسته به میدان برداری X است.

مشتق‌گیری لی از تانسورها

گزاره زیر می‌تواند روشی جهت تعریف مشتق لی تانسورها ارائه کند.

گزاره: *فرض کنیم $X,Y \in \mathcal{X}(M)$ و $\omega \in \Omega^1 M$ نشان می‌دهیم که با تعریف مناسب مشتق لی تانسورها داریم*

$$\mathcal{L}_X(Y \otimes \omega) = \mathcal{L}_X Y \otimes \omega + Y \otimes \mathcal{L}_X \omega$$

اثبات: در تعبیر هندسی $\mathcal{L}_X \omega$ و $\mathcal{L}_X Y$ دیدیم که عملی که روی ω و Y اثر می‌کرد به ترتیب عبارت بود از $(\phi_t)^*$ و $(\phi_{-t})_*$ لذا بطور مشابه عملی که روی حاصلضرب تانسوری $Y \otimes \omega$ در نقطه $\phi_t(p)$ اثر می‌کند عبارت است از نگاشت $(\phi_{-t})_* \otimes (\phi_t)^*$ در نقطه p از M. لذا

$$\left((\phi_{-t})_* \otimes (\phi_t)^*\right)(Y \otimes \omega)\Big|_{\phi_t(p)} = (\phi_{-t})_* Y \otimes (\phi_t)^* \omega\Big|_p$$

از آنجا مشابه تعاریف بالا برای مشتق لی داریم:

$$\boxed{\mathcal{L}_X(Y \otimes \omega) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left((\phi_{-t})_* Y \otimes (\phi_t)^* \omega\Big|_p - Y \otimes \omega\Big|_p\right)}$$

با اضافه و کم کردن جمله $(\phi_{-t})_* Y \otimes \omega$ در این عبارت داریم

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left((\phi_{-t})_* Y \otimes (\phi_t^* \omega - \omega) + ((\phi_{-t})_* Y - Y) \otimes \omega\right)$$

$$= Y \otimes \mathcal{L}_X \omega + \mathcal{L}_X Y \otimes \omega$$

□

از گزاره بالا و روش اثبات آن می‌توان تعاریف مشتق لی برای تانسورهای از نوع دلخواه را بیان نموده رابطه بالا را که موسوم به دستور لایبنیتز[1] برای مشتق لی است برای تانسورهای

---

[1] *Libnitz formula*

دلخواه بیان نمود.

مثال: فرض کنیم t تانسوری از نوع $\binom{1}{1}$ باشد $t \in \otimes^1_1 M$ می‌خواهیم مشتق لی آنرا نسبت به میدان برداری $X \in \mathcal{X}(M)$ به دست آوریم. می‌دانیم

$$t = \sum_{i,j} t^j_i dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}$$

به منظور اختصار و با رعایت قانون جمعبندی در هندسه از نوشتن علامت زیگما خودداری می‌کنیم. با استفاده از گزاره بالا و همچنین $\mathcal{L}_X t^j_i = X \cdot t^j_i$ (چون مولفه‌های این تانسور یک تابع حقیقی است) فرمول محاسبه مشتق لی به دست می‌آید.

$$\mathcal{L}_X t = X \cdot t^j_i (dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}) + t^j_i (\mathcal{L}_X dx^i) \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}$$
$$+ t^j_i dx^i \otimes \left(\mathcal{L}_X \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

با محاسبه و جایگذاری $\mathcal{L}_X dx^i$ و $\mathcal{L}_X \frac{\partial}{\partial x^j}$ می‌توان این فرمول را به صورت موضعی نیز به دست آورد.

اگر $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ از فرمول موضعی مشتق لی در بخش §۵ ۰ ۴ نتیجه می‌شود.

$$\mathcal{L}_X dx^i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial X^i}{\partial x^k} dx^k$$

با استفاده از تعریف کروشه داریم

$$\mathcal{L}_X \frac{\partial}{\partial x^j} = -\sum_{k=1}^n \frac{\partial X^k}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

با جایگذاری این مقادیر در رابطه بالا داریم:

$$\mathcal{L}_X t = \sum_{k=1}^n X^k \frac{\partial t^j_i}{\partial x^k} \left(dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}\right) + t^j_i \sum_{k=1}^n \frac{\partial X^i}{\partial x^k} \left(dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$
$$+ t^j_i dx^i \otimes \left(-\sum_{k=1}^n \frac{\partial X^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^k}\right)$$

با تغییر اندیسها به طور مناسب فرمول موضعی مشتق لی از یک تانسور نوع $\binom{1}{1}$ به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\boxed{\mathcal{L}_X t = \sum_{i,j}\left(\sum_{k=1}^{n} X^k \frac{\partial t_i^j}{\partial x^k} + \sum_{l=1}^{n} t_l^j \frac{\partial X^l}{\partial x^i} - \sum_{l=1}^{n} t_i^l \frac{\partial X^j}{\partial x^l}\right)\left(dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}\right)}$$

می‌توان این فرمول را با استفاده از تعریف کلاسیک تانسورها و قانون جمعبندی به صورت زیر نوشت:

$$\boxed{\mathcal{L}_X t_i^j = X^k \frac{\partial t_i^j}{\partial x^k} + t_l^j \frac{\partial X^l}{\partial x^i} - t_i^l \frac{\partial X^j}{\partial x^l}}$$

به روش مثال بالا می‌توان فرمول کلی مشتق لی از یک تانسور نوع $\binom{n}{m}$ را به صورت زیر به دست آورد.

اگر فرض کنیم $\frac{\partial}{\partial x^k} = \partial_k$ با رعایت قرار جمعبندی در هندسه داریم:

$$\boxed{\mathcal{L}_X t^{j_1\cdots j_n}_{i_1\cdots i_m} = X^k \partial_k t^{j_1\cdots j_n}_{i_1\cdots i_m} + \sum_{s=1}^{m} \partial_{i_s} X^k t^{j_1\cdots j_n}_{i_1\cdots k\cdots i_m} - \sum_{s=1}^{n} \partial_k X^{j_s} t^{j_1\cdots k\cdots j_n}_{i_1\cdots i_m}}$$

مشابه قضیه‌ای که برای مشتق لی یک میدان برداری ثابت کردیم قضیه زیر را برای مشتق لی یک $k-$ فرمی داریم.

قضیه: اگر $\{\varphi_t\}$ گروه موضعی ۱ـپارامتری وابسته به میدان برداری X روی M باشد و $\omega \in \Omega^k M$ آنگاه داریم:

$$\mathcal{L}_X \omega = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi_t^* \omega = \omega$$

اثبات این قضیه مشابه اثبات قضایای بالا بوده که از آوردن آن خودداری می‌شود. اگر ω در رابطه $\varphi^*\omega = \omega$ صدق کند می‌گوئیم ω نسبت به φ پایا[1] است.

---

[1] *Invariant form*

تمرین:

۱ـ اگر t یک تانسور از نوع $\binom{1}{2}$ باشد فرمول $\mathcal{L}_X t$ را به شکل کلاسیک بنویسید.

۲ـ ثابت کنید $i_X^2 = 0$ و از آن نتیجه بگیرید $\mathcal{L}_X i_X \omega = i_X \mathcal{L}_X \omega$

۳ـ فرمول مشتق لی تانسور $\binom{n}{m}$ را که در بالا آوردیم ثابت کنید.

۷.۶ § بازسازی چند میدان برداری بطور همزمان

در بخش §۵ دیدیم که اگر $X_p \neq 0$ باشد، یک دستگاه مختصات (x, U) در همسایگی p وجود دارد بطوریکه روی U میدان برداری X به‌صورت زیر نوشته شود.

$$X \underset{U}{=} \frac{\partial}{\partial x^1}$$

فرض کنیم Y میدان برداری دیگری باشد. سئوالی که مطرح می‌شود این است که آیا دستگاه مختصاتی مانند (x, U) در همسایگی p موجود است بطوریکه Y را بتوان به‌صورت زیر نوشت؟

$$Y \underset{U}{=} \frac{\partial}{\partial x^2}$$

جواب در حالت کلی منفی است ولی می‌توان بررسی نمود که تحت چه شرایطی چنین دستگاه مختصاتی وجود دارد. برای جوابگویی به این سوال فرض کنیم X_p و Y_p مستقل خطی باشند (بنابراین روی یک همسایگی نقطه p مستقل می‌باشند زیرا مستقل بودن لازمه‌اش این است که دترمینان ماتریسی مخالف صفر باشد که این شرط روی یک همسایگی نیز برقرار خواهد بود) اگر بتوان در یک دستگاه مختصات X و Y را به‌صورت بالا نوشت خواهیم داشت

$$[X, Y] \underset{U}{=} [\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}] = 0$$

که یک شرط لازم برای وجود چنین دستگاه مختصاتی را بدست می‌دهد. حال در قضیه زیر نشان می‌دهیم که این شرط کافی نیز هست.

قضیه: اگر $X_1, \cdots, X_k$ k میدان برداری مستقل خطی از کلاس C^1 در نقطه p از M

باشند $\forall\alpha, \beta\ [X_\alpha, X_\beta] = 0$ **آنگاه یک دستگاه مختصات موضعی در همسایگی نقطه** p **وجود دارد بطوریکه**

$$X_\alpha \underset{U}{=} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

اثبات: اثبات این قضیه مشابه اثبات قضیه بازسازی است و باید از خاصیت اینکه $[X, Y] = 0$ اگر و تنها اگر شارهای X و Y جابجایی باشند، استفاده کرد. ابتدا قضیه را برای حالت دو میدان برداری $(k = 2)$ ثابت می‌نمائیم حالت کلی براحتی از آن نتیجه می‌شود. شارهای X و Y را توسط φ_t و ψ_t نمایش می‌دهیم. مشابه اثبات قضیه بازسازی یک دستگاه مختصات موضعی (y, V) در همسایگی نقطه p طوری در نظر می‌گیریم که $y(p) = 0$ و

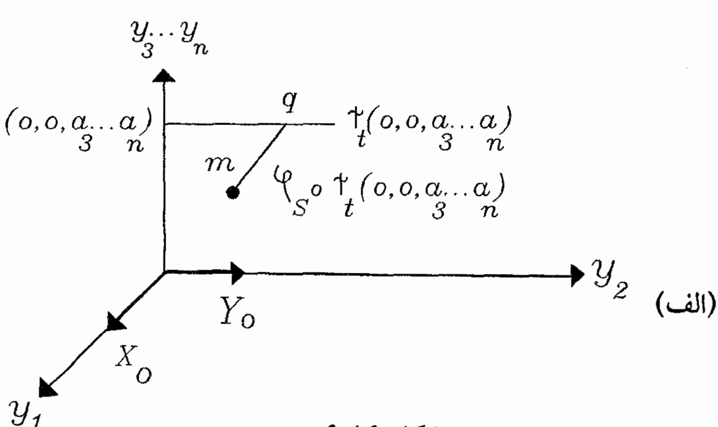
$$X_0 = (\frac{\partial}{\partial y_1})_0 \qquad , \qquad Y_0 = (\frac{\partial}{\partial y_2})_0$$

نقطه $(0, 0, a_3 \cdots, a_n) \in y(V)$ را درنظر می‌گیریم. شکل (الف) را ببینید. از این نقطه منحنی انتگرال یکتای Y عبور می‌کند.

$$\psi_t(0, 0, a_3, \cdots, a_n)$$

از نقاط q متعلق به این منحنی یک منحنی انتگرال یکتای X می گذرد.

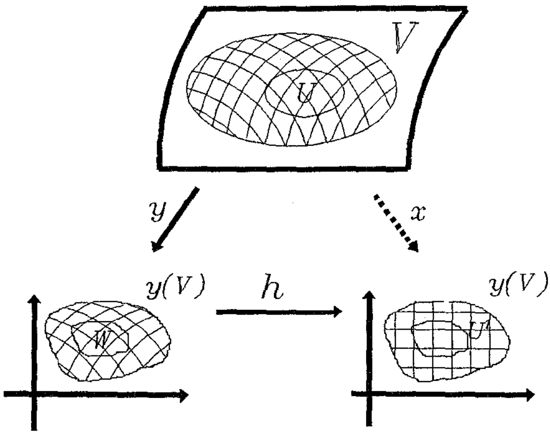
$$\varphi_s \circ \psi_t(0, 0, a_3, \cdots, a_n)$$



شکل ۶.۱۹:

حال مختصات $(s, t, a_3, \cdots, a_n)$ را به عنوان مختصات نقطه m از این منحنی در نظر می‌گیریم. به عبارت دقیقتر نگاشت زیر را که در همسایگی صفر تعریف می‌شود درنظر می‌گیریم

$$\begin{aligned} \tilde{h}: \quad & y(V) \to I\!R^n \\ & (a_1, a_2, \cdots, a_n) \to \varphi_{a_1} \circ \psi_{a_2}(0, 0, a_3, \cdots, a_n) \end{aligned}$$



(ب)

شکل ۶.۲۰:

براحتی مانند قضیه بازسازی می‌توان نشان داد $(\tilde{h}_*)_0 = Id$. لذا $\tilde{h}$ در همسایگی صفر معکوس‌پذیر است. بنابراین وجود دارد $U^1 \subset y(V)$ بطوریکه نگاشت زیر معکوس‌پذیر باشد

$$\tilde{h}|_{U^1} : U^1 \to W^1$$

(W^1 همسایگی صفر در $y(V)$ است)

فرض کنیم $h = \tilde{h}|_{U^1}^{-1} : W \to U^1$ حال h_*X و h_*Y را محاسبه می‌نمائیم. شکل (ب) را ببینید.

$$(h_*X)_b = \frac{d}{dt}[h \circ \varphi_t \circ h^{-1}(b)]_{t=0} = \frac{d}{dt}[h \circ \varphi_t \circ \tilde{h}(b_1, \cdots, b_n)]_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}[h \circ \varphi_t \circ \varphi_{b_1} \circ \psi_{b_2}(0, 0, b_3, \cdots, b_n)]_{t=0}$$
$$= \frac{d}{dt}[h \circ \varphi_{t+b_1} \circ \psi_{b_2}(0, 0, b_3, \cdots, b_n)]_{t=0}$$
$$= \frac{d}{dt}[h \circ \tilde{h}(t + b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n)] = (1, 0, 0, \cdots, 0)$$

و $h \circ \tilde{h} = Id$ داریم

$$(h_*Y)_b = \frac{d}{dt}[(h \circ \psi_t \circ h^{-1}(b)]_{t=0} = \frac{d}{dt}[h \circ \psi_t \circ \tilde{h}(b_1, \cdots, b_n)]_{t=0}$$

بنابر جابجایی بودن شارها داریم

$$= \frac{d}{dt}[h \circ \psi_t \circ \varphi_{b_1} \circ \psi_{b_2}(0, 0, b_3, \cdots, b_n)]_{t=0}$$
$$= \frac{d}{dt}[h \circ \varphi_{b_1} \circ \psi_t \circ \psi_{b_2}(0, 0, b_3, \cdots, b_n)]_{t=0}$$
$$= \frac{d}{dt}[h \circ \varphi_{b_1} \circ \psi_{t+b_2}(0, 0, b_3, \cdots, b_n)]_{t=0}$$
$$= \frac{d}{dt}[h \circ \tilde{h}(b_1, t + b_2, b_3, \cdots, b_n)]_{t=0} = (0, 1, 0, \cdots, 0)$$

بنابراین در دستگاه (x, U) با فرض $U = y^{-1}(W)$ و $x = h \circ y$ داریم

$$X \underset{U}{=} \frac{\partial}{\partial x^1} \quad , \quad Y \underset{U}{=} \frac{\partial}{\partial x^2} \qquad \square$$

تمرین:

۱ـ فرض کنیم $\alpha : M \to N$ یک دیفئومورفیسم بوده و X یک میدان برداری روی M باشد که خانواده $\{\varphi_t\}$ را تولید می‌کند. نشان دهید $\alpha_* X$ خانواده $\{\alpha \circ \varphi_t \circ \alpha^{-1}\}$ را تولید می‌کند.

۲ـ فرض‌کنیم $\alpha : M \to M$ یک دیفئومورفیسم بوده و X یک میدان برداری روی M باشد آنگاه نشان دهید $\alpha_* X = X$ اگر وتنها اگر $\varphi_t \circ \alpha = \alpha \circ \varphi_t$

۸.۶ § منیفلد انتگرال[1]

مقدمه: درفصول قبل با مفهومی به نام منحنی انتگرال آشنا شدیم. در این بخش با تعمیم این مفهوم و تغییر جزئی آن منیفلد انتگرال را تعریف نموده شرایط وجود آنرا بررسی می نمائیم.

بسیاری از قضایای اساسی در هندسه دیفرانسیل به یکی از دو گروه زیر تقسیم می‌شوند: گروه اول مربوط به این است که تحت چه شرایطی یک منیفلد انتگرال در هر نقطه وجود دارد. این شرایط عبارتند از معادلاتی با مشتقات جزئی که آنها را اصطلاحاً **"شرایط انتگرال‌پذیری"**[2] می‌نامند و گروه دوم از این قضایا مربوط به این است که در چه صورتی "شرایط انتگرال پذیری" برای وجود یک منیفلد انتگرال در هر نقطه کافی است.

در این بخش ابتدا برای درک بهتر مفاهیم، تعاریف زیرمنیفلد انتگرال و انتگرال پذیری را به‌صورت ساده عنوان نموده سپس در ادامه، تعاریف آنها را بطور کامل ذکر می‌کنیم. در خاتمه شرط لازم و کافی برای انتگرال پذیری توزیع دوبعدی را بدست می‌آوریم.

قبل از اینکه تعاریف دقیق این بخش را بیاوریم منحنی انتگرال میدان برداری $X_p \in T_pM$ را در نظر می‌گیریم. سپس بجای X_p، Δ_p زیرفضای یک بعدی تولید شده از T_pM را در نظر گرفته نگاشت زیر را یک **توزیع یک بعدی**[3] می‌نامیم.

$$\Delta : p \in M \longrightarrow \Delta_p \subset T_pM$$

منحنی انتگرال میدان $X_p = \Delta_p$ را با N نمایش داده آنرا زیرمنیفلد انتگرال M می‌نامیم. حال این سوال را مطرح می کنیم آیا می‌توان برای هر نقطه p از M یک زیرمنیفلدی از M مانند N طوری اختیار کرد که $T_qN = \Delta_q \quad \forall q$ (وقتی که q به‌اندازه کافی به p نزدیک باشد).

در این صورت N را زیرمنیفلد انتگرال میدان Δ نامیده و Δ را انتگرال پذیر می‌گوئیم و شرایط مربوطه را شرایط انتگرال پذیری می‌نامیم. بطور کلی تعریف زیر را داریم:

---

[1] *Integral Manifold*

[2] *Integrability Conditions*

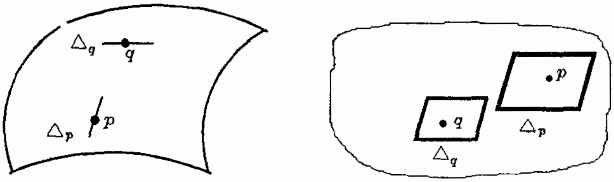
[3] *One dimensional distribution*

تعریف: یک میدان k_ صفحه‌ای[۱] یا میدان توزیع k_ بعدی[۲] عبارت است از نگاشت

$$\Delta : p \in M \longrightarrow \Delta_p$$

که در آن Δ_p یک زیر فضای برداری به بعد k از T_pM است (در اینجا $0 < k \leq n$) و به ازاء هر $p \in M$ یک همسایگی U شامل p و k میدان برداری $X_1, \cdots, X_k$ روی U وجود دارد بطوریکه به ازاء هر $q \in U$، $(X_k)_q$، $\cdots$، $(X_1)_q$ پایه‌ای برای Δ_q باشد.
شرط اخیر برای نگاشت Δ در تعریف بالا را شرط دیفرانسیل‌پذیری می‌گویند.

می‌گوئیم میدان k_صفحه‌ای Δ از کلاس C^∞ می‌باشد اگر میدان‌های $X_1, \cdots, X_k$ را بتوان روی یک همسایگی p بطور C^∞ انتخاب نمود.



شکل ۶.۲۱: میدان‌های توزیع

(توزیع تعریف شده در بالا رابطه‌ای با توزیع شوارتز[۳] که در آنالیز تعریف می‌شود ندارد.)
مسئله‌ای که در اینجا به بررسی آن می‌پردازیم به زبان ساده این است: آیا می‌توان برای هر نقطه $p \in M$ یک زیرمنیفلدی مانند N طوری اختیار کرد که

$$\forall q \in N \qquad T_qN = \Delta_q$$

(حداقل وقتی که q به‌اندازه کافی به p نزدیک باشد)
در این صورت N را **زیرمنیفلد انتگرال**[۴] (گذرنده از p) توزیع Δ نامیده و توزیع Δ را

---

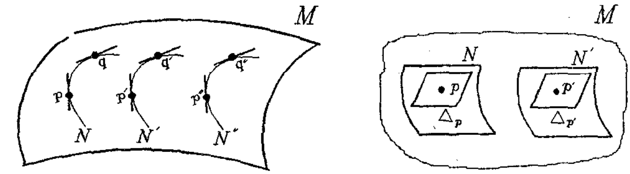
[۱] *k − plane filed (champ de k − plans)*

[۲] *k dimensional distribution (distribution de dimension k)*

[۳] *Shwartz distribution*

[۴] *Integral Submanifold (Sous − varie'te' integrale)*

انتگرال پذیر[۱] خواهیم نامید. N را **منیفلد انتگرال**[۲] نیز می‌گویند.



شکل ۶.۲۲: زیر منیفلدهای انتگرال

بطور دقیقتر می‌توان تعریف زیر را ارائه نمود.

تعریف: N زیر منیفلد k بعدی M را یک **زیرمنیفلد انتگرال یامنیفلد انتگرال** Δ گوئیم اگر به ازاء هر $p \in N$ داشته باشیم.

$$i_*(T_pN) = \Delta_p$$

در اینجا $i : N \to M$ نگاشت شمول است. برای هر p زیرمنیفلد انتگرال گذرنده از p موجود باشد در این صورت Δ را **انتگرال پذیر** می‌گوئیم.

تعریف: فرض کنیم Δ یک توزیع یا میدان $k-$ صفحه‌ای روی M باشد و $X \in \mathcal{X}(M)$ می‌گوئیم $X \in \Delta$ اگر به ازاء هر p از M داشته باشیم

$$X_p \in \Delta_p$$

توزیع Δ را **گسترنده**[۳] گوئیم اگر برای کروشه **پایدار**[۴] باشد یعنی

$$X, Y \in \Delta \Rightarrow [X, Y] \in \Delta$$

[۱] *Integrable distribution*
[۲] *Integral manifold*
[۳] *involutive*
[۴] *Stable*

براحتی می‌توان مشاهده کرد که زیرمنیفلد انتگرال همیشه وجود ندارد. (به تذکر ۲ مراجعه شود)

اگر Δ انتگرال‌پذیر باشد، به ازاء هر $Y \in \mathcal{X}(M)$ و X بطوریکه در هر نقطه $X, Y \in \Delta$ داریم $X, Y \in \mathcal{X}(N)$ بنابراین $[X, Y] \in \mathcal{X}(N)$ و در نتیجه

$$[X, Y] \in \Delta$$

به این صورت در حالت خاص $\Delta = TN$، می‌بینیم که **اگر Δ انتگرال‌پذیر باشد باید** برای کروشه پایدار باشد.

بنابراین اگر Δ انتگرال‌پذیر باشد گسترنده است. **عکس این موضوع نیز برقرار است** که توسط **قضیه فروبنیوس**[1] ثابت می‌شود.

تذکر ۱: *فرض کنیم $\{\vartheta_1, \cdots, \vartheta_k\}$ یک پایه موضعی برای Δ باشند یعنی k میدان برداری که روی یک همسایگی p طوری تعریف شده باشد که در هر نقطه q از این همسایگی تشکیل یک پایه برای Δ_q بدهند.*

اگر $X = \sum_{i=1}^{k} a_i\vartheta_i$ ، $Y = \sum_{j=1}^{k} b_j\vartheta_j$ دو میدان برداری از Δ باشند داریم:

$$[X, Y] = [\sum a_i\vartheta_i, \sum b_j\vartheta_j] = \sum_{i,j} a_ib_j[\vartheta_i, \vartheta_j] + \\ \underbrace{+\sum_{i,j} a_i(\vartheta_i \cdot b_j)\vartheta_j - \sum_{i,j} b_j(\vartheta_j \cdot a_i)\vartheta_i}_{\in\Delta}$$

چون ترکیبی از اعضای پایه Δ می‌باشند.

بنابراین

$$\forall_{i,j} \quad [\vartheta_i, \vartheta_j] \in \Delta \ ; \ \Leftrightarrow \forall X, Y \in \Delta \ [X, Y] \in \Delta$$

در نتیجه برای آنکه نشان دهیم میدان kـصفحه‌ای Δ گسترنده است کافی است نشان دهیم که کروشه هر زوج از اعضای پایه Δ در Δ قرار دارد.

---

[1] $G \cdot F \cdot Frobenius$ ریاضیدان آلمانی متخصص در جبر و آنالیز ۱۹۱۷ـ۱۸۴۹

تذکر ۲: Δ میدان توزیع دوبعدی در $I\!R^3$ را درنظر گرفته بررسی می‌نمائیم تحت چه شرایطی Δ انتگرال پذیر است.

می‌دانیم معادله یک صفحه در $I\!R^3$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

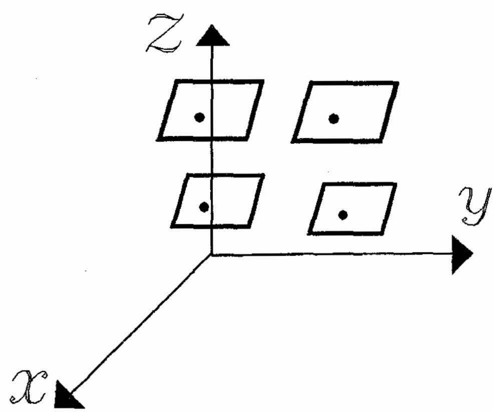
$$\Delta_{a,b,c} : A(a,b,c)(x-a) + B(a,b,c)(y-b) + C(a,b,c,)(z-c) = 0$$

چون A، B و C هر سه با هم صفر نیستند می‌توان فرض نمود که در نقطه‌ای به مختصات (a,b,c)، $C(a,b,c) \neq 0$ یا به عبارت دیگر در یک همسایگی نقطه $p = (a,b,c)$، $C \neq 0$ باشد. با تقسیم رابطه بر C (در این همسایگی) می‌توان نوشت

$$\Delta_{a,b,c} : \quad z - c = f(a,b,c)(x-a) + g(a,b,c)(y-b) \qquad (1)$$

این صفحات بر محور zها عمود نیستند. زیرمنیفلدهای انتگرال در صورت وجود رویه‌های دوبعدی در $I\!R^3$ به‌صورت زیر هستند که بر این صفحات مماس هستند.

$$N = \{(x,y,z) \in I\!R^3 : z = u(x,y)\}$$



شکل ۶.۲۳: صفحات مماس بر زیرمنیفلدهای انتگرال

می‌خواهیم داشته باشیم $\Delta = TN$ باید ببینیم چه شرایطی باید برقرار باشد تا $\Delta = TN$

فرض کنیم Δ توسط بردارهای $\vartheta = (1,0,f(a,b,c))$ و $w = (0,1,g(a,b,c))$ تولید شود.

حال TN را ارائه می‌نمائیم. بطور دقیقتر i_*TN را معرفی می‌کنیم. داریم

$$i \,:\, (x,y) \to (x,y,z=u(x,y))$$

$$i_* = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{l} i_*(e_۱) = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \\ u_x & u_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ u_x \end{pmatrix} \\ i_*(e_۲) = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \\ u_x & u_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ u_y \end{pmatrix} \end{array}$$

به این صورت TN توسط بردارهای زیر تولید می‌شود

$$(۱,۰,\frac{\partial u}{\partial x})_{(a,b,c)} \qquad , \qquad (۰,۱,\frac{\partial u}{\partial y})_{(a,b,c)}$$

چون بعد Δ_p و T_pN مساوی است این دو فضا بر یکدیگر منطبق هستند اگر وتنها اگر $i_*e_۱ \in \Delta$ و $i_*e_۲ \in \Delta$ یعنی برای $i_*e_۱$

$$(۱,۰,\frac{\partial u}{\partial x}) = \lambda(۱,۰,f) + \mu(۰,۱,g)$$

که از آنجا داریم $\mu = ۰$ و $\lambda = ۱$ (به همین صورت برای $i_*e_۲$ عمل می‌شود.) و در نتیجه

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} & = f \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} & = g \end{cases} \qquad (۲)$$

بنابراین Δ انتگرال پذیر است اگر و تنها اگر دستگاه معادلات (۲) دارای جواب $u(x,y)$ درهمسایگی هر نقطه باشد.

یادآوری می‌کنیم که دستگاه معادلات (۲) همیشه دارای جواب نیست.

در حقیقت اگر $u(x,y)$ یک جواب دستگاه باشد یعنی

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} & = f(x,y,u(x,y)) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} & = g(x,y,u(x,y)) \end{cases}} \qquad (۲')$$

بطوریکه

$$\begin{aligned} f,g:\quad & I\!R^{3} \to I\!R \\ & (x,y,z) \to f(x,y,z) \\ & (x,y,z) \to g(x,y,z) \end{aligned}$$

باید داشته باشیم $\dfrac{\partial^{2} u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^{2} u}{\partial y \partial x}$ (چون در اینجا توابع C^{∞} هستند) لذا بنابر قاعده زنجیره‌ای

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}$$

و با توجه به (۲) داریم

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} g = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z} f} \qquad (۳)$$

واضح است هیچ دلیلی وجود ندارد که این شرط همواره برقرار باشد چون g, f دلخواه می‌باشند.

بنابراین معادلات (۳) یک شرط لازم برای انتگرال پذیری دستگاه (۲) یعنی شرط لازم برای انتگرال‌پذیری Δ است.

حال ببینیم گسترندگی چطور بیان می‌شود. چون $\vartheta = (۱, ۰, f)$ و $w = (۰, ۱, g)$ یک پایه Δ هستند بعد از تذکر فوق Δ گسترنده است اگر وتنها اگر $[\vartheta, w] \in \Delta$ با نوشتن ϑ و w به عنوان دو مشتق‌گیری یعنی به عنوان میدان برداری در پایه $\dfrac{\partial}{\partial x}$، $\dfrac{\partial}{\partial y}$، $\dfrac{\partial}{\partial z}$ به‌صورت زیر

$$\vartheta = \frac{\partial}{\partial x} + f\frac{\partial}{\partial z} \quad ,\omega = \frac{\partial}{\partial y} + g\frac{\partial}{\partial z}$$

داریم

$$[\vartheta, \omega] = [\frac{\partial}{\partial x} + f\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} + g\frac{\partial}{\partial z}] = \underbrace{\left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} f - \frac{\partial f}{\partial z} g\right)}_{A} \frac{\partial}{\partial z}$$

بنابراین $\Delta \in [\vartheta, w]$ اگر و تنها اگر $A\dfrac{\partial}{\partial z} = \lambda\vartheta + \mu w$ یعنی

$$A\frac{\partial}{\partial z} = \lambda\frac{\partial}{\partial x} + \mu\frac{\partial}{\partial y} + (\lambda f + \mu g)\frac{\partial}{\partial z} \Rightarrow \lambda = \mu = A = \circ \Leftrightarrow \quad (۳)$$

به این صورت Δ گسترنده می‌باشد اگر و تنها اگر شرط (۳) برقرار باشد. یا Δ انتگرال پذیر است اگر و تنها اگر گسترنده باشد که این خود حالت خاصی از قضیه فروبینوس است که به این صورت اثبات می‌شود.

نتیجه: بنابراین بطور خلاصه یک تعبیر "تحلیلی" از مفاهیم هندسی انتگرال‌پذیری یک میدان توزیع دوبعدی و گسترنده یک میدان توزیع دو بعدی به شرح زیر بدست آوردیم :

الف ـ انتگرال‌پذیری یک توزیع معادل است با انتگرال پذیری دستگاه معادلات (۲)

ب ـ گسترندگی معادل است با شرط (۳) که آنرا «شرط فروبنیوس» می‌گوئیم.

ج ـ شرط (۳) یک شرط لازم برای انتگرال پذیری دستگاه معادلات (۲) است.

یادآوری: اگر Δ یک توزیع یک بعدی C^∞ روی M باشد. به ازاء هر $p \in M$ همیشه می‌توان یک زیرمنیفلد انتگرال گذرنده از p معرفی نمود. برای اینکار میدان برداری X را طوری اختیار می‌کنیم که $X_q \neq \circ$ بوده و $X_q \in \Delta_q$ و q یک نقطه در همسایگی p باشد. در این صورت C منحنی انتگرال X رابا شرایط اولیه $C(\circ) = p$ در نظر گرفته تعریف می‌کنیم

$$N = \{C(t)\}$$

لذا منحنی N زیرمنیفلد انتگرال توزیع یک بعدی Δ است.

۹.۶ § قضیه فروبنیوس

در این بخش ابتدا مطالب بخش قبل را بطور دقیقتر بیان نموده سپس صورت موضعی قضیه فروبنیوس را بیان و آنرا اثبات می‌نمائیم. در خاتمه با استفاده از مفهوم برگ سازی[۱] صورت

---

[۱] *foliation (feuilletage)*

سرتاسری این قضیه را می‌آوریم.

تعریف: می‌گوئیم که میدان kـصفحه‌ای Δ روی M **انتگرال پذیراست** اگر $\forall p \in M$ یک همسایگی U از p در M موجود باشد بطوریکه از هر نقطه q در این همسایگی یک زیر منیفلد انتگرال $N^{(p)}$ از Δ عبور نماید. یعنی یک منیفلد مانند $N^{(p)}$ بطوریکه

$$\forall q \in U \qquad \qquad \Delta_q = T_q N^{(p)}$$

(به عبارت دیگر اگر $i : N^{(p)} \to M$ نگاشت شمول طبیعی باشد آنگاه $(i_*)_q T_q N^{(p)} = \Delta_q$)

یادآوری می‌کنیم $dim N^{(p)} = k$ اگر Δ یک میدان kـصفحه‌ای باشد.

همانطوری که در بخش قبل ملاحظه شد هر *میدان kـصفحه‌ای انتگرال‌پذیر*، گسترنده است. قضیه فروبنیوس عکس این موضوع را اثبات می‌نماید. در بخش بعد با تعبیر تحلیلی قضیه فروبنیوس خواهیم دید که این قضیه شرط لازم وکافی برای انتگرال‌پذیری یک دستگاه معادلات دیفرانسیل را عنوان می‌نماید. حال به بیان و اثبات صورت موضعی قضیه فروبنیوس می‌پردازیم.

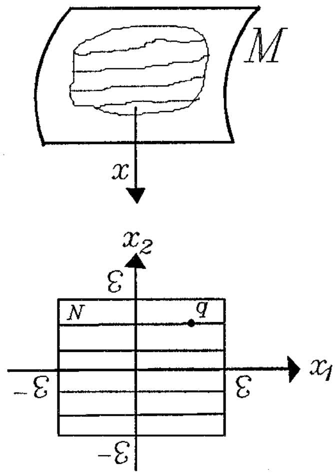
قضیه فروبنیوس (صورت موضعی) فرض کنیم Δ یک میدان kـصفحه‌ای از کلاس C^∞ روی M باشد. آنگاه Δ انتگرال پذیر است اگر وتنها اگر گسترنده باشد.

بطور دقیقتر اگر $dim M = n + k$، Δ گسترنده است اگر و تنها اگر به ازاء هر $p \in M$ یک کارت (x, U) در همسایگی p موجود باشد بطوریکه

$$\begin{aligned} x(p) &= 0 \\ x(U) &=]-\xi, \xi[^{n+k} \end{aligned} \qquad \text{(مراجعه شود به شکل)}$$

و مجموعه $\{q' \in U | x^{k+1}(q') = C_{k+1}, \cdots, x^{k+n}(q') = C_{k+n}\}$ با فرض $|C_i| < \xi$ به ازاء هر $C_{k+1}, \cdots, C_{k+n}$ یک زیرمنیفلد انتگرال Δ باشد. به علاوه تمام زیرمنیفلدهای انتگرال به همین شکل هستند.

به نمودار زیر توجه فرمائید.



شکل ۶.۲۴: زیرمنیفلدهای انتگرال

بنابراین می توان قضیه را به‌صورت زیر نیز بیان نمود.

Δ گسترنده است $\Leftrightarrow$ $\forall p \in M$ یک همسایگی U از p موجودباشد بطوریکه:

_ از هر نقطه $p \in U$ یک وتنها یک زیرمنیفلد انتگرال N از Δ، بگذرد.

_به علاوه یک دستگاه مختصات موضعی (x^α) روی U وجود دارد که زیرمنیفلدهای انتگرال آن صفحاتی به معادله زیر باشند.

$$x^{k+1} = C_{k+1}, \cdots, x^{k+n} = C_{k+n}$$

به عبارت دیگر در این قضیه یک بازسازی از زیرمنیفلدهای انتگرال نیز انجام می‌شود.

اثبات قضیه فروبنیوس: فرض کنیم Δ گسترنده بوده، $p \in M$ و (y, V) یک دستگاه مختصات موضعی در همسایگی p از M باشد بطوریکه $y(p) = 0$. با استفاده از یک تغییر مختصات خطی می‌توان فرض نمود که Δ_p توسط $(\frac{\partial}{\partial y^1})_0, \cdots, (\frac{\partial}{\partial y^k})_0$ تولید شود. قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \pi \quad &: V \to I\!R^k \\ &: (a_1 \cdots a_k \cdots a_{k+n}) \to (a_1 \cdots a_k) \end{aligned}$$

در اینجا $(a_1 \cdots a_k \cdots a_{k+n})$ مختصات نقطه q می‌باشد.

براحتی می‌توان بررسی نمود که نگاشت زیر یک ایزومورفیسم فضای برداری است (دترمینان آن مخالف صفر است).

$$(\pi_*)_p|_{\Delta_p} : \Delta_P \to T_{\circ} I\!R^k$$

به دلیل پیوستگی، مقدار دترمینان در یک همسایگی U از p مخالف صفر باقی می‌ماند $V \supset U$ و لذا $\pi_*|_{\Delta_q}$ یک ایزومورفیسم برای هر $q \in U$ می باشد. بنابراین می توانیم $(X_{\text{١}})_q \cdots (X_k)_q \in \Delta_q$ را طوری پیدا کنیم که

$$(\pi_* X_i)_q = \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{\pi(q)}$$

در نتیجه

$$\pi_*[X_i, X_j]_q = [\pi_* X_i, \pi_* X_j]_{\pi(q)} = [\frac{\partial}{\partial y^i}\ ,\ \frac{\partial}{\partial y^j}]_{\pi(q)} = \circ$$

چون Δ گسترنده است $[X_i, X_j] \in \Delta$ و از طرفی $\pi_*|_\Delta$ یک ایزومورفیسم است (π_* یک به یک است و $\pi_*(\circ) = \circ$) لذا داریم:

$$[X_i, X_j] = \circ$$

حال با استفاده از قضیه بازسازی چند میدان برداری بطور همزمان (بخش ۸ همین فصل) می‌توان مختصات (x^α) ، $\alpha = \text{١}, \cdots, n+k$ روی $V \supset U$ را طوری پیدا کرد که داشته باشیم

$$X^i = \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad i = \text{١}, \cdots ; k$$

براحتی مشاهده می‌شود که این همان دستگاه مختصات مورد نظر ما می‌باشد، زیرا مجموعه‌های $\{q' \in U | x^{k+\text{١}}(q') = C_{k+\text{١}}, \cdots, x^{k+n}(q') = C_{k+n}\}$ زیرمنیفلدهای انتگرال Δ هستند و فضای مماس بر آنها توسط $X^i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ تولید می‌شود. □

برگ‌سازی یک منیفلد

حال برای بیان صورت سرتاسری قضیه فروبنیوس به بیان مفهوم برگ سازی[1] می‌پردازیم. به عبارت ساده وقتی از برگ‌سازی یا لایه‌سازی (k_بعدی) یک منیفلد M صحبت می‌کنیم

---

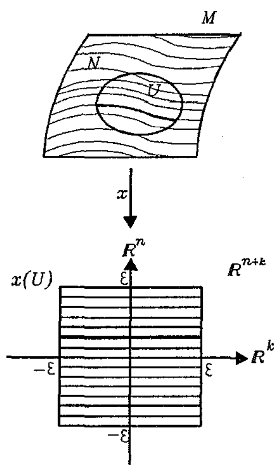
[1] $Foliation(Feuilletage)$

منظور ما این است که M توسط زیرمنیفلدهای k_بعدی برگ برگ یا لایه لایه شده باشد. به عبارت دیگر از هر نقطه M یک و تنها یک زیرمنیفلد k_بعدی می‌گذرد که از نظر دیفرانسیل‌پذیری بستگی به آن نقطه دارد. هر یک از این زیرمنیفلدها را یک برگ[۲] یا لایه[۳] برگ‌سازی می‌نامیم. به عبارت کامل‌تر تعریف زیر را داریم.

تعریف: *فرض کنیم M یک منیفلد C^∞، $(n+k)$_بعدی باشد. یک زیرمنیفلد k_بعدی (معمولاًناهمبند) N را یک برگ‌سازی M گوئیم اگر:*

- *هر نقطه M در (بعضی از مولفه‌های) N قرار داشته باشد.*
- *به ازاء هر p از M یک کارت (x,U) در همسایگی p با فرض*

$$x(U)=]-\xi,+\xi[^{k+n}$$



شکل ۶.۲۵: یک برگ‌سازی روی M

موجود باشد بطوریکه مولفه‌های $N\cap U$ مجموعه‌هایی به صورت زیر باشند.

$$\{q\in U|x^{k+1}(q)=C_{k+1},\cdots,x^{k+n}(q)=C_{k+n}\} \quad ، \quad |C_i|<\xi \text{ بازاء}$$

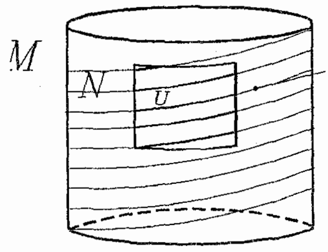
*در این صورت هر مولفه N را یک **برگ یا لایه برگ‌سازی** می‌نامیم.*

---

[۲] $Folium(Feuille)$

[۳] $Leaf$

مثال ۱: یک میدان برداری که منحنی انتگرال آن یک مارپیچ بر روی استوانه است می‌تواند یک برگ سازی برای این استوانه تعریف نماید. به نمودار زیر توجه بفرمائید.



شکل ۶.۲۶: یک برگ‌سازی روی استوانه

از این مثال همینطور نتیجه می‌شود که دو مولفه مجزای $N \cap U$ می‌تواند متعلق به یک برگ از برگ‌سازی N باشد.

مثال ۲: یک میدان برداری غیرصفر روی M یک توزیع یک بعدی معین می‌کند. این توزیع یک بعدی همواره دارای زیرمنیفلدهای انتگرال یک بعدی است (بنابر قضیه وجود و یکتایی جواب در معادلات دیفرانسیل معمولی). **لذا هر توزیع یک بعدی دارای یک زیرمنیفلد انتگرال یک بعدی است که یک برگ‌سازی یک بعدی تعریف می‌کند.**

بطور کلی برگ‌سازی‌ها توسط زیرمنیفلدهای انتگرال توزیع‌های انتگرال‌پذیر تعریف می‌گردند. این موضوع در قضیه سرتاسری فروبنیوس به صورت زیر بیان می‌گردد.

قضیه فروبنیوس (صورت سرتاسری): اگر Δ یک توزیع kـبعدی C^∞ و گسترنده روی M باشد. آنگاه M توسط زیرمنیفلد انتگرال Δ برگ‌سازی می‌شود. (در این صورت هر مولفه را **یک زیرمنیفلد انتگرال ماکزیمال** Δ می‌نامیم).

از این قضیه همچنین نتیجه می‌شود که از هر نقطه M یک و تنها یک زیرمنیفلد انتگرال ماکزیمال Δ می‌گذرد.

به منظور رعایت اختصار از آوردن اثبات این قضیه خودداری می‌نمائیم علاقه‌مندان می‌توانند به کتاب $Spivak\ I$ صفحه ۲۶۵ مراجع نمایند. برای توضیحات هندسی بیشتر در مورد

برگ‌سازی می‌توان به عنوان مثال به کتاب $Conlon$ و یا کتاب $Fomenko$ ، $Novikov$ ، $Doubrovine$ نیز مراجعه نمود.

دیدگاه جالب دیگری از صورت سرتاسری قضیه فروبنیوس (رابطه انتگرال‌پذیری و فرم‌های دیفرانسیل‌پذیر) موجود است که در کتاب $Sharpe$ بطور مبسوطی مورد مطالعه قرار گرفته است. خواننده علاقه‌مند می‌تواند به فصل دوم این کتاب به نام برگ‌سازی مراجعه نماید.

۱۰.۶ § تعبیر تحلیلی قضیه فروبنیوس: انتگرال‌پذیری دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی درجه اول

دستگاه معادلات با مشتقات جزئی درجه اول زیر را در نظر می‌گیریم.

$$(1)\qquad \begin{cases} F(x,y,u,u_x,u_y) &= 0 \\ G(x,y,u,u_x,u_y) &= 0 \end{cases}$$

در اینجا x و y متغییرهای مستقل و $u = u(x,y)$ تابعی نامشخص از x, y بوده و

$$\begin{aligned} F,G:&\quad U\subset \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R} \\ F:&\quad (x,y,z,p,q)\to F(x,y,z,p,q) \\ G:&\quad (x,y,z,p,q)\to G(x,y,z,p,q) \end{aligned}$$

با فرض اینکه بتوان دستگاه معادله فوق را بر حسب u_x و u_y حل نمود (یعنی بطور موضعی اگر $\begin{vmatrix} F_p & F_q \\ G_p & G_q \end{vmatrix} \neq 0$) معادله (۱) به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} &= f(x,y,u(x,y)) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} &= g(x,y,u(x,y)) \end{cases}$$

همانطور که در بخش قبل دیدیم یک شرط لازم برای انتگرال پذیری دستگاه (۲) عبارت است از

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} \quad \text{یا} \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}$$

که با استفاده از (۲) به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}g=\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial z}f} \qquad (۳)$$

قضیه فروبنیوس ثابت می‌نماید که این شرط کافی نیز هست. (با اثبات وجود یک جواب برای u). میدان توزیع $I\!R^۳$ را در نظر می‌گیریم. تذکر ۲ بخش § ۸ را یادآوری می‌کنیم.

$$\Delta_{(a,b,c)}: z-c=f(a,b,c)(x-a)+g(a,b,c)(y-b)$$

همانطوریکه دیدیم Δ انتگرال پذیر است اگر وتنها اگر دستگاه (۲)انتگرال پذیر باشد. از طرف دیگر پایه زیر برای Δ را در نظر می‌گیریم.

$$X=(۱,\circ,f)=\frac{\partial}{\partial x}+f\frac{\partial}{\partial z}$$
$$Y=(\circ,۱,g)=\frac{\partial}{\partial y}+g\frac{\partial}{\partial z}$$

چون X و Y پایه Δ می‌باشند Δ گسترنده خواهد بود اگر وتنها اگر $[X,Y]\in\Delta$ بنابراین

$$[X,Y]=\left[\frac{\partial}{\partial x}+f\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial y}+g\frac{\partial}{\partial z}\right]=\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial z}f-\frac{\partial f}{\partial z}g\right)\frac{\partial}{\partial z}$$

در نتیجه داریم $[X,Y]\in\Delta$ اگر وتنها اگر $[X,Y]=\circ$ بنابراین Δ گسترنده است اگر و تنها اگر داشته باشیم

$$\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial z}f-\frac{\partial f}{\partial z}g=\circ$$

بنابراین قضیه فروبینوس معادل بودن مفهوم انتگرال پذیری و گسترندگی را بیان می‌نماید. از مطالب بالا قضیه فروبینوس در حالت $I\!R^۳$ ثابت می‌شود.

قضیه فروبنیوس (حالت خاص): **دستگاه معادلات زیر را در نظر می‌گیریم.**

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x} &= f(x,y,u(x,y))\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y} &= g(x,y,u(x,y))\end{cases}$$

که در آن توابع f و g از کلاس $C^۱$ بوده و به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} f,g : U\times V\subset I\!R^۲\times I\!R &\to I\!R \\ (x,y:z) &\to I\!R \end{aligned}$$

آنگاه به ازاء هر $(x_۰,y_۰;z_۰)\in U\times V$ یک همسایگی W از $(x_۰,y_۰)$ در $I\!R^۲$ و یک جواب $u:W\to V$ یعنی $u(x_۰,y_۰)=z_۰$ برای دستگاه بالا وجود دارد اگر وتنها اگر

$$\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial z}f-\frac{\partial f}{\partial z}g=۰$$

در حالت کلی قضیه زیر را داریم

قضیه فروبنیوس (شکل تحلیلی): در دستگاه معادلات

$$\begin{cases} \frac{\partial u^۱}{\partial x^۱} &= f_۱^۱(x^۱,\cdots,x^n,u^۱(x^۱,\cdots,x^n),\cdots,u^k(x^۱,\cdots,x^n)) \\ \quad\vdots & \\ \frac{\partial u^۱}{\partial x^n} &= f_n^۱(x^۱,\cdots,x^n,u^۱(x^۱,\cdots,x^n),\cdots,u^k(x^۱,\cdots,x^n)) \\ \frac{\partial u^۲}{\partial x^۱} &= f_۱^۲(x^۱,\cdots,x^n,u^۱(x^۱,\cdots,x^n),\cdots,u^k(x^۱,\cdots,x^n)) \\ \quad\vdots & \\ \frac{\partial u^۲}{\partial x^n} &= f_n^۲(x^۱,\cdots,x^n,u^۱(x^۱,\cdots,x^n),\cdots,u^k(x^۱,\cdots,x^n)) \\ \quad\vdots & \\ \frac{\partial u^k}{\partial x^۱} &= f_۱^k(x^۱,\cdots,x^n,u^۱(x^۱,\cdots,x^n),\cdots,u^k(x^۱,\cdots,x^n)) \\ \quad\vdots & \\ \frac{\partial u^k}{\partial x^n} &= f_n^k(x^۱,\cdots,x^n,u^۱(x^۱,\cdots,x^n)\cdots u^k(x^۱,\cdots,x^n)) \end{cases}$$

یا بطور اختصار اگر $\alpha=۱,\cdots,k$ و $i=۱,\cdots,n$ دستگاه معادلات زیر را در نظر می‌گیریم

$$\boxed{\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}=f_i^\alpha(x^۱,\cdots x^n,u^۱(x^۱,\cdots,x^n),\cdots,u^k(x^۱,\cdots,x^n))}$$

که در آن توابع f_i^α از کلاس C^1 می‌باشند.

$$f_i^\alpha : U \times V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$$

آنگاه به ازاء هر $(x_0, z_0) \in U \times V$ یک همسایگی W از x_0 در U و یک و تنها یک جواب $u : W \to V$ یعنی $u(x_0) = z_0$ وجود دارد اگر وتنها اگر

$$\boxed{\frac{\partial f_j^\alpha}{\partial x^i} - \frac{\partial f_i^\alpha}{\partial x^j} + \sum_{s=1}^{k}\left(\frac{\partial f_j^\alpha}{\partial z^s} f_i^s - \frac{\partial f_i^\alpha}{\partial z^s} f_j^s\right) = 0}$$

در اینجا $z^s = u^s$.

اثبات:

برای اثبات این قضیه یک میدان توزیع Δ در $\mathbb{R}^{n+k}$ به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} x_{n+1} - c_1 & = f_1^1(a_1, \cdots, a_n, c_1, \cdots, c_k)(x_1 - a_1) \\ & \quad + \cdots + f_n^1(a, c)(x_n - a_n) \\ \vdots & \\ x_{n+k} - c_k & = f_1^k(a, c)(x_1 - a_1) - \cdots + f_n^k(a, c)(x_n - a_n) \end{cases}$$

منیفلدهای انتگرال در صورت وجود به‌صورت زیر می‌باشند.

$$\begin{aligned} & N = \{(x_1, \cdots, x_{n+k}) \in \mathbb{R}^{n+k} | x_1 = x_1, \cdots, x_n = x_n \\ & x_{n+1} = U^1(x_1, \cdots x_n), \cdots \\ & x_{n+k} = U^k(x_1, \cdots, x_n)\} \end{aligned}$$

که فضای مماس بر آنها توسط بردارهای زیر تولید می‌شود. (X_iها اعضای پایه TN هستند)

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial u^1}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_{n+1}} + \cdots + \frac{\partial u^k}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_{n+k}} \\ &\vdots \\ X_n &= \frac{\partial}{\partial x_n} + \frac{\partial u^1}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial x_{n+1}} + \cdots + \frac{\partial u^k}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial x_{n+k}} \end{aligned}$$

سپس مشابه حالت $I\!R^{3}$ شرط آنکه این بردارها Δ را تولید نمایند بررسی می‌نمائیم. الی آخر. به این صورت اثبات قضیه کامل می‌گردد. $\square$

تمرین:

۱ـ فرض کنیم $M = \{(x,y,z) | x > 0, y > 0, z > 0\}$ یک زیرمنیفلد باز $I\!R^{3}$ باشد. میدان‌های برداری زیر یک توزیع Δ یا میدان kـصفحه‌ای روی M تولید می‌کنند

$$X = \sqrt{y}\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{x}\frac{\partial}{\partial y} \ , \ Y = \sqrt{z}\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{x}\frac{\partial}{\partial z}$$

الف ـ نشان دهید توزیع Δ انتگرال‌پذیر است.

ب ـ اگر $f : M \to I\!R$ تابع $f(x,y,z) = x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + z\sqrt{z}$ باشد ثابت کنید برای هر $a > 0$، زیرمجموعه $f^{-1}(a)$ یک زیرمنیفلد نشاننده (ایمبدد) است که یک زیرمنیفلد انتگرال برای توزیع Δ می‌باشد.

ج ـ نشان دهید زیرمنیفلدهای انتگرال در (ب) ماکزیمال هستند. (یعنی M را برگ‌سازی می‌کنند)

راهنمایی: صورت سرتاسری قضیه فروبنیوس را ببینید.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

فصل ۷: انتگرال روی منیفلدها[1]

مقدمه

برای محاسبه انتگرال روی منیفلدها ابتدا باید ببینیم انتگرال روی $I\!R^n$ پس از یک تغییر متغیر (تغییر مختصات) چطور محاسبه می‌شود. برای این کار فرمول تغییر متغیر در انتگرال معین روی فاصله‌ای از $I\!R$ را بررسی می‌نمائیم. فرض کنیم می‌خواهیم از تغییر متغیر $x = \mathcal{P}(\epsilon)$ استفاده کنیم.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\mathcal{P}(\epsilon))\mathcal{P}'(\epsilon)d\epsilon$$

نگاشت $x = \mathcal{P}(\epsilon)$ یک دیفئومورفیسم بین دو فاصله باز از $I\!R$ یکی شامل نقاط α و β و دیگری شامل $a = \mathcal{P}(\alpha)$ و $b = \mathcal{P}(\beta)$ می‌باشد. در اینجا فرض نمی‌کنیم که الزاماً $a < b$ یا $\alpha < \beta$. قرارداد $\int_b^a - = \int_a^b$ به ما اجازه می‌دهد که فرمول بالا را بدون شرط $a < b$ یا $\alpha < \beta$ بیان نمائیم. این قرارداد همچنین اجازه می‌دهد که در فرمول بالا بجای $|\mathcal{P}'(\epsilon)|$ مقدار $\mathcal{P}'(\epsilon)$ را قرار دهیم.

حال ۱ـفرمی دیفرانسیل‌پذیر ω را روی $[a, b]$ به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\omega = f(x)dx$$

[1] *Integral on manifolds (Integral sur les variétés)*

با استفاده از مفهوم "تصویر معکوس یک فرم دیفرانسیل‌پذیر" انتگرال بالا را می‌توان به‌صورت زیر نوشت.

$$\int_a^b \omega = \int_\alpha^\beta \mathcal{P}^*\omega$$

زیرا با استفاده از تغییر متغیر $x = \mathcal{P}(\epsilon)$ داریم:

$$\mathcal{P}^*\omega = \mathcal{P}^*(fdx) = f\circ\mathcal{P}d(x\circ\mathcal{P}) = f(\mathcal{P}(\epsilon))\mathcal{P}'(\epsilon)d\epsilon$$

(در اینجا x به‌عنوان تابع مختصات اول عمل می‌کند به این معنی که به هر nـتایی اولین مولفه آنرا وابسته می‌سازد لذا $x\circ\mathcal{P} = \mathcal{P}$) بنابراین مشاهده می‌کنیم که تغییر متغیر در انتگرال‌ها توسط فرم‌های دیفرانسیل‌پذیر بهتر بیان می‌گردد. ما قبلاً با انتگرال‌گیری از فرم‌های دیفرانسیل‌پذیر مرتبه یک روی منیفلدهای یک بعدی (خم‌ها) و همینطور با انتگرال‌گیری از فرم‌های مرتبه دوم روی منیفلدهای دوبعدی (رویه‌ها) در ریاضی عمومی آشنا شده‌ایم در اینجا در بخش ۱§ این انتگرال‌ها را توسط فرم‌ها بیان نموده، سپس آنرا روی منیفلدهای یک بعدی تعریف می‌نمائیم. در بخش‌های بعد به تعمیم آن برای منیفلدهای n بعدی و اثبات قضایای اساسی مانند قضیه استوکس می‌پردازیم. این قضیه تعمیم قضایای گرین، استوکس، و دیورژانس(گاوس) در ریاضی عمومی بوده و آنرا *قضیه اساسی در نظریه حساب دیفرانسیل و انتگرال روی منیفلدها* نیز می‌نامند.

پیوست I در انتهای بخش ۱§ تحت عنوان هموتوپی آورده شده است. در اینجا خواننده علاقه‌مند می‌تواند در ضمن آشنایی با این مفهوم روش تعمیم یک قضیه در مورد انتگرال‌ها در آنالیز حقیقی را برای منیفلدها فراگیرد. نظر به اینکه این مطالب رابطه مستقیمی با تعریف انتگرال روی منیفلدها که هدف ما در این فصل است ندارد، در اینجا به عنوان ضمیمه بخش اول آورده شده است.

در بخش ۲§ با تعریف انتگرال روی زنجیرها مقدمات اثبات قضیه استوکس روی زنجیرها در بخش ۳§ را فراهم می‌آوریم.[1]

---

[1] این مباحث در کتاب آنالیز روی منیفلدها تألیف $Spivak$ که به فارسی نیز ترجمه شده است بطور مبسوطی مورد مطالعه قرار گرفته است.

در بخش §۴ با مفهوم مرز یک منیفلد آشنا شده، در بخش §۵ اثبات قضیه استوکس روی منیفلدها را فرا می‌گیریم.

با مطالعه همانستگی دورام در بخش §۶ می‌توان به اطلاعات مفیدی در مورد خصوصیات یک منیفلد و تفاوتهایی که با $I\!R^n$ دارد دست یافت.

سه بخش اول این فصل برای درک مفهوم انتگرال روی منیفلدها جنبه پایه داشته خوانندگان مبتدی می‌توانند براحتی آنرا در نگرش اول خود مورد مطالعه قرار داده، سه بخش آخر فصل را در مراجعات بعدی مطالعه نمایند.

۱.۷ § انتگرال روی منیفلدهای یک‌بعدی(انتگرال روی خم)[۱]

با توجه به مطالب فوق می‌توان انتگرال روی منیفلدهای یک بعدی را به‌صورت زیر تعریف نمود. فرض کنیم M منیفلد n بعدی، $\omega \in \Omega^1(M)$ و $C : [a, b] \to M$ یک منحنی هموار (یا یک منیفلد یک بعدی) روی M باشد آنگاه می‌دانیم $C^*\omega \in \Omega^1([a, b])$ بنابراین می‌توانیم فرض کنیم $C^*\omega = g(t)dt$ حال تعریف می‌کنیم

$$\boxed{\int_C \omega = \int_a^b C^*\omega = \int_a^b g(t)dt}$$

با استفاده از تعریف فوق می‌توان قضیه زیر را که موسوم به **قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال و یا قضیه استوکس روی منیفلدهای یک بعدی** است ثابت نمود.

قضیه: اگر $C_1 : [a, b] \to M$ و $C_2 : [\alpha, \beta] \to M$ **منحنی‌های هموار روی** M **با نقاط ابتدایی و انتهایی یکسان بوده و** $f \in C^\infty(M)$ **آنگاه**

$$\int_{C_1} df = \int_{C_2} df = f(B) - f(A)$$

که در اینجا $A = C_1(a) = C_2(\alpha)$ و $B = C_1(b) = C_2(\beta)$

---

[۱] *Line Integral*

اثبات: بنابر تعریف بالا داریم

$$\begin{aligned}\int_{C_1} df &= \int_a^b C_1^*(df) = \int_a^b d(f \circ C_1) \\ &= f(C_1(b)) - f(C_1(a)) = f(C_2(\beta)) - f(C_2(\alpha)) \\ &= \int_\alpha^\beta d(f \circ C_2) = \int_\alpha^\beta C_2^* df = \int_{C_2} df \quad \square\end{aligned}$$

یادآوری می‌کنیم که ۱ـفرمی $\omega \in \Omega^1(M)$ را **کامل** گوئیم اگر تابعی مانند $f \in C^\infty(M)$ موجود باشد بطوریکه

$$\omega = df$$

و $\omega \in \Omega^1(M)$ را **بسته** گوئیم اگر $d\omega = 0$.

مثال ۱: سهمی H در $I\!R^2$، $H = \{(x,y) \in I\!R^2 | x = t, y = t^2, t \in I\!R\}$ را که توسط تصویر تابع

$$\begin{aligned} C : I\!R &\to H \subset I\!R^2 \\ t &\to (t, t^2) \end{aligned}$$

تعریف می‌گردد در نظر می‌گیریم. براحتی با تعریف یک کارت می‌توان نشان داد که H یک منیفلد C^∞ به بعد یک است. فرض کنیم ω یک ۱ـفرمی در $I\!R^2$ باشد که به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\omega = xdy - ydx$$

در اینجا x و y توابع مختصاتی روی $I\!R^2$ هستند. می‌خواهیم انتگرال زیر را در فاصله $[-1, 1]$ محاسبه کنیم.

$$\int_C \omega$$

ابتدا مقدار $C^*\omega$ را بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} C^*\omega &= C^*(xdy - ydx) = C^*xC^*dy - C^*yC^*dx \\ &= x \circ Cd(y \circ C) - y \circ Cd(x \circ C) = tdt^2 - t^2dt = t^2dt \end{aligned}$$

در حقیقت $C^*\omega$ عبارت است از مقدار ۱ـفرمی ω برحسب t، به عبارت دیگر $C^*\omega$ همان مقدار ω بر روی منیفلد H می‌باشد که در ریاضی عمومی آنرا مستقیماً با قراردادن t و $t^۲$ بجای x و y در معادله ω بدست می‌آوردیم. لذا داریم

$$\int_C \omega = \int_{-۱}^{+۱} C^*\omega = \int_{-۱}^{+۱} t^۲ dt = \frac{۲}{۳}$$

همانطوریکه در ریاضی عمومی آشنا شدیم، تعبیر فیزیکی انتگرال روی منیفلد یک‌بعدی، $\int_C \omega$ کار انجام شده توسط نیروی ω در طول منحنی C است.

یادآوری می‌کنیم که منحنی C را هموار[۱] گوئیم اگر مولفه‌های آن از کلاس $C^۱$ باشند. یک منحنی **تکه‌ای هموار**[۲] یک منحنی است که از چند منحنی هموار تشکیل شده باشد. به این صورت انتگرال روی یک منحنی تکه‌ای هموار را می‌توان به‌صورت مجموع چند انتگرال روی منحنی‌های هموار تعریف نمود.

لم: اگر $\omega \in \Omega^۱ M$ و به ازاء هر منحنی تکه‌ای هموار C داشته باشیم $\int_C \omega = ۰$ آنگاه

$$\omega = ۰$$

اثبات: از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنیم نقطه‌ای مانند $p \in M$ و بردار $X_p \in T_pM$ موجود باشد بطوریکه

$$\omega_p(X_p) > ۰$$

همچنین فرض کنیم $C : [-\epsilon, \epsilon] \to M$ یک منحنی هموار روی M باشد بطوریکه $C(۰) = p$، $C'(t) = X$ و $C'(۰) = X_p$. اگر ϵ به اندازه کافی کوچک اختیار شود، می‌توان فرض کرد که در همسایگی صفر داریم

$$-\epsilon \leq t \leq \epsilon ،\qquad \omega_{c(t)}(X) > ۰$$

---

[۱] *smooth curve (courbe lisse)*

[۲] *piecewise smooth curve*

لذا در این همسایگی با فرض $\omega = f(x)dx$ داریم:

$$(C^*\omega)_t = (C^*(fdx))_t = (f \circ C dx \circ C)_t = \omega_{c(t)} > 0$$

لذا داریم

$$\int_C \omega = \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} C^*\omega = \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \omega_{c(t)} > 0$$

این رابطه با فرض لم متناقض است لذا فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود. □

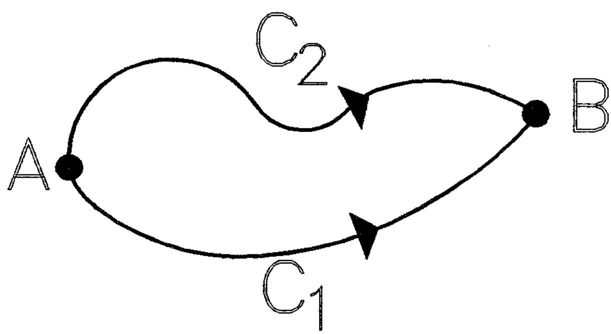
منحنی تکه‌ای هموار C را بسته گوئیم اگر ابتدا و انتهای C بر یکدیگر منطبق باشد.

قضیه: اگر $\omega \in \Omega^1(M)$ باشد، عبارات زیر معادلند.

Iـ **ω کامل است**

IIـ **به ازاء هر منحنی تکه‌ای هموار بسته C داریم $\int_C \omega = 0$**

IIIـ **انتگرال ω به مسیر بستگی ندارد.**



شکل ۷.۱: جهت انتگرال‌گیری

اثبات : قسمت اول ـ نشان می‌دهیم $I \Leftarrow II$. چون ω کامل است داریم $\omega = df$. اگر C منحنی تکه‌ای هموار بسته باشد بنابر قضیه استوکس برای منیفلدهای یک بعدی داریم

$$\int_C \omega = \int_C df = 0$$

قسمت دوم ـ نشان می‌دهیم $II \Leftarrow III$. فرض کنیم C_1 و C_2 منحنی‌های تکه‌ای هموار باشند که از نقطه A شروع و به نقطه B ختم شوند، بطوریکه اجتماع آنها منحنی C را تشکیل دهد.

با توجه به رعایت جهت انتگرال‌گیری می‌توان نوشت

$$\int_C \omega = \int_{C_1} \omega - \int_{C_2} \omega$$

بنابر فرض II داریم

$$\int_{C_1} \omega = \int_{C_2} \omega$$

قسمت سوم ـ نشان می‌دهیم $III \Leftarrow I$. باید در این قسمت با استفاده از III تابعی حقیقی و دیفرانسیل‌پذیر مانند f روی M طوری تعریف کنیم که $df = \omega$. بدون آنکه از کلیت مسئله کاسته شود فرض می‌کنیم M همبند باشد (در غیر اینصورت f را روی مولفه‌های همبند M بطور جداگانه تعریف می‌نمائیم)فرض کنیم x نقطه دلخواهی از M باشد. با توجه به همبندی M می‌توان منحنی تکه‌ای همواری مانند C طوری تعریف نمود که $C(a) = x_0$ و $C(b) = x$ باشد.

$$C : [a, b] \to M$$

حال قرار می‌دهیم

$$f(x) = \int_C \omega$$

بنابر فرض III این انتگرال به انتخاب منحنی تکه‌ای هموار C بین نقطه x_0 و x بستگی ندارد. در اینجا $f(x_0) = 0$ فرض شده است.

ابتدا ثابت می‌کنیم که تابع $f : M \to I\!R$ که به‌صورت بالا تعریف شده است دیفرانسیل‌پذیر است سپس نشان می‌دهیم $df = \omega$.

فرض کنیم $p \in M$ نقطه دلخواهی باشد. یک کارت مختصاتی در همسایگی U از p

در نظر می‌گیریم. در این صورت داریم

$$\omega \underset{U}{=} \sum_{i=1}^{n} g_i dx_i$$

به ازاء هر $x \in U$ فرض کنیم $C_x : [0, 1] \to U$ توسط $C_x(t) = tx$ ، $0 \leq t \leq 1$
و تابع f در U توسط رابطه زیر تعریف شود.

$$f(x) = f(p) + \int_{C_x} \omega$$

بنابراین در U با محاسبه مقدار ω در روی منحنی C_x و جایگذاری آن در انتگرال بالا داریم

$$\begin{aligned} f(x_1, \cdots, x_n) &= f(0) + \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 g_i(tx_1, \cdots, tx_n) \frac{d(tx_i)}{dt} dt \\ &= f(0) + \sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 g_i(tx_1, \cdots, tx_n) dt \end{aligned}$$

این تابع به وضوح دیفرانسیل‌پذیر است، زیرا

$$x_i \int_0^1 g_i(tx_1, \cdots tx_n) dt = \int_0^{x_i} g_i(tx_1, \cdots, tx_n) d(tx_i)$$

حال نشان می‌دهیم $\omega = df$. فرض کنیم C منحنی تکه‌ای هموار دلخواه باشد، $C : [a, b] \to M$ و $d < a$ همچنین فرض کنیم $C_0 : [d, a] \to M$ منحنی تکه‌ای هموار باشد که $C_0(d) = x_0$ و $C_0(a) = C(a)$ آنگاه داریم

$$f(C(b)) = \int_{C_0+C} \omega = \int_{C_0} \omega + \int_C \omega = f(C(a)) + \int_C \omega$$

از آنجا

$$\int_C \omega = f(C(b)) - f(C(a)) = \int_C df$$

در نتیجه به ازاء هر منحنی تکه‌ای هموار C داریم $\int_C (\omega - df) = 0$ از آنجا بنابر لم قبل نتیجه می‌شود

$$\omega = df \qquad \square$$

تعریف: ۱ـفرمی $\omega \in \Omega^1(M)$ را **بطور موضعی کامل**[1] گوئیم اگر به ازاء هر $p \in M$ یک همسایگی باز U از p موجود باشد بطوریکه $\omega|_U \in \Omega^1(U)$ کامل باشد.

ممکن است ۱ـفرمی ω بطور موضعی کامل باشد اما کامل نباشد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۲: فرض کنیم $M = I\!R^2 \setminus \{(0,0)\}$ باشد ۱ـ فرمی ω را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

ابتدا نشان می‌دهیم ω بطور موضعی کامل است. در حقیقت اگر $p \in M$ روی محور yها قرار نداشته باشد، می‌توان فرض کرد $\theta = arctg \quad y/x$ که در یک همسایگی p موجود و مشتق‌پذیر است. با یک محاسبه کوچک داریم $\omega = d\theta$. به همین صورت اگر $p \in M$ روی محور xها قرار نداشته باشد با اختیار $\theta = -arctg \quad x/y$ می‌بینیم $\omega = d\theta$

چون هیچ نقطه‌ای از M روی هر دو محور قرار ندارد، بنابر تعریف، ω بطور موضعی کامل است. حال نشان می‌دهیم ω کامل نیست. فرض کنیم $C : [0,1] \to M$ یک منحنی بسته هموار باشد که توسط رابطه $C(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ تعریف می‌شود. می‌خواهیم $\int_C \omega$ را بدست آوریم. برای این‌کار می‌توان $C^*\omega$ را به یکی از دو روش زیر محاسبه نمود.

روش اول: محاسبه $C^*\omega$ با استفاده از خواص نگاشت C^*

$$\begin{aligned} C^*\omega &= \frac{-y}{x^2+y^2} \circ C \mathrm{d}(x \circ C) + \frac{x}{x^2+y^2} \circ C \mathrm{d}(y \circ C) \\ &= -\sin 2\pi t \mathrm{d} \cos 2\pi t + \cos 2\pi t \ \mathrm{d} \sin 2\pi t \\ &= 2\pi(\sin^2 2\pi t + \cos^2 2\pi t)\mathrm{d}t = 2\pi \mathrm{d}t \end{aligned}$$

روش دوم: محاسبه ۱ـفرمی ω روی دایره C، با جایگذاری توابع مختصاتی x و y، بطوریکه

---

[1] *Locally exact (Locallement exacte)*

x و y در معادله C صدق نمایند.

$$\frac{-\sin ۲\pi t}{\cos^{۲} ۲\pi t + \sin^{۲} ۲\pi t} \mathrm{d} \cos ۲\pi t + \frac{\cos ۲\pi t}{\cos^{۲} ۲\pi t + sin^{۲} ۲\pi t} \mathrm{d} \sin ۲\pi t$$
$$= ۲\pi \mathrm{d}t$$

لذا مقدار انتگرال به‌صورت زیر بدست می‌آید.

$$\int_C \omega = \int_{۰}^{۱} C^* \omega = ۲\pi \int_{۰}^{۱} dt = ۲\pi \neq ۰$$

بنابر قضیه قبل ۱ـفرمی ω کامل نیست.

تذکر: ۱ـفرمی مثال بالا قابل تعمیم به $I\!R^{۲}$ نیست. می‌توان نشان داد که در $I\!R^n$ هر ۱ـفرمی بطور موضعی کامل، کامل است.[1] در مثال فوق به دلیل حذف نقطه‌ای از $I\!R^{۲}$ این موضوع برقرار نبود، زیرا فضای $I\!R^{۲} \backslash \{۰, ۰\}$ و $I\!R^{۲}$ دارای خواص توپولوژیکی متفاوت هستند.

تمرین:

۱ـ نشان دهید هر ۱ـفرمی روی $I\!R$ کامل است.

۲ـ یک ۱ـفرمی روی دایره $S^{۱}$ طوری تعریف کنید که بطور موضعی کامل بوده اما کامل نباشد.

۳ـ فرض کنیم $C : [a, b] \to M$ یک منحنی هموار و $\mathcal{P} : [c, d] \to [a, b]$ یک تغییر مختصات دیفرانسیل‌پذیر باشد. (یعنی $det \mathcal{P}_* \neq ۰$) نشان دهید $\forall \omega \in \Omega^{۱}(M)$ اگر $\mathcal{P}(c) = a$ و $\mathcal{P}(d) = b$ آنگاه

$$\int_C \omega = \int_{C \circ \mathcal{P}} \omega$$

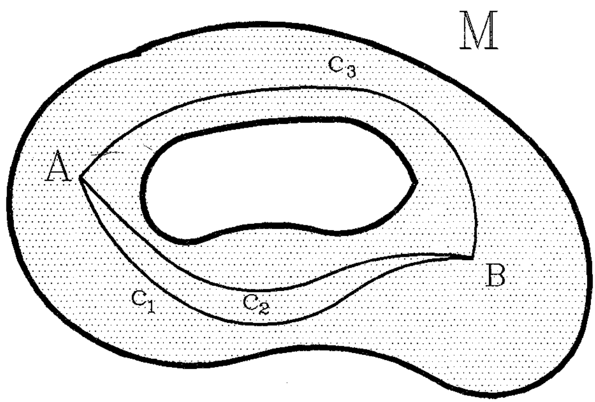
اگر $\mathcal{P}(c) = b$ و $\mathcal{P}(d) = a$ آنگاه

$$\int_C \omega = -\int_{C \circ \mathcal{P}} \omega$$

[1] اثبات این موضوع در پیوست همین بخش آورده شده است.

پیوست I: هموتوپی[1]

مقدمه: فرض کنیم A و B نقاطی روی ناحیه باز M باشند که توسط سه منحنی C_1، C_2، C_3 به یکدیگر مرتبط می‌شوند. منحنی C_1 را می‌توان بطور پیوسته تغییر شکل داده به روی C_2 منتقل نمود. این تغییر شکل توسط خانواده‌ای از منحنی‌های هموار صورت می‌گیرد که همگی در M قرار دارند.



شکل ۲.۷ : منحنی‌های هموتوپ و غیرهموتوپ

دو منحنی را که دارای این خاصیت باشند هموتوپ می‌نامند. در شکل بالا C_1 و C_2 هموتوپ هستند ولی هیچیک از آنها نمی‌توانند با C_3 هموتوپ باشند (به دلیل حفره‌ای که در بین آنها وجود دارد).

---

[1] برای اطلاع بیشتر از پیوست اخیر می‌توانید به [۷] مراجعه کنید.

در آنالیز مختلط[1] ثابت می‌شود که اگر f تابعی تحلیلی باشد آنگاه برای منحنی‌های هموتوپ دلخواه $C_۱$ و $C_۲$ داریم

$$\int_{C_۱} f = \int_{C_۲} f$$

هدف ما تعمیم این قضیه برای ۱ـفرمی‌ها روی منیفلد M است.

تعریف: فرض کنیم $C_۰, C_۱ : [a,b] \to M$ طوقه‌های[2] تکه‌ای هموار (یعنی منحنی‌های تکه‌ای هموار بسته) باشند. می‌گوئیم $C_۰$ و $C_۱$ **هموتوپ**[3] می‌باشند و می‌نویسیم $C_۰ \sim C_۱$ اگر نگاشت پیوسته‌ای به‌صورت زیر

$$H : [a,b] \times [۰,۱] \to M$$

و یک افراز $a = t_۰ < t_۱ < \cdots < t_r = b$ موجود باشد بطوریکه

۱) $H|_{([t_{i-۱},t_i]\times[۰,۱])}$ هموار باشد. $۱ \leq i \leq r$

۲) $H(t,۰) = C_۰(t)$ و $H(t,۱) = C_۱(t)$ و $a \leq t \leq b$

۳) $H(a,\tau) = H(b,\tau)$ و $۰ \leq \tau \leq ۱$

هموتوپی یک رابطه هم‌ارزی است. در این پیوست منظور ما ارائه روشی جهت اثبات قضیه مهم زیر است.

قضیه: اگر ۱ـفرمی ω روی M موضعاً کامل بوده و طوقه‌های $C_۱$ و $C_۲$ تکه‌ای هموار و هموتوپ باشند آنگاه

$$\int_{C_۱} \omega = \int_{C_۲} \omega$$

نتیجه: هر ۱ ـ فرمی موضعاً کامل روی $I\!R^n$ کامل است.

اثبات نتیجه: فرض کنیم $C : [a,b] \to I\!R^n$ یک طوقه تکه‌ای هموار باشد. تعریف می‌کنیم

$$H : [a,b] \times [۰,۱] \to I\!R^n$$

---

[1] کتاب آنالیز ریاضی *Apostol* صفحه ۴۴۲

[2] *Loops*

[3] *Homotop*

بطوریکه

$$H(t, \tau) = \tau C(t)$$

در این صورت H یک هموتوپی از طوقه ثابت ۰ به طوقه C می‌باشد. اگر ω موضعاً کامل باشد از قضیه بالا نتیجه می‌شود

$$\int_s \omega = \int_0 \omega = 0$$

چون طوقه C دلخواه است از قضیه بخش قبل نتیجه می‌شود ۱ـفرمی ω کامل است. $\square$

اثبات قضیه: برای اثبات قضیه فوق به روش زیر عمل نمائید.

الف) فرض کنید $U \subset \mathbb{R}^2$ باز باشد، $R = [a,b] \times [c,d] \subset U$ و $\omega \in \Omega^1(U)$ موضعاً کامل باشد. به ازاء $\xi > 0$، فرض کنید

$$R_\xi = (a-\xi, b+\xi) \times (c-\xi, d+\xi)$$

نشان دهید عددی مانند $\xi > 0$ وجود دارد بطوریکه $R_\xi \subseteq U$ و $\omega|_{R_\xi}$ کامل باشد.

ب) فرض کنید $\varphi : M \to N$ نگاشت دیفرانسیل‌پذیر بین دو منیفلد M و N بوده و $\omega \in \Omega^1(N)$ موضعاً کامل باشد نشان دهید $\varphi^*(\omega) \in \Omega^1(M)$ موضعاً کامل است.

ج) از الف و ب استفاده نموده قضیه را ثابت کنید.

تمرین:

۱ـ اگر $n \geq 2$، نشان دهید هر ۱ـفرمی موضعاً کامل روی S^n، کامل است.

۲.۷ § انتگرال روی زنجیرها[1]

در این بخش تعریف انتگرال روی منیفلدهای یک بعدی یعنی منحنی‌هایی که توسط $C : [0,1] \to M$ تعریف می‌شوند را برای توابع $C : [0,1]^k \to M$ تعمیم می‌دهیم.

---

[1] *Integral on chains (Integral sur chaine)*

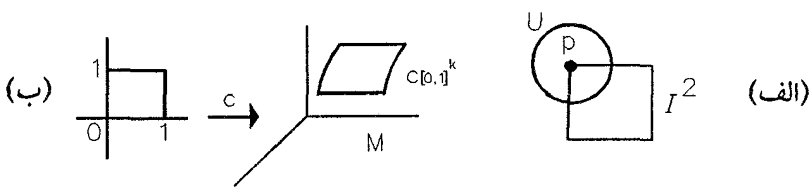
این توابع را kـمکعب منفرد نامیده مجموع صوری تعدادی متناهی از آنها را یک kـزنجیر خواهیم نامید.

قبلاً تعریف نگاشت دیفرانسیل‌پذیر روی یک باز از $\mathbb{R}^k$ را دیده‌ایم، حال این تعریف را برای یک مکعب بسته kـ بعدی به‌صورت زیر بیان می‌نمائیم.

تعریف: نگاشت $f : [0, 1]^k \subset \mathbb{R}^k \to M$ را از **کلاس** C^∞ گوئیم اگر به ازاء هر $p \in [0, 1]^k$ یک همسایگی U از p در $\mathbb{R}^k$ و یک نگاشت $\tilde{f} : U \to M$ از کلاس C^∞ موجود باشد بطوریکه

$$\tilde{f}|_{U \cap [0,1]^k} = f$$

به شکل (الف) در زیر توجه فرمائید



شکل ۷.۳ : ۲ ـ مکعب منفرد

تعریف: فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر به بعد n باشد. نگاشت C^∞ زیر را **kـمکعب منفرد**[1]

روی M می‌گوئیم. (به شکل ۷.۳ (ب) توجه فرمائید)

$$C : [0, 1]^k \to M$$

کلمه منفرد به این معنی است که نگاشت C الزاماً یک به یک نیست.

ـنگاشت (شمول طبیعی) $I^k : [0, 1]^k \to \mathbb{R}^k$ را kـ**مکعب استاندارد**[2] می‌نامیم.

---

[1] *singular k − cube*

[2] *Standard k cube*

_اگر $f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k \in \Omega^k([0,1]^k)$ تعریف می‌کنیم

$$\boxed{\int_{[0,1]^k} f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k = \int_{[0,1]^k} f dx^1 \cdots dx^k}$$

در اینجا انتگرال سمت راست همان انتگرال چندگانه ریمان یا لبگ است.

_اگر $\omega \in \Omega^k M$ و $C : [0,1]^k \to M$ یک k_مکعب منفرد باشد تعریف می‌کنیم

$$\boxed{\int_C \omega = \int_{[0,1]^k} C^* \omega}$$

_ در اینجا همواره $k \leq n$ فرض شده است. اگر $k = 0$ با فرض $[0,1]^k = \{0\}$، اگر تابع f یک ۰_فرمی روی M باشد، قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} C : \quad \{0\} &\longrightarrow M \\ 0 &\mapsto C(0) \end{aligned} \qquad\qquad \int_C f = f(C(0))$$

تعریف: گوئیم نگاشت C^∞ دوسویی $\mathcal{P} : [0,1]^k \to [0,1]^k$ یک **تغییر مختصات جهت‌نگهدار** یا **پارامترسازی مجدد جهت نگهدار**[1] است اگر همواره داشته باشیم

$$det \mathcal{P}_* > 0$$

قضیه: فرض کنیم $\mathcal{P}$ یک پارامترسازی مجدد جهت نگهدار بوده و $C : [0,1]^k \to M$ یک k_ مکعب منفرد باشد. آنگاه به ازاء هر $\omega \in \Omega^k M$ داریم

$$\int_C \omega = \int_{C \circ \mathcal{P}} \omega$$

(اگر $\det \mathcal{P}_* < 0$ $\int_C \omega = -\int_{C\circ\mathcal{P}} \omega$)

اثبات: فرض کنیم $C^*\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k$ با توجه به خواص k_فرمی‌ها

$$\mathcal{P}^* \circ (C^*\omega) = (f \circ \mathcal{P})(det \mathcal{P}_*) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k$$

---

[1] *Orientable reparametrization*

بنابراین

$$\begin{aligned}\int_{C\circ\mathcal{P}}\omega &= \int_{[0,1]^k}(C\circ\mathcal{P})^*\omega = \int_{[0,1]^k}\mathcal{P}^*\circ C^*\omega\\ &= \int_{[0,1]^k}(f\circ\mathcal{P})(det\mathcal{P}_*)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^k\\ &= \int_{[0,1]^k}(f\circ\mathcal{P})|det\mathcal{P}_*|dx^1\wedge\cdots\wedge dx^k\\ &= \int_{[0,1]^k}(f\circ\mathcal{P})|det\mathcal{P}_*|dx^1\cdots dx^k\end{aligned}$$

پس از فرمول تغییر متغیر در انتگرال‌های چندگانه

$$= \int_{\mathcal{P}([0,1]^k)} f \;\; dx^1\cdots dx^k$$

چون $\mathcal{P}$ دوسویی است داریم

$$\int_{[0,1]^k} f dx^1\cdots dx^k = \int_{[0,1]^k} C^*\omega = \int_C \omega$$

□

مرز یک ناحیه[1]

برای آنکه بتوانیم مرز یک ناحیه را برای انتگرال‌گیری تعریف کنیم احتیاج به تعاریف زیر داریم.

تعریف: یک kـزنجیر[2] *عبارت است از مجموع صوری تعداد متناهی از kـمکعب‌های منفرد که در یک عدد حقیقی یا مختلط ضرب شده باشند.*

یعنی اگر $C_1, \cdots, C_m$ تعدادی kـمکعب باشد و $a_1, \cdots, a_m$ ضرایبی از $\mathcal{R}$ یا $\mathcal{C}$ باشند آنگاه $\sum_{i=1}^{m} a_iC_i$ را یک kـزنجیر می‌نامند. در حالت خاص $1 \cdot C_1$ یک kـزنجیر است که آنرا با C_1 نشان می‌دهیم.

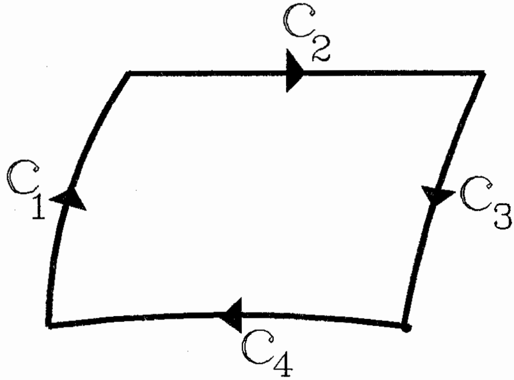
دلیل اینکه تعریف kـزنجیر را در اینجا می‌آوریم این است که می‌خواهیم به هر kـزنجیر C (که احتمال دارد تنها از یک kـمکعب منفرد تشکیل شده باشد) مرز آنرا که یک $(k-1)$

---

[1] *Boundary of a domain (Bord d'un domain)*

[2] $k - chain$

زنجیر است و با ∂C نمایش می‌دهیم وابسته کنیم. به عبارت دیگر می‌خواهیم انتگرال را روی مرز یک kـمکعب که توسط مجموع صوری تعدادی $(k-1)$ـمکعب بیان می‌شود، تعریف نمائیم.



شکل ۷.۴: یک زنجیر که از چهار ۱ـمکعب منفرد تشکیل شده است

تعریف: فرض کنیم $I^k : [0,1]^k \to I\!R^k$ kـمکعب استاندارد $(k \geq 1)$ باشد به ازاء $1 \leq i \leq k$ تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} I^k_{pl i=0} &: [0,1]^{k-1} \to I\!R^k \\ &(x^1, \cdots, x^{k-1}) \to (x^1, \cdots, x^{i-1}, 0, x^i, \cdots, x^{k-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I^k_{pl i=1} &: [0,1]^{k-1} \to I\!R^k \\ &(x^1, \cdots, x^{k-1}) \to (x^1, \cdots x^{i-1}, 1, x^i, \cdots, x^{k-1}) \end{aligned}$$

بنابراین $(k-1)$ـمکعب‌هایی تعریف نمودیم که آنها را لبه‌های[1] مکعب I^k می‌نامیم.

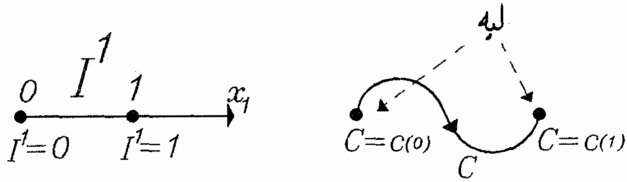
فرض کنیم $C : I^k \to M$ یک $k-$ مکعب منفرد روی M باشد. لبه‌های C را توسط نگاشت زیر تعریف می‌نمائیم

در اینجا $\alpha = 0, 1$ و $C_{pl i=\alpha} : [0,1]^{k-1} \to M$

$$C_{pl i=\alpha} = C \circ I^k_{pl i=\alpha}$$

---

[1] face



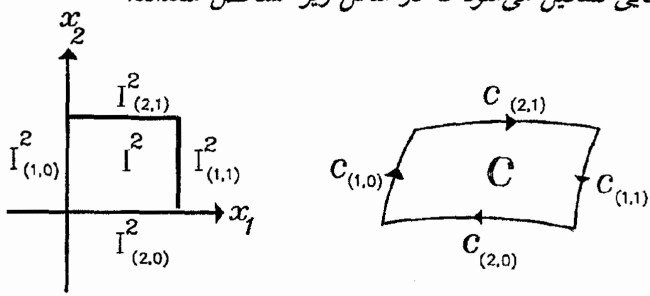
شکل ۷.۵: لبه‌های I' و C

مثال: لبه $I^{۱}$ یعنی $[۰, ۱]$ عبارت است از نقاط ۰ و ۱ و لبه ۱ ـمکعب C نقاط ابتدا و انتهای منحنی C می‌باشد. که در شکل ۷.۵ مشخصه شده‌اند. زیرا در اینجا

$$C_{\text{یکم}=۱} = C(۱), C_{\text{یکم}=۰} = C(۰), I^{۱}_{\text{یکم}=۰} = ۰, I^{۱}_{\text{یکم}=۱} = ۱$$

نقاط ابتدا وانتهای منحنی می‌باشند. حال از نماد $C_{(i,\alpha)} = C_{\text{م}|i=\alpha}$ استفاده می‌کنیم.

مثال: لبه مربع $I^{۲}$ از خطوط زیر تشکیل می‌شود.به همین صورت لبه یک ۲ ـمکعب C از منحنی‌هایی تشکیل می‌شود که در شکل زیر مشخص شده‌اند.



شکل ۷.۶: لبه‌های یک مربع از صفحه و یک ناحیه از رویه

تذکر: تعریف انتگرال‌گیری دوگانه درواقع روی یک مربع جهت‌دار انجام می‌شود. جهت یک مربع جهت‌هایی را روی لبه‌های آن ایجاب می‌کند. اما راحت‌تر آن است که لبه‌ها را با ضرب یک علامت ±۱ با توجه به اینکه در جهت مناسب یا مخالف می‌باشند در نظر گرفت.

به عنوان مثال برای اینکه مربع (a) دارای جهت مناسب باشد آنرا در ±۱ ضرب می‌کنیم تا به صورت مربع جهت‌دار (b) تبدیل شود. شکل ۷.۷ را ببینید.

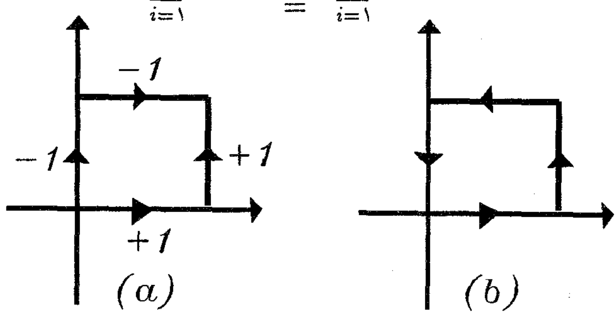
تعریف: فرض کنیم $C : I^k \to M$ یک kـمکعب منفرد $(k \geq ۱)$ روی M باشد. قرار

می‌دهیم

$$\boxed{\partial C = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{\alpha+i} C_{\text{م}|i=\alpha}}$$

∂C که یک $(k-1)$ـزنجیر است را مرز C[1] می‌نامیم. اگر $\sum_{i=1}^{k} a_i C_i$ یک kـزنجیر باشد تعریف می‌کنیم.

$$\partial(\sum_{i=1}^{k} a_i C_i) \overset{\text{تعریف}}{\equiv} \sum_{i=1}^{k} a_i \partial C_i$$



شکل ۷.۷: مربع بدون جهت و مربع جهت‌دار

نمادگذاری: زنجیرها را به شکل طبیعی زیر با هم جمع می‌کنیم.

$$\sum_i a_i C_i + \sum_i b_i C_i \overset{\text{تعریف}}{\equiv} \sum_i (a_i + b_i) C_i$$

اگر $k = 0$، $C : [0,1]^0 \to M$ را توسط نقطه $p = C(0)$ نشان داده، تعریف می‌کنیم

$$\partial C = 1$$

به عبارت دیگر مرز یک نقطه را برابر یک تعریف می‌کنیم.

مثال: برای یک ۱ـمکعب $C : [0,1] \to M$ داریم

$$\partial C = C_{\text{یکم}=1} - C_{\text{یکم}=0} = C \circ I^1_{\text{یکم}=1} - C \circ I^1_{\text{یکم}=0} = \underbrace{C(1)}_{\text{نقطه}} - \underbrace{C(0)}_{\text{نقطه}}$$

[1] Boundary (Bord)

به عبارت دیگر مرز یک ۱ـمکعب نقطه انتهایی منهای نقطه ابتدایی آن است.

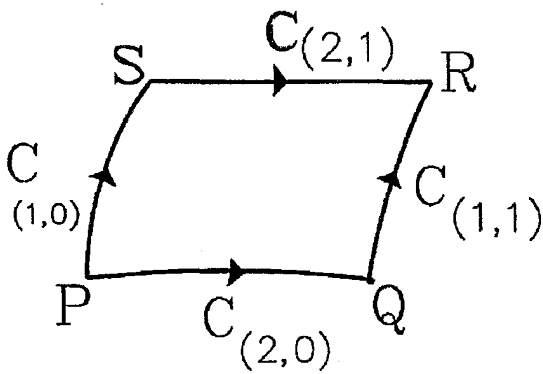
$$\partial\partial C = \partial C(۱) - \partial C(۰) = ۱ - ۱ = ۰$$

مثال : برای یک ۲ـمکعب منفرد $C : [۰,۱]^۲ \to M$ با توجه به شکل زیر داریم

$$\partial C = C_{\text{یکم}=۱} - C_{\text{یکم}=۰} + C_{\text{دوم}=۰} - C_{\text{دوم}=۱}$$
$$\partial\partial C = (R-Q) - (S-P) + (Q-P) - (R-S)$$

لذا داریم:

$$\partial\partial C = ۰$$



شکل ۷.۸ : مرز یک ۲ـمکعب منفرد

تمرین:

۱ـ نشان دهید که برای یک ۳ـمکعب منفرد $C : [۰,۱]^۳ \to M$ نیز همواره داریم $\partial(\partial C) = ۰$.

با تعمیم موضوع اخیر قضیه زیر را داریم.

قضیه: اگر C یک kـزنجیر روی M باشد داریم

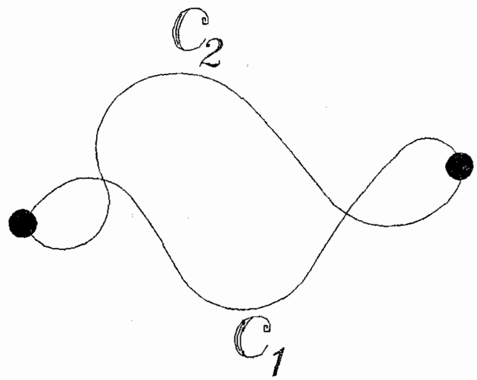
$$\boxed{\partial\partial C = ۰}$$

اثبات این قضیه مشابه مثال و تمرین بالا، براحتی با استفاده از تعریف قابل دسترسی بوده، که در اینجا از آوردن آن خودداری می‌کنیم.[۱]

بطور طبیعی، سوالی که در اینجا مطرح می‌شود این است که آیا عکس قضیه بالا می‌تواند برقرار باشد؟ به عبارت دیگر اگر $\partial C = ۰$ باشد آیا زنجیری مانند C' روی M وجود دارد بطوریکه $C = \partial C'$. جواب این سوال بستگی به M داشته و در حالت کلی منفی است.

به عنوان مثال ۱ ـمکعب $C : [۰, ۱] \to I\!R^۲ \setminus \{(۰, ۰)\}$ که توسط $C(t) = (\cos ۲\pi t, \sin ۲\pi t)$ تعریف می‌شود یک ۱ ـ زنجیر روی $I\!R^۲ \setminus \{(۰, ۰)\}$ است. داریم $C(۰) = C(۱)$ للذا $\partial C = ۰$. اما مشابه بحثی که در مثال ۲ از بخش ۱ § آوردیم می‌توان نشان داد که هیچ ۲ ـزنجیری مانند C' در $I\!R^۲ \setminus \{(۰, ۰)\}$ وجود ندارد بطوریکه $C = \partial C'$. (به تمرین ۱ در بخش ۳§ مراجعه کنید)

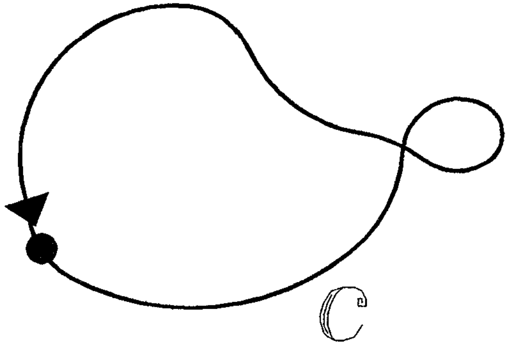
یادآوری می‌کنیم که گاهی اوقات علاوه بر $\partial\partial C = ۰$ داریم $\partial C = ۰$ به‌عنوان مثال در مورد $C = C_۱ - C_۲$ که $C_۲, C_۱$ دو ۱ ـ مکعب با خواص $C_۱(۰) = C_۲(۰)$ و $C_۱(۱) = C_۲(۱)$ باشند. (یعنی دو منحنی که نقاط ابتدا و انتهای آنها بر هم منطبق است) داریم $\partial C = ۰$



شکل ۷.۹ : مرز دو منحنی با ابتدا و انتهای یکسان صفر است

[۱] خواننده می‌تواند در صورت لزوم به یکی از کتب مراجع به عنوان مثال به کتاب *Spivak* جلد اول مراجعه کند.

به همین صورت اگر C یک ۱ـمکعب باشد که فقط از C تشکیل شده است آنگاه چنانچه C منحنی بسته باشد یعنی $C(1) = C(0)$ باشد آنگاه $\partial C = 0$



شکل ۷.۱۰: مرز منحنی بسته صفر است

بطور کلی یک kـزنجیر را بسته گویند اگر $\partial C = 0$ همانطور که می‌بینیم این تعریف با تعریف فرم بسته ω یعنی $d\omega = 0$ مشابهت دارد. رابطه دیگر بین این مفاهیم دو عبارت $\partial^2 C = 0$ و $d^2\omega = 0$ است. اما ارتباط این دو تعریف به همین جا ختم نمی‌شود. به‌عنوان مثال قضیه استوکس را ملاحظه نمائید.

تمرین:

۲ـ الف) یک ۲ـمکعب منفرد روی دیسک بسته D^2 در صفحه $\mathbb{R}^2$ طوری معرفی کنید که تصویر آن کل دیسک را بپوشاند. مرز آنرا بدست آورده، درستی $\partial\partial C = 0$ را تحقیق نمائید.

راهنمایی: از تابع زیر استفاده کنید $C : (r, t) \to (r \cos 2\pi t, r \sin 2\pi t)$

ب) یک ۳ـمکعب منفرد روی گوی بسته واحد B^3 در $\mathbb{R}^3$ معرفی کنید.

۳ـ اگر $R > 0$ و n یک عدد صحیح باشد، ۱ـمکعب منفرد زیر را در نظر می‌گیریم

$$C_{R,n}(t) = (R \cos 2\pi nt, R \sin 2\pi nt)$$

نشان دهید یک ۲ـمکعب منفرد C، $C : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ موجود است

بطوریکه

$$\partial C = C_{R_{۱},n} - C_{R_{۲},n}$$

۴ـ فرض کنیم $C : [\circ, ۱]^n \to I\!R^n$ یک nـمکعب منفرد یک به یک با فرض $det C_* \geq \circ$ روی $[\circ, ۱]^n$ باشد. همچنین فرض کنیم ω، nـفرمی $\omega = f dx^۱ \wedge \cdots \wedge dx^n$ باشد. آنگاه نشان دهید

$$\int_C \omega = \int_{C([\circ,۱]^n)} f$$

در اینجا انتگرال سمت راست انتگرال nگانه است.

راهنمایی: به ترتیب از تعریف انتگرال، تعریف $C^*\omega$ یا تمرین ۲ از بخش ۶ فصل ۵ و فرمول تغییر متغیر در انتگرال‌ها استفاده کنید.

۳.۷ § قضیه استوکس[۱] (روی زنجیرها)

در اینجا به تعمیم قضیه اساسی استوکس برای زنجیرهای تعریف شده روی M می‌پردازیم.

قضیه: فرض کنیم $\omega \in \Omega^{k-۱} M$ و C یک kـ زنجیر روی M باشد. آنگاه

$$\boxed{\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega}$$

اثبات : کافی است قضیه را برای kـمکعب‌ها روی M ثابت نمائیم. اثبات را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم.

الف) فرض کنیم $\omega \in \Omega^{k-۱} I\!R^k$ و $C = I^k$، ثابت می‌کنیم $\int_{I^k} d\omega = \int_{\partial I^k} \omega$ فرض کنیم ω مجموع $(k - ۱)$ فرمی‌های به‌صورت $f dx^۱ \wedge \cdots \wedge d\widehat{x}^i \wedge \cdots \wedge dx^k$ باشد.

علامت "^" در روی $d\widehat{x}^i$ به این معنی است که این فرم فاقد عبارت dx^iاست. کافی

---

[۱] *Stokes theorem on chains*

ـ*George Gabriel Stokes* ریاضیدان ایرلندی ۱۹۰۳ـ۱۸۱۹

است قضیه را برای این فرمها اثبات نمائیم. بنابر تعریف انتگرال و تعریف ∂I^k داریم

$$* \qquad \int_{\partial I^k} \omega = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{j+\alpha} \int_{[0,1]^{k-1}} (I^k_{\text{ام}j=\alpha})^* \omega$$

حال مقدار انتگرال زیر را محاسبه می‌نمائیم

$$\int_{[0,1]^{k-1}} (I^k_{\text{ام}j=\alpha})^* f dx^1 \wedge \cdots \wedge d\widehat{x}^i \wedge \cdots \wedge dx^k$$

بنابر خواص نگاشت کتانژانت داریم

$$(I^k_{\text{ام}j=\alpha})^* f = f \circ I^k_{\text{ام}j=\alpha} = f(x^1, \cdots, \alpha, \cdots, x^k)$$

$$(I^k_{\text{ام}j=\alpha})^* dx^i = d(x^i \circ I^k_{\text{ام}j=\alpha}) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } i = j \\ dx^i & \text{اگر } i < j \\ dx^{i+1} & \text{اگر } i > j \end{cases}$$

چون، ثابت $x^j = \alpha$، $dx^j = 0$ این جمله صفرشونده همواره موجود است. لذا اگر $i = j$، جمله صفرشونده در انتگرال حذف می‌شود و اگر $i \neq j$ همواره یک جمله صفرشونده در زیر انتگرال موجود است. بنابراین داریم

$$\int_{[0,1]^{k-1}} (I^k_{\text{ام}j=\alpha})^* f dx^1 \wedge \cdots \wedge d\widehat{x}^i \wedge \cdots \wedge dx^k$$
$$= \begin{cases} 0 & j \neq i \\ \int_{[0,1]^{k-1}} f(x^1, \cdots, \alpha, \cdots, x^k) dx^1 \cdots d\widehat{x}^j \cdots dx^k & j = i \end{cases}$$

چون f به x^j بستگی ندارد در فاصله $[0,1]$ می‌توان یک انتگرال به انتگرال فوق اضافه نمود

$$= \begin{cases} 0 & j \neq i \\ \int_{[0,1]^k} f(x^1, \cdots, \alpha, \cdots, x^k) dx^1 \cdots dx^k & j = i \end{cases}$$

لذا در زیگمای اول از رابطه * تمام جملات بجز جمله iام صفر می‌شود. با قراردادن مقدار $\alpha = 0, 1$ در زیگمای دوم داریم

$$** \qquad \int_{\partial I^k} \omega = (-1)^i \int_{[0,1]^k} f(x^1, \cdots, 0, \cdots, x^k) dx^1 \cdots dx^k +$$
$$+ (-1)^{i+1} \int_{[0,1]^k} f(x^1, \cdots, 1, \cdots, x^k) dx^1 \cdots dx^k$$

از طرف دیگر مقدار $\int_{I^k} d\omega$ را محاسبه می‌کنیم

$$\int_{I^k} d(f dx^1 \wedge \cdots \wedge d\widehat{x}^i \wedge \cdots \wedge dx^k)$$
$$= \int_{I^k} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge d\widehat{x}^i \wedge \cdots \wedge dx^k = (-1)^{i-1} \int_{I^k} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^1 \cdots$$
$$= (-1)^{i-1} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i\right) dx^1 \cdots d\widehat{x}^i \cdots dx^k$$

با محاسبه یک انتگرال بنابر روش محاسبه انتگرال‌های چندگانه و قضیه اساسی انتگرال داریم

$$= (-1)^{(i-1)} \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1}_{\text{مرتبه}(k-1)} (f(x^1, \cdots, 1, \cdots, x^k)$$
$$- f(x^1, \cdots, 0, \cdots x^k)) dx^1 \cdots d\widehat{x}^i \cdots dx^k$$

چون f به x^i بستگی ندارد

$$= (-1)^{(i-1)} \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1}_{\text{مرتبه}(k)} (f(x^1, \cdots, 1, \cdots, x^k)$$
$$- f(x^1, \cdots, 0, \cdots x^k)) dx^1 \cdots dx^k$$

با توجه به رابطه * برای $\omega \in \Omega^{k-1} \mathbb{R}^k$ داریم

$$\int_{I^k} d\omega = \int_{\partial I^k} \omega$$

ب) حال فرض کنیم $C : I^k \to M$ یک kـمکعب منفرد روی M باشد، نشان می‌دهیم $\int_{\partial C} \omega = \int_{\partial I^k} C^* \omega$ با استفاده از تعریف داریم

$$\int_{\partial C} \omega = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} \int_{C_{\text{ام}\,i=\alpha}} \omega = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{\alpha+i} \int_{C \circ I^k_{\text{ام}\,i=\alpha}} \omega$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} \int_{[0,1]^{k-1}} (C \circ I^k_{\text{ام}\,i=\alpha})^* \omega$$

$$= \sum_i \sum_\alpha (-1)^{i+\alpha} \int_{[0,1]^{k-1}} (I^k_{(i,\alpha)})^* \circ C^*\omega$$

$$= \sum_i \sum_\alpha (-1)^{i+\alpha} \int_{I^k_{(i,\alpha)}} C^*\omega = \int_{\partial I^k} C^*\omega$$

از آنجا نتیجه می‌شود

$$\int_C d\omega \overset{\text{بنابر تعریف انتگرال}}{=} \int_{I^k} C^* d\omega \overset{\text{بنابرقضیه فرمها}}{=} \int_{I^k} dC^*\omega \overset{\text{بنابر الف}}{=} \int_{\partial I^k} C^*\omega$$

$$\overset{\text{بنابر ب}}{=} \int_{\partial C} \omega$$

بنابراین اثبات کامل می‌شود. □

تمرین :

۱ـ فرض کنیم $d\theta = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ در $I\!R^2\backslash\{(0,0)\}$ و همینطور $C : [0,1] \to I\!R^2\backslash\{(0,0)\}$ توسط $C(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ تعریف شوند نشان دهید $\int_c d\theta = 2\pi$ سپس با استفاده از قضیه استوکس ثابت کنید هیچ ۲ـزنجیری در $I\!R^2\backslash\{(0,0)\}$ مانند C' وجود ندارد بطوریکه $C = \partial C'$

۲ـ فرض کنید
$$\omega = \frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

الفـ نشان دهید ω روی $I\!R^3\backslash\{(0,0,0)\}$ بسته است.

ب‌ـ ۲ـمکعب منفرد C را روی $I\!R^3$ طوری تعریف کنید که تصویر آن کره S^2 را بپوشاند.

ج‌ـمقدار انتگرال ω را روی ۲ـمکعب بالا محاسبه کرده نشان دهید

$$\int_C \omega = 4\pi$$

دـ ۱ـفرمی $\lambda = -\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\eta$ در $I\!R^3$ را با فرض

$$x^2+y^2 > 0 \qquad\qquad \eta = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$$

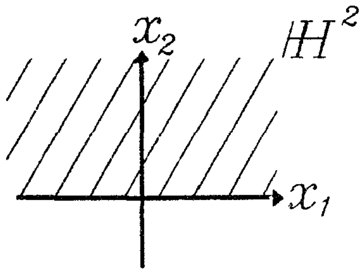
در نظر می‌گیریم. نشان دهید $\omega = d\lambda$ و از آن نتیجه بگیرید که ω موضعاً کامل است.

هـ با استفاده از قضیه استوکس نشان دهید ω کامل نیست.

۴.۷ § منیفلد مرزدار[1]

فرض کنیم $I\!H^n = \{(x_1, \cdots, x_n) \in I\!R^n | x_n \geq 0\}$، $I\!H^n$ را **نیم صفحه بالایی**[2] می‌گویند.

تعریف: فضای توپولوژیک هاسدرف M را یک **منیفلد مرزدار** n بعدی توپولوژیک گوئیم اگر هر نقطه آن دارای یک همسایگی همئومورف با $I\!R^n$ یا $I\!H^n$ باشد.



شکل ۷.۱۱ : (الف) نیم صفحه بالایی $I\!H^2$

لازم است توجه داشته باشیم که یک نقطه p از M نمی‌تواند دارای یک همسایگی همزمان همئومورف با $I\!R^n$ و $I\!H^n$ هر دو باشد. زیرا در این صورت اگر $x_1 : U_1 \to V_1$ و $x_2 : U_2 \to V_2$ دو کارت در همسایگی p به ترتیب روی $I\!R^n$ و $I\!H^n$ باشند آنگاه $x_2 \circ x_1^{-1}$ یک نگاشت پیوسته و یک به یک است که بازی در $I\!R^n$ شامل $x_1(p)$ را به زیر مجموعه‌ای از $I\!H^n$ که در $I\!R^n$ باز نیست می‌برد و این یک تناقض است با قضیه پایایی دامنه.

نقاطی از M که هیچیک از همسایگی‌های آن با $I\!R^n$ همئومورف نیستند تشکیل زیر مجموعه‌ای از M می‌دهند که آنرا با $\partial \mathrm{M}$ نمایش داده و مرز M می‌نامیم.

تذکر: اگر M یک منیفلد باشد (یعنی منیفلد مرزدار نباشد) آنگاه $\partial M = \phi$. در این صورت بعضاً M را منیفلد بدون مرز[3] نیز می‌گویند. به‌عنوان مثال برای کره S^2 داریم

---

[1] *Manifold − with − boundary (Variété a bord)*

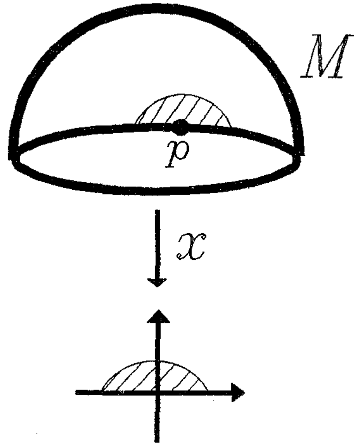
[2] *Upper half plane (Demi plan superieur)*

[3] *Unbounded manifold (Variété sans bord)*

$\partial S^{2} = \phi$ اگر M یک منیفلد مرزدار nـبعدی باشد آنگاه می‌توان نشان داد که ∂M یک منیفلد $(n-1)$ بعدی بوده ، $M - \partial M$ یک منیفلد n بعدی است.

مثال ۱: نیم صفحه بالائی $I\!H^{2}$ یک منیفلد مرزدار ۲ـبعدی است که مرز آن محور xها است.

مثال ۲: یک سهمیگون بسته یک منیفلد مرزدار دوبعدی است. (شکل ۷.۱۲)



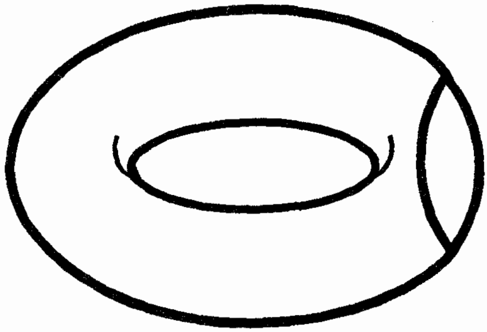
شکل ۷.۱۲: سهمیگون بسته یک منیفلد مرزدار است

مثال ۳: یک دستگیره[1] که بابرداشتن یک کلاهک باز از چنبره دو بعدی به دست می‌آید نیز یک منیفلد مرزدار توپولوژیک است. (شکل ۷.۱۳)

منیفلدهای مرزدار C^{∞} مشابه منیفلدهای معمولی C^{∞} تعریف می‌شوند. ابتدا بنابه تعریف اگر V, U بازهایی از $I\!H^{n}$ و $I\!H^{m}$ باشند تابع $f : U \to V$ را C^{∞} نامیم هرگاه باز U' از $I\!R^{m}$ و توسیع $\tilde{f} : U' \to V$ موجود باشد که $\tilde{f}$، C^{∞} باشد.

منفیلد مرزدار M به همراه یک اطلس A از M را از کلاس C^{∞} نامیم هرگاه نگاشتهای تغییر کارت آن، دیفئومورفیسم از کلاس C^{∞} باشند. بقیه مفاهیم منیفلدهای معمولی (منیفلدهای بدون مرز) مانند فضای مماس، توابع کلاس C^{k}، pـفرمی و $\cdots$ به طور مشابه روی منفیلدهای مرزدار تعریف می‌شوند.

[1] Handle



شکل ۷.۱۳ : دستگیره یک منیفلد مرزدار توپولوژیک است

۵.۷ قضیه استوکس روی منیفلدها[1]

اگر ω یک pـفرمی روی منیفلد مرزدار M به بعد n بوده و C یک pـمکعب منفرد روی M باشد، تعریف می‌کنیم

$$\int_C \omega = \int_{[0,1]^p} C^*\omega$$

این تعریف دقیقاً مشابه تعریف انتگرال روی زنجیرها است که در بخش قبل تعریف گردید. در این بخش می‌خواهیم به بررسی حالتی که $p = n$ باشد پرداخته، انتگرال روی منیفلد M را تعریف و قضیه استوکس را ثابت کنیم.

ابتدا برای تعریف $\int_M \omega$ فرض می‌کنیم که M جهت‌پذیر باشد. علت این موضوع را می‌توان در اثبات گزاره زیر مشاهده نمود. شرط جهت‌پذیری برای ساده‌کردن تعریف است لذا تحت شرایطی می‌توان آنرا حذف کرد.

گزاره: اگر $C_1, C_2 : [0,1]^n \to M$ دو nـ مکعب منفرد[2] جهت نگهدار[3] روی منیفلد جهت پذیر M به بعد n باشند و ω یک nـفرمی روی M باشد به طوریکه در خارج

---

[1] *Stokes Theorem on manifolds*

[2] *orientable* $n-$ *Cube*

[3] در اینجا جهت نگهدار بودن C_1 و C_2 بدین معنی است که دترمینان $(C_2^{-1} \circ C_1)_*$ مثبت باشد.

$C_1([0,1]^n) \cap C_2([0,1]^n)$ داشته باشیم $\omega = 0$ آنگاه داریم

$$\int_{C_1} \omega = \int_{C_2} \omega$$

اثبات: چون $\det(C_2^{-1} \circ C_1)_* > 0$، می‌توان $C_2^{-1} \circ C_1$ را به‌عنوان یک بازپارامتری سازی جهت نگهدار در نظر گرفت. *(لازم به یادآوری است که این دترمینان هنگامی می‌تواند در تمام نقاط مثبت باشد که منیفلد M جهت‌پذیر باشد)*

$$\int_{C_2} \omega = \int_{C_2 \circ (C_2^{-1} \circ C_1)} \omega = \int_{C_1} \omega$$

(لازم به ذکر است که در رابطه بالا تساوی اول روی $C_2([0,1]^n) \cap C_1([0,1]^n)$ برقرار است، اما چون ω در خارج این مجموعه صفر است ما می‌توانیم آنرا به‌صورت فوق بنویسیم)

□

حال با استفاده از گزاره بالا انتگرال روی منیفلد M را تعریف می‌کنیم. فرض کنیم ω یک nـفرم روی منیفلد جهت‌پذیر nـبعدی M باشد. اگر یک nـ مکعب منفرد C روی M موجود باشد بطوریکه C جهت را حفظ نماید (یعنی در تمام نقاط $detC_*$ دارای یک علامت باشد) و در خارج از $C([0,1]^n)$ داشته باشیم $\omega = 0$ (یا به عبارت دیگر $Supp\omega \subset C([0,1]^n)$)، آنگاه تعریف می‌کنیم.

$$\int_M \omega = \int_C \omega$$

مقدار $\int_C \omega$ بنابر گزاره قبل بستگی به انتخاب C ندارد و این مقدار مشترک را انتگرال روی منیفلد M تعریف نموده توسط $\int_M \omega$ نمایش می‌دهیم.

حال اگر فرض کنیم که $\omega \in \Omega^n M$ داری محمل فشرده[1] باشد، می‌توانیم $\int_M \omega$ را به شکل زیر تعریف نمائیم.

---

[1] *Compact Support*

یک پوشش برای M طوری در نظر می‌گیریم که بازهای آن در حوزه مقادیر nـمکعب‌های منفرد جهت نگهدار (مذکور در گزاره بالا) قرار داشته باشد. یک افراز واحد $\Phi = \{\varphi_\beta\}_{\beta\in B}$ وابسته به این پوشش در نظر گرفته تعریف می‌کنیم.

$$\int_M \omega = \sum_{\varphi\in\Phi} \int_M \varphi \cdot \omega$$

(زیگمای بالا دارای تعدادی متناهی جمله غیر صفر می‌باشد زیرا ω دارای محمل فشرده است. در حقیقت $Supp\ \omega$ تعدادی متناهی از بازهای U_φ، $U_\varphi = \{p \in M | \varphi(p) \neq 0\}$ را قطع می‌کند)

به راحتی می‌توان نشان داد که این تعریف بستگی به انتخاب افراز واحد ندارد. برای این کار فرض کنیم ψ یک افراز واحد دیگری روی M وابسته به پوشش مشابه بالا باشد. داریم

$$\begin{aligned}\sum_{\varphi\in\Phi} \int_M \varphi \cdot \omega &= \sum_{\varphi\in\Phi} \int_M \sum_{\tau\in\psi} \tau \cdot \varphi \cdot \omega = \sum_{\varphi\in\Phi} \sum_{\tau\in\psi} \int_M \tau \cdot \varphi \cdot \omega \\ &= \sum_{\tau\in\psi} \int_M \sum_{\varphi\in\Phi} \varphi \cdot \tau \cdot \omega = \sum_{\tau\in\psi} \int_M \tau \cdot \omega\end{aligned}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که تعریف بالا بستگی به انتخاب پوشش و افراز واحد وابسته به آن ندارد. حال فرض کنیم M یک منیفلد مرزدار باشد. نگاشت شمول $i : \partial M \to M$ و نقطه $p \in \partial M$ را در نظر می‌گیریم. بردار $V \in T_pM$ را طوری انتخاب می‌کنیم که بر ∂M مماس نباشد (یعنی $(V \notin i_*(T_p(\partial M))$)

تعریف: اگر M یک منیفلد مرزدار و V برداری مماس در نقطه مرزی p باشد گوئیم V **به سمت خارج**[۱] است اگر در یک دستگاه مختصات موضعی در همسایگی p با مختصات $v^1, \dots, v^n$ آخرین مولفه v^n منفی باشد.(یعنی $(v_n < 0)$

می‌توان نشان داد که این شرط به انتخاب دستگاه مختصات موضعی بستگی ندارد. حال فرض کنیم M جهت‌پذیر باشد می‌خواهیم یک جهت ∂M وابسته به جهت M تعریف

---

[۱] *Outward pointing (dirige' vers exte'rieur)*

کنیم. اگر μ یک جهت روی M باشد، جهت وابسته به آن روی ∂M را با $\partial\mu$ نشان می‌دهیم و ∂r جهت پایه $\{v_1, \cdots, v_{n-1}\}$ است. هرگاه به ازاء هر بردار به سمت خارج $W \in T_pM$ کلاس $\{W, i_*v_1, \cdots, i_*v_{n-1}\}$ متعلق به μ_p باشد.[2]

می‌توان بررسی نمود که این جهت‌های نقطه‌ای شرط جهت‌پذیری روی ∂M را برآورده می‌کنند. با این تعریف از جهت روی ∂M می‌توان ثابت کرد که برای هر $(n-1)$ فرمی ω و هر nـمکعب منفرد جهت نگهدار $C : [0,1]^n \to M$ به‌طوریکه $C_{n,0}$ روی ∂M قرار داشته و سایر نقاط $C([0,1]^n)$ خارج ∂M باشد و $Supp\ \omega$ درون $C([0,1]^n)$ قرار گیرد آنگاه

$$\int_{\partial c} \omega = \int_{\partial M} \omega$$

در واقع در حالت n زوج $C_{n,0}$ یک $(n-1)$ـمکعب منفرد جهت نگهدار نسبت به $\partial\mu$ و در حالت n فرد $C_{n,0}$ جهت نگهدار نیست. بنابراین

$$\int_{C_{n,0}} \omega = (-1)^n \int_{\partial M} \omega$$

در نتیجه چون ω روی تک تک وجوه nـمکعب C صفربوده و فقط روی $C_{n,0}$ احتمالاً ناصفر است داریم

$$\int_{\partial C} \omega = \int_{\sum_{i,\alpha}(-1)^{i+\alpha} C_{i,\alpha}} \omega = (-1)^n \int_{C_{n,0}} \omega = \int_{\partial M} \omega$$

لذا مقدمات لازم برای اثبات قضیه استوکس روی منیفلدها به شرح زیر فراهم گردید.

قضیه استوکس: فرض کنیم M یک منیفلد مرزدار و جهت‌پذیر به بعد n باشد. اگر ω یک $(n-1)$ـفرمی با محمل فشرده روی M باشد آنگاه

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

[2] برای توضیح بیشتر [۲۸] جلد I صفحه ۳۵۲ را ببینید.

اثبات: **حالت اول** ـ ابتدا فرض کنیم یک nـمکعب منفرد جهت‌نگهدار C در $M - \partial M$ وجود داشته باشد به طوریکه در خارج از $C([0,1]^n)$ داشته باشیم $\omega = 0$ (یا به عبارت معادل، $Supp\,\omega$ زیرمجموعه نقاط درونی تصویر C باشد) در این صورت

$$\int_M d\omega = \int_C d\omega$$

بنابر قضیه استوکس روی زنجیرها، و بنابر آنکه ω که روی ∂C برابر صفر است داریم

$$\int_M d\omega = \int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega = 0$$

از طرف دیگر $\int_{\partial M} \omega = 0$ زیرا روی ∂M داریم $\omega = 0$. لذا درستی رابطه حکم در این حالت تحقیق گردید.

حالت دوم ـ حال فرض کنیم یک nـ مکعب منفرد جهت نگهدار روی M وجود داشته باشد بطوریکه $C_{(n,0)}$ام تنها لبه ∂M بوده و در خارج از $C([0,1]^n)$ داشته باشیم $\omega = 0$. در این صورت با توجه به مراتب بالا و رابطه $\int_{\partial C} \omega = \int_{\partial M} \omega$، درستی حکم ثابت می‌شود.

$$\int_M d\omega = \int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega = \int_{\partial M} \omega$$

حالت سوم ـ حال قضیه را در حالت کلی ثابت می‌کنیم. در این حالت یک پوشش باز مانند θ و یک افراز واحد وابسته به آن مانند Φ موجود است بطوریکه برای هر $\varphi \in \Phi$ فرم دیفرانسیل‌پذیر $\varphi \cdot \omega$ به یکی از دو حالت قبلی نوشته شود. داریم

$$0 = d(1) = d(\sum_{\varphi \in \Phi} \varphi) = \sum_{\varphi \in \Phi} d\varphi$$

در نتیجه

$$\sum_{\varphi \in \Phi} d\varphi \wedge \omega = 0$$

چون ω دارای محمل فشرده است مجموع فوق متناهی بوده و می‌توان نتیجه گرفت

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \int_M d\varphi \wedge \omega = 0 \qquad (I)$$

لذا با توجه به تعریف افراز واحد داریم

$$\int_M d\omega = \sum_{\varphi\in\Phi} \int_M \varphi\cdot d\omega$$

با استفاده از رابطه (I) می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} &= \sum_{\varphi\in\Phi} \int_M d\varphi\wedge\omega + \varphi\cdot d\omega \\ &= \sum_{\varphi\in\Phi} \int_M d(\varphi\cdot\omega) = \sum_{\varphi\in\Phi} \int_{\partial M} \varphi\cdot\omega = \int_{\partial M}\omega \end{aligned}$$

□

تذکر ۱: در قضیه استوکس روی منیفلدها می‌توان بجای فرض فشردگی محمل ω فرض فشرده بودن M را جایگزین نمود زیرا: " اگر M فشرده باشد آنگاه محمل هر فرم دلخواه ω روی M فشرده است "

تذکر ۲: از قضیه استوکس نتیجه می‌شود که اگر منیفلد n بعدی M فشرده، جهت‌پذیر و بدون مرز باشد یعنی $\partial M = \emptyset$ آنگاه برای هر $(n-1)$ـ فرمی دلخواه ω روی M داریم

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M}\omega = 0$$

تذکر ۳: قضیه استوکس تعمیم قضایای مختلف گرین، استوکس و دیورژانس در ریاضیات عمومی است. (این موضوع را با فرض $dimM = 2$ و سپس $\dim M = 3$ و $k = 1, 2$ می‌توان تحقیق نمود.)

به عنوان مثال به بررسی قضیه گرین می‌پردازیم. فرض کنیم M ناحیه همبند ساده و بسته‌ای در $I\!R^2$ (M منیفلد ۲ـبعدی فشرده و مرزدار در $I\!R^2$) باشد. یادآوری می‌کنیم که M جهت پذیر بوده، جهت آن عمود بر صفحه $I\!R^2$ است. این جهت یک جهت به ∂M القاء می‌کند که از قاعده انگشتان دست راست پیروی نموده در جهت مثبت مثلثاتی دوران می‌نماید. اگر $\omega \in \Omega^1 M$ می‌توان نوشت $\omega = Pdx + Qdy$ که در آن P و Q توابع حقیقی دیفرانسیل پذیر روی M هستند.

$$d\omega = (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dx\wedge dy$$

حال با جایگذاری در رابطه $\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$ از قضیه استوکس، قضیه گرین به شرح زیر ثابت می‌شود. قضیه زیر را فرمول ریمان_گرین نیز می‌نامند.

قضیه گرین:[۱] **فرض کنیم $M \subset I\!R^۲$ یک ناحیه همبند ساده و بسته و کرانداری در $I\!R^۲$ باشد.(M منیفلد ۲_بعدی فشرده و مرزدار در $I\!R^۲$ است.) آنگاه داریم**

$$\int_{\partial M} Pdx + Qdy = \int\int_M (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy$$

در اینجا P و Q توابع حقیقی دیفرانسیل پذیر روی M بوده و انتگرال سمت راست انتگرال دوگانه عادی روی ناحیه M از صفحه است.

یک کاربرد قضیه استوکس در اثبات قضیه زیر است که در بخش بعد مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

قضیه: اگر منیفلد M فشرده و جهت‌پذیر باشد، آنگاه M انقباض‌پذیر نیست.

اثبات: چون M جهت‌پذیر بوده و دارای جهت μ می‌باشد n_فرمی ناصفری مانند $\omega \in \Omega^n M$ موجود است به طوری که به ازاء هر نقطه $p \in M$ و به ازاء هر پایه $\{X_۱ \cdots X_n\}$ از T_pM در کلاس μ_p داشته باشیم

$$\omega(X_۱ \cdots X_n) > ۰$$

فرض کنیم $C : [۰, ۱]^n \to M$ یک n_ مکعب جهت نگهدار باشد داریم

$$C^* \omega = g dx^۱ \wedge \cdots \wedge dx^k$$

در اینجا $x_۱ \cdots x_n$ مختصات استاندارد $I\!R^n$ بوده و $g > ۰$. لذا

$$\int_C \omega = \int_{[۰,۱]^n} g dx^۱ \wedge \cdots \wedge dx^n > ۰$$

---

[۱] $George\ Green$ ریاضیدان انگلیسی ۱۸۴۱_۱۷۹۳

همچنین داریم $\int_M \omega > 0$. می‌دانیم ω بسته است (چون هر n_فرم روی منیفلد n_بعدی بسته است $d\omega \in \Omega^{n+1}M = \{0\}$) حال اگر M انقباض‌پذیر باشد بنابر قضیه پوانکاره

$$\exists \eta \in \Omega^{n-1}M : \quad \omega = d\eta$$

از آنجا داریم

$$\int_M \omega = \int_M d\eta = \int_{\partial M} \eta = 0 \qquad (\text{چون } \partial M = \emptyset)$$

که یک تناقض است. لذا M نمی‌تواند انقباض‌پذیر باشد. $\square$

۶.۷ § همانستگی دورام[1]

در اثبات آخرین قضیه بخش قبل مشاهده کردیم که می‌توان اطلاعات مفیدی در مورد خصوصیات یک منیفلد، با مطالعه فرم‌های بسته ناکاملی که روی آن وجود دارد، به‌دست آورد. حال در اینجا این سوال را مطرح می‌کنیم که چه تعداد n_فرمی بسته ناکامل روی یک منیفلد n_بعدی وجود دارد.

در حقیقت مطالعه فرم‌های بسته ناکامل موجود روی یک منیفلد می‌تواند خصوصیات توپولوژیکی آن منیفلد را مشخص کند برای روشن شدن این موضوع یادآوری می‌کنیم که در لم پوانکاره ثابت کردیم که در $\mathbb{R}^n$ هر فرم بسته، کامل است و از طرف دیگر دیدیم که این خاصیت برای منیفلد دلخواه M برقرار نیست لذا وجود فرم بسته ناکامل در روی M مشخص کننده تفاوت آن با $\mathbb{R}^n$ است.

واضح است که اگر k_فرمی ω بسته و ناکامل باشد آنگاه $\omega + d\eta$ نیز (به ازاء هر $(k-1)$_فرمی دلخواه η) بسته و ناکامل است (چرا؟). لذا می‌توان از این دیدگاه ω و $\omega + d\eta$ را هم‌ارز فرض نمود. این موضوع ما را به مطالعه کلاس‌های هم‌ارزی و ساختارهای خارج قسمتی به شرح زیر رهنمون می‌سازد.

---

[1] de Rham Cohomology : Comm · Math · Helv · جلد ۲۶ (۱۹۵۲)

یادآوری: فضای برداری خارج قسمتی

اگر بخواهیم به زبانی ساده مفهوم خارج قسمت را بیان کنیم باید بگوئیم که خارج قسمت یعنی تقسیم یک مجموعهٔ E به چند زیرمجموعهٔ مجزا به طوری که اجتماع آن‌ها E را بپوشاند. این زیرمجموعه‌ها را "کلاس" نامیده و مجموعهٔ تمام کلاس‌ها را مجموعهٔ خارج قسمتی می‌نامیم.

به راحتی می‌توان نشان داد که اعضا هر کلاس در یک رابطه هم‌ارزی مانند R صدق می‌کنند. از اینرو کلاس‌ها را کلاس‌های هم‌ارزی نیز نامیده مجموعهٔ خارج قسمتی را توسط E/R نمایش می‌دهند. حال به تعریف فضای برداری خارج قسمتی می‌پردازیم.

تعریف: اگر E یک فضای برداری و F یک زیرفضای برداری E باشد رابطه

$$\forall x, x' \in E \quad , \quad xRx' \Leftrightarrow x - x' \in F$$

یک رابطه هم‌ارزی روی E تعریف می‌کند. مجموعه خارج قسمتی تعریف شده توسط این رابطه (با اعمال جمع و ضرب در اسکالر که به طور طبیعی تعریف می‌شود) یک فضای برداری است که آن را **فضای برداری خارج قسمتی** نامیده توسط E/F نمایش می‌دهند.

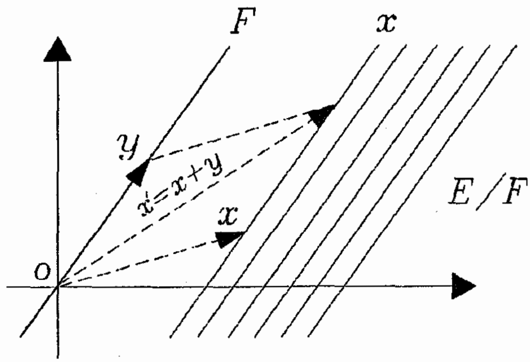
کلاس هم‌ارزی بردار x را توسط $\overline{x}$ نمایش می‌دهیم. لذا داریم

$$\overline{x} = \left\{x' \in E \;\middle|\; x' = x + y \;\; , \;\; y \in F\right\} \;\; , \;\; E/F = \{\overline{x} \mid x \in E\}$$

مثال: فضای برداری $E = I\!R^{۲}$ را در نظر گرفته فرض می‌کنیم زیرفضای برداری $F \subset E$ خطی باشد که از مبدأ مختصات می‌گذرد.

$$\overline{x} = \left\{x' \in I\!R^{۲} \;\middle|\; x' = x + y \;\; , \;\; y \in F\right\}$$

با توجه به شکل هر کلاس هم‌ارزی یک خط موازی F است. لذا فضای برداری خارج قسمتی E/F مجموعهٔ خطوط موازی با F در صفحه است.



شکل ۷.۱۴: فضای برداری خارج قسمتی

تعریف: فرض کنیم M یک منیفلد nـبعدی باشد. قرار می‌دهیم

$$Z^k(M) = \{\omega \in \Omega^k M | d\omega = 0\}$$

$$B^k(M) = \{\omega \in \Omega^k M | \exists \eta \in \Omega^{k-1} M : \omega = d\eta\}$$

$Z^k(M)$ و $B^k(M)$ فضای برداری بوده و از $d^2 = 0$ نتیجه می‌شود که همواره $B^k(M) \subset Z^k(M)$ زیرفضای برداری $Z^k(M)$ است.

تعریف: فضای برداری خارج‌قسمتی $H^k(M) = Z^k(M)/B^k(M)$ را **فضای برداری** k**ام همانستگی دورام**[1] یا **گروه** kـ **ام همانستگی دورام**[2] می‌نامند.

اگر فرض کنیم $\omega \in Z^k(M)$ آنگاه $[\omega] \in H^k(M)$ کلاس هم‌ارزی ω به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$[\omega] = \{\omega' \in Z^k(M) | \omega' = \omega + d\eta, \eta \in \Omega^{k-1}(M)\}$$

تعریف: اگر تفاضل دو فرم برابر یک فرم کامل باشد آن دو فرم را همانسته[3] می‌گوئیم.

درستی روابط زیر براحتی قابل بررسی است که به عنوان تمرین واگذار می‌شود.

---

[1] *k dimensional de Rham cohomology vector space*

[2] *de Rham cohomology groups*

[3] *cohomologous (cohomoloques)*

الف) اگر $\omega \in Z^k(M)$ و $\psi \in Z^l(M)$ آنگاه $\omega \wedge \psi \in Z^{k+l}(M)$

ب) اگر $\omega \in Z^k(M)$ و $\psi \in B^l(M)$ آنگاه $\omega \wedge \psi \in B^{k+l}(M)$

مثال ۱: فرض کنیم $M = I\!R$ در روی $I\!R$، ۱ ـ فرمی‌ها به‌صورت $\omega = g(x)dx$ نسبت به کارت مختصاتی کلی $(I\!R, Id)$ نوشته می‌شوند. واضح است که اگر $dimM = ۱$ آنگاه هر ۱ ـفرمی روی M بسته است. حال فرض کنیم

$$f(x) = \int_{\circ}^{x} g(t)dt \in C^{\infty}(I\!R) = \Omega^{\circ}(I\!R)$$

آنگاه $df = g(x)dx$ و لذا ω کامل نیز هست. بنابراین $Z^{۱}(I\!R) = B^{۱}(I\!R)$ لذا

$$H^{۱}(I\!R) = \{\circ\}$$

بطور کلی بنابر لم پوانکاره در $I\!R^n$ همواره داریم $Z^k(I\!R^n) = B^k(I\!R^n)$ لذا

$$\begin{array}{ll} \forall k > \circ & H^k(I\!R^n) = \{\circ\} \\ k = \circ & H^{\circ}(I\!R^n) = I\!R \end{array}$$

گزاره‌های زیر می توانند به‌عنوان مثالهایی از همانستگی دورام قلمداد گردیده و در درک مفهوم آن موثر باشند.

گزاره ۱:

الف) اگر M همبند باشد آنگاه $H^{\circ}(M) \approx I\!R$

ب) اگر M دارای k مولفه همبندی باشد آنگاه $H^{\circ}(M) \approx I\!R^k$

اثبات: در حالت $k = \circ$ $B^{\circ}(M)$ برابر $\{\circ\}$ تعریف می‌شود از آنجا

$$H^{\circ}(M) = Z^{\circ}(M) = \{f \in \Omega^{\circ}(M) = C^{\infty}(M) | df = \circ\}$$

الف) اگر M همبند باشد شرط $df = \circ$ فقط وفقط وقتی برقرار است که f روی M ثابت باشد. لذا $H^{\circ}(M)$ با فضای برداری $I\!R$ ایزومورف است.

ب) اگر M دارای k مولفه همبند باشد شرط $df = \circ$ فقط و فقط وقتی برقرار است که f

روی هر یک از مولفه‌های همبند ثابت باشد. لذا f توسط k عدد حقیقی مشخص می‌شود و $H^\circ(M)$ با فضای برداری $I\!R^k$ ایزومورف است. □

مثال ۲: فرض کنیم $M = I\!R^n$ از گزاره بالا نتیجه می‌شود $H^\circ(I\!R^n) \approx I\!R$ به همین صورت دایره $S^۱$ و کره $S^۲$ نیز همبند بوده داریم $H^\circ(S^۱) = H^\circ(S^۲) \approx I\!R$

مثال ۳: دایره $S^۱$ را به صورت زیر در نظر گرفته نشان می‌دهیم گروه یکم همانستگی دورام $H^۱(S^۱) \approx I\!R$

$$S^۱ = \{(\cos\theta, \sin\theta) | \circ \leq \theta \leq ۲\pi\}$$

فرض کنیم $\omega \in \Omega^۱(S^۱)$ و $\omega = f(\theta)d\theta$ چون $S^۱$ یک بعدی است هر ۱ـفرمی روی آن بسته است اما همانطوریکه قبلاً دیدیم هر ۱ـفرمی روی $S^۱$ لزوماً کامل نیست. حال این سئوال را مطرح می‌کنیم که آیا تابعی مانند $F \in C^\infty(S^۱)$ وجود دارد بطوریکه $\omega = dF$؟ اگر فرض کنیم $\omega = dF$ آنگاه F باید به صورت زیر تعریف شود.

$$F(\theta) = \int_\circ^\theta f(t)dt$$

برای آنکه F بطور یکتا روی $S^۱$ تعریف شود باید در رابطه تناوبی $F(۲\pi) = F(\circ) = \circ$ صدق کند

$$F(۲\pi) = \int_\circ^{۲\pi} f(t)dt = \circ$$

حال فرض کنیم ω و ω' فرم‌های بسته‌ای باشند که کامل نیستند. اگرچه $\omega - \omega'$ در حالت کلی کامل نیست، می‌توان نشان داد که عددی مانند $a \in I\!R$ موجود است بطوریکه $a\omega - \omega'$ کامل باشد. به عبارت دیگر اگر قرار دهیم

$$a = \int_\circ^{۲\pi} \omega' / \int_\circ^{۲\pi} \omega$$

داریم

$$\int_\circ^{۲\pi} (\omega' - a\omega) = \circ$$

لذا می‌توان نوشت

$$G(\theta) = \int_{0}^{\theta} \omega' - a\omega$$

و در نتیجه $\omega' - a\omega$ کامل است و می‌توان نوشت

$$dG = \omega' - a\omega$$

لذا بنابر تعریف ω' با $a\omega$ همانسته است.

از آنچه گذشت نتیجه می‌شود که اگر ω یک فرم بسته و ناکامل روی S^1 باشد آنگاه هر فرم بسته ω' روی S^1با فرم $a\omega$ (به ازاء عدد حقیقی a) همانسته است. لذا هر کلاس همانستگی با یک عدد حقیقی a مشخص می‌شود و در نتیجه

$$H^1(S^1) \approx I\!R$$

از طرف دیگر دیدیم $H^1(I\!R) = \{0\}$ این مطلب مشخص‌کننده اختلاف بسیار مهم بین توپولوژی دایره و خط حقیقی است.

رابطه بین کلاس‌های همانستگی روی دو منیفلد

همانطور که قبلاً نیز اشاره کرده‌ایم یک شاخه مهم از تحقیقات هندسه منیفلدها مربوط به شناخت شباهت آن منیفلد با $I\!R^n$ یا S^n از نظر توپولوژیکی است. به بیان ساده‌تر این سوال مطرح می‌شود که در چه صورت یک منیفلد (بطور سرتاسری) می‌تواند با $I\!R^n$ یا S^n هومئومورف باشد. جواب این سوال در برخی از موارد با بررسی فضای برداری همانستگی دورام آن منیفلدها قابل دستیابی است.

فرض کنیم M و N دو منیفلد دیفرانسیل‌پذیر بوده و $f : M \to N$ یک نگاشت دیفرانسیل‌پذیر باشد. اگر ω یک k_فرمی بسته روی N باشد آنگاه با توجه به خواص نگاشت کتانژانت یا نگاشت عقب‌بر داریم

$$d(f^*\omega) = f^*d\omega = 0$$

در نتیجه $f^*\omega$ نیز بسته است. بنابراین f^*، $Z^k(N)$ را به $Z^k(M)$ می‌برد. به همین صورت f^*، $B^k(N)$ را به $B^k(M)$ می‌برد، زیرا اگر فرض کنیم $\omega = d\eta$ آنگاه

$$f^*\omega = f^*(d\eta) = d(f^*\eta)$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که f^*فضای $Z^k(N)/B^k(N)$ را به فضای $Z^k(M)/B^k(M)$ می‌برد. به عبارت دیگر

هر نگاشت دیفرانسیل پذیر $f : M \to N$ یک نگاشت خطی $f^* : H^k(N) \to H^k(M)$ القا می کند.

این یک خاصیت مهم نظریه همانستگی است. به این معنی که خواص نگاشت بین دو منیفلد در نگاشت القایی بین گروه‌های همانستگی آن منعکس می‌گردد. **به عبارت دیگر دورام ثابت می‌کند که گروه‌های همانستگی نسبت به همئومورفیسم‌ها پایا می‌باشند و از آنجا می‌توان نتیجه گرفت که اگر $H^k(M) \neq H^k(N)$ ، (به ازاء یک عدد k) آنگاه M و N نمی‌توانند هومئومورف باشند.** به عنوان مثال در مثال ۳ دیدیم $H^1(S^1) \approx I\!R$ و چون $H^1(I\!R) = \{0\}$ بنابراین نتیجه می‌شود که دایره نمی‌تواند (بطور سرتاسری) با خط حقیقی هومئومورف باشد.

لذا بدست آوردن گروه‌های همانستگی یک منیفلد کاربردهای فراوانی دارد که در اینجا سعی می‌کنیم به چند گزاره که می‌تواند در تعیین این گروه‌ها نقش داشته باشد اشاره نمائیم.

گزاره ۲: اگر M انقباض‌پذیر باشد آنگاه

$$\forall k > 0 \qquad\qquad H^k(M) = \{0\}$$

اثبات: کافی است از لم پوانکاره استفاده کنیم بلافاصله حکم نتیجه می‌شود. □

گزاره ۳: اگر M منیفلد nبعدی فشرده و جهت‌پذیر باشد آنگاه $H^n(M) \neq \{0\}$

اثبات: کافی است از آخرین قضیه بخش قبل استفاده کنیم بلافاصله حکم نتیجه می‌شود. □

گزاره ۴:[1] **اگر M منیفلد nبعدی نافشرده باشد (جهت‌پذیر یا جهت ناپذیر) آنگاه**

[1] اثبات گزاره‌های ۴، ۵، ۶ خارج از حوصله این کتاب است علاقه‌مندان می‌توانند به ترتیب به I [۲۸] صفحه ۳۶۹، [۲۴] صفحه ۲۰۲ و I [۲۸] صفحه ۳۷۹ مراجعه نمایند.

$$H^n(M) = \{0\}$$

گزاره ۵: اگر M یک منیفلد همبند ساده باشد آنگاه

$$H^1(M) = \{0\}$$

مثال ۵: چون کره S^n، $(n > 1)$ همبند ساده است.

$$H^1(S^n) = \{0\} \qquad \forall n > 1$$

گزاره ۶: به ازاء هر k، $0 < k < n - 1$ داریم

$$H^k(\mathbb{R}^n - \{0\}) = H^k(S^{n-1}) = \{0\}$$

تمرین:

۱ـ درستی روابط الف و ب و ج را تحقیق کنید.

۲ـ گروه‌های همانستگی صفرـام S^2و S^n را ارائه کنید.

۳ـ $T^2 = S^1 \times S^1$ را درنظر گرفته نشان دهید

$$H^0(T^2) \approx \mathbb{R}$$

در مورد $H^0(T^n)$ چه می‌توان گفت؟

۴ـ اگر $H^1(T^2) \approx \mathbb{R}^2$ باشد با استفاده از خواص همانستگی‌ها تحقیق کنید آیا T^2 می‌تواند با $\mathbb{R}^2$ یا S^2 همئومورف باشد؟

دوگان پوانکاره[1]

پوانکاره با استفاده از خواص مقدماتی جبر خطی، فضای دوگان همانستگی را که می‌تواند نقش مهمی در تعیین فضاهای همانستگی ایفاء نماید، به شرح زیر تعریف می‌کند.

یادآوری: در جبر خطی اگر V یک فضای برداری متناهی‌البعد روی میدان K و V^* دوگان آن باشد چون V و V^* دارای ابعاد مساوی هستند بین V و V^* ایزومورفیسم وجود دارد که می‌توان آنها را توسط ضرب داخلی به صورت زیر تعریف کرد.

---

[1] *Poincaré duality (Dualite' de Poincare')*

فرض کنیم $g : V \to V^*$ یک ایزومورفیسم باشد و درایه‌های ماتریس این نگاشت خطی عبارت در یک پایه‌ای باشند از $[g_{ij}] \in GL(n, K)$ لذا اگر u و v بردارهایی از V با مولفه‌های u^j و v^j باشند نگاشت g به‌صورت $g(v) = \sum_{i=1}^{n} g_{ij}v^j$ تعریف می‌شود. به محض تعریف یک ایزومورفیسم بین دو فضای برداری می‌توان یک ضرب داخلی به‌صورت زیر تعریف نمود.

$$<,>: V \times V \to K$$
$$g(v, u) \equiv < gv, u >= \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}v^i u^j$$

عکس این موضوع نیز برقرار است، به این معنی که با تعریف یک ضرب داخلی روی دو فضای برداری ثابت می‌شود که این دو فضای برداری دوگان یکدیگر هستند.

حال فرض کنیم M یک منیفلد فشرده n بعدی باشد. همچنین فرض کنیم $\omega \in H^r(M)$ و $\eta \in H^{n-r}(M)$ به طوری که $\omega \wedge \eta$ یک nـفرمی غیر صفر روی M باشد. قبلاً دیدیم که اگر M جهت‌پذیر باشد یک nـفرمی غیرصفر روی آن وجود دارد این فرم را فرم **حجمی**[۱] نیز می‌نامند.

با تعریف یک ضرب داخلی به‌صورت زیر نشان می‌دهیم $H^r(M)$ دوگان $H^{n-r}(M)$ است. تعریف می‌کنیم

$$<,> \ : \ H^r(M) \times H^{n-r}(M) \to \mathbb{R}$$
$$< \omega, \eta > = \int_M \omega \wedge \eta$$

واضح است که $<,>$ دو خطی است و از طرفی ناتکین[۲] نیز هست، به این معنی که اگر $\omega \neq 0$ یا $\eta \neq 0$ باشد ضرب داخلی $<,>$ صفر نمی‌شود. لذا این دو فضا دوگان یکدیگر بوده و ایزومورف هستند.

$$H^r(M) \simeq H^{n-r}(M)$$

---

[۱] $Volume\ form\ (Forme\ de\ Volume)$

[۲] $non-Singular$ یعنی ماتریس آن وارون‌پذیر یا عضوی از $GL(n, \mathbb{R})$ است.

ضرب داخلی فوق را که فضای دوگان همانستگی را تعریف می‌کند دوگان پوانکاره می‌نامند.

تذکر: *هنگام استفاده از دوگان پوانکاره نباید شرط فشردگی یا جهت‌پذیری منیفلد M را فراموش نمود.*

کاربرد اصلی دوگان پوانکاره تعیین فضای همانستگی یک منیفلد از روی فضای دوگان آن است. به مثال زیر توجه فرمایید.

مثال: چنبره دوبعدی $T^{۲}$ را در نظر گرفته می‌خواهیم $H^{۲}(T^{۲})$ را محاسبه کنیم. می‌دانیم $T^{۲} = S^{۱} \times S^{۱}$. چون $S^{۱}$ فشرده است حاصلضرب دو مجموعهٔ فشرده یک مجموعهٔ فشرده است لذا $T^{۲}$ فشرده بوده و جهت‌پذیر نیز هست. بنابر دوگان پوانکاره

$$H^{\circ}(T^{۲}) \simeq H^{۲-\circ}(T^{۲})$$

از طرف دیگر در تمرین ۳ دیدیم $H^{\circ}(T^{۲}) \simeq I\!R$ بنابراین $H^{۲}(T^{۲}) \simeq I\!R$

تمرین:

۵ـ در تمرین ۴ بدون استفاده از فرض $H^{۱}(T^{۲}) \simeq I\!R^{۲}$ نشان دهید $T^{۲}$ نمی‌تواند با $I\!R^{۲}$ همئومورف باشد.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Persian - English Index واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

ط

طوقه ۳۰۶ Loop

ع

عمل آزاد ۱۴۴ Act freely

عمل آزاد چپ ۱۴۷ Act on the left

عمل از راست ۱۴۷ Act on the right

عمل روی M ۱۴۳ Act on a manifold

عمل موثر ۱۴۳ Act effectively

ف

فرم بسته ۲۹۸-۲۲۱ Closed form

فرم پایا ۲۷۱ Invariant form

فرم حجمی ۳۳۸ Volume element

فرم کامل ۲۲۵ Exact form

فرم موضعی کامل ۳۰۳ Locally exact Form

فرمول لایبنیتز ۲۶۹ Libnitz formula

فرم‌ها ۱۸۱ Forms

فروبنیوس-تعبیر تحلیلی
۲۹۱ Frobenius theorem - analytic interpretation

فضای خارج قسمتی ۱۳۴ Quotient space

فضای دوگان ۱۵۸ Dual space

فضای دوگان مماس ۷۸ Cotangent space

فضای فاز ۲۳۶ Phase space

فضای نرمال ۹۲ Normal space

فضای فاز توسعه‌یافته
۲۳۶ Large phase space

فیبر روی P ۱۱۹ Fiber over - p

ق

قاعده زنجیره‌ای ۲۵ Chain rule

قرارداد جمع‌بندی
۱۷۴ Summation convention

قضیه استوکس ۳۱۷-۲۹۷ Stokes Theorem

قضیه اوریسون ۹۲ Urysohn Theorem

قضیه بازسازی یک میدان برداری
۲۵۷ Redressing a vector field - Theorem

قضیه تابع ضمنی
۴۵ Implicit function Theorem

قضیه تابع معکوس
۴۱ Inveres function Theorem

قضیه تغییرناپذیری ناحیه
۳۷ Invariance of domain

قضیه رتبه ۱۰۲-۴۳ Rank Theorem

قضیه شار موضعی ۲۵۵-۲۴۱ Flow Theorem

قضیه فروبنیوس
۲۸۵-۲۸۴-۲۸۳-۲۷۹ Theorem Frobenius

قضیه کارتان ۲۰۶ Cartan Theorem

قضیه گرین ۳۲۹ Greens Theorem

قضیه ناش ۱۱۷ Nash Theorem

قضیه ویتنی ۱۱۷ Withney Theorem

ک

کارت موضعی ۵ Local chart (carte locale)

کرل ۲۲۹ Curl

کروشه دو میدان برداری
۷۱ Bracket of two vector fields

جبر K ۶۶ K- Algebra

K مکعب استاندارد ۳۰۸ K-cube, standard

K مکعب منفرد ۳۰۸ K-cube, singular

گروه تبدیلات ۱۴۳ Transformations groups

گروه تبدیلات خطی متعامد

English-Persian Index واژنامه انگلیسی به فارسی

U

V

W

Bibliography فهرست مراجع

[1] Apostol T.M. *Mathematical Analysis,* second edition, Addison - Wesley, 1973.

[2] Berger M.& Gostiaux B. *Geometrie Differentielle* Arman Colin Paris, 1996.

[3] Bishop R.L. & Crittenden R.J., *Geometry of Manifolds*, Academic press, New York, 1964.

[4] Bidabad B. *Conformal & Projective transformations on Riemannian manifolds,* Toulouse University, France, 1987.

[5] Boothby W. *An Introduction to differential Manifolds and Differential Geometry,* Academic press, New York , 1975.

[6] Brickell F.& Clark R.S. *Differentiable Manifolds,* Van Nostrand Publishing Co., 1970.

[7] Conlon L. *A first course in Differentiable Manifolds*, Birkhauser Advanced Texts, 1993.

[8] Crumeyroll A. *Cours de Geometrie Differentielle*, Universite de Toulouse, France, 1985.

[9] Donaldson S.K. "*An application of gauge theory to the topology of 4 - manifolds* J.diff., Geometry" 18(1983).

[10] Dobrovine, Novikov, Fommenko *Contemporary Geometry*, Springer verlag, 1996.

[11] Eisenhart L.P. *Riemannian geometry*, princeton university press, 1964.

[12] Gallot. & Hulin & Lafontaine *Riemannian Geometry*, Springer Verlag, 1990.

[13] Grifone J. *Algebre lineaire*, Cepadves - Editions, 1990.

[14] Grifone J. *Cours de Geometrie differentielle*, Universite' de Toulouse France, 1998.

[15] Kobayashi S. & Nomizu k. *The foundations of Differential Geometry I*, Wiley, New York, 1963.

[16] Kobayashi S.& Nomizu k. *The foundations of Differential Geometry II*, Wiley, 1969.

[17] Lang S. *Real Analysis* , Addison - Wesley , Reading, Massachusette, 1983.

[18] Lang S. *Foundamentals of Differential Geometry*, Springer Verlag, 1999.

[19] Libermann P. *Cours de Geometrie Differentiele*, Paris University France, 1986.

[20] Milnor j . & Kervaire "M.4 - *Groups of homotopy on spheres*", I, Ann. Math. 77, (1963), 505- 537.

[21] Milnor & j 1 - "*Some Consequences of a theorem of bott*" Ann. Math 68, (1958).

[22] Milnor & j 2 - "*Topology from differentiable viewpoint*" , the University Press of Virginia Charlottesville, Virginia, 1965.

[23] Milnor & j 3 - *Morse Theory* "(Note by M.Spivak and R. Wells), Annale of math, studies , no 51 Princeton university press, 1963.

[24] Nakahara M. *Geometry , Topology and physics*, iop publishing ltd., 1992.

[25] Schouten j.P. *Ricci calculus*, Springer, Berlin, 1924.

[26] Sharpe R.W. *Differential Geometry*, Springer, Graduate Texts in Mathematics, 1997.

[27] Spivak M. *Calculus on Manifolds*, Addison, Wesley, 1992.

[28] Spivak M. Differential geometry, volume I, II, second edition, Publish of Perish Inc. Houston, Texas, 1979.

[29] Warner F.W. *Foundations of differentiable manifolds and lie groups*, Springer Verlag, 1980.

مراجع فارسی

- **ا. اسرافیلیان** - ترجمه کتاب هندسه دیفرانسیل برای فیزیکدانان تالیف س - جی ایشام دانشگاه علم و صنعت ایران ۱۳۷۴
- **س. شهشهانی** - جزوه درس هندسه منیفلد - دانشگاه صنعتی شریف
- **ک. هافمن - ر. کنزی** - جبر خطی ترجمه فرشیدی - مرکز نشر دانشگاهی ۱۳۶۸
- **م. اسپیواک** - حساب دیفرانسیل روی منیفلدها - ترجمه اسرافیلیان و مدقالچی - پیام نور
- **م. تومانیان** - جزوه درس هندسه منیفلد - دانشگاه تبریز
- **و. رودین** - اصول آنالیز ریاضی - ترجمه عالم‌زاده انتشارات علمی فنی تهران ۱۳۶۲
- **ع. جذبی** - هندسه ایرانی در عمل - ابوالوفا محمد بن البوزجانی - سروش ۱۳۷۶